# 多様な設定の神経衰弱における戦略分析

浦田 智稀[1,a)]　ディプタラマ ヘンリアン[1]　吉仲 亮[1]　篠原 歩[1]

**概要**：同じ文字の書かれたカードが場に 2 枚だけ存在し，プレイヤが 1 度めくられたカードを全て覚えられるという設定の神経衰弱については最適な戦略や場の評価値の近似値が解析されてきた．本研究ではトランプのように同じ文字のカードが 4 枚存在する神経衰弱を取り扱い，さらに記憶を制限した場合についても解析を行う．記憶無制限の 2 人神経衰弱では，特別な場合について最適なカードのめくり方を証明した．記憶を制限した 1 人神経衰弱については，最適な記憶戦略を計算して求めた．

# Strategy of the memory game in various settings

Tomoki Urata[1,a)]　Diptarama Hendrian[1]　Ryo Yoshinaka[1]　Ayumi Shinohara[1]

***Abstract:*** The literature has studied the optimal strategy of the memory game where the same character is printed on two cards and players remember all the turned cards. This paper studies the game where four cards may have the same character, like usual playing cards. We show the optimal strategy in a special case of this game. Moreover, we analyze the optimal strategy of the game with a limited number of cards which is played by a single player whose memory is limited.

## 1. はじめに

神経衰弱はトランプ等を用いて行われるゲームである．ゲームの開始時にカードが裏向きに並べられる．プレイヤは交代でカードを 2 枚めくる．2 枚のカードの文字が一致した場合は獲得して続けて自分の手番を行い，一致しない場合は裏向きに戻して相手の手番となる．裏向きに戻したカードの文字を記憶することによって，ゲームを有利に進めることができる．場のカードがなくなったときにゲームが終了し，多くカードを獲得していたプレイヤが勝ちとなる．先行研究 [2], [3] においては，同じ文字のカードは 2 枚だけ存在し，プレイヤが 2 人で，一度めくられたカードはプレイヤが全て記憶しているという設定の元で，どのようにカードをめくるべきかについて分析された．これらの研究では，場面に応じためくり方をするのが良いことが示されており，例えば文字が一致していないと記憶している 2 枚のカードをめくり自分の手番をスキップするのが良い場面がある．本研究では同じ文字のカードが 4 枚ある場合に拡張した 2 つの設定の神経衰弱の戦略を分析した．

まず 1 つ目は，プレイヤが 2 人で記憶を無制限とした場合に，より多くのカードを獲得することを目的とした設定である．プレイヤがカードをめくるとき，記憶しているカードまたは記憶していいないカードをめくることができる．どちらをめくるべきかについて漸化式を用いて計算し，特殊な場合についての最適な行動の証明を行った．

しかし，実際のゲームではプレイヤが全てのカードを覚えているとは限らないため，これらの戦略を実践するのは難しい．そのため，プレイヤの記憶を制限した場合についての戦略を考える必要がある．そこで，2 つ目の設定ではプレイヤが 1 人でカードを 1 枚しか記憶できないという制限の元で，より少ないターンで全てのカードを獲得することを目的とする．プレイヤが記憶するカードを 2 種類に分け，どちらのカードを覚えるべきかを漸化式を用いて計算し結果についての考察を行った．

## 2. 関連研究

神経衰弱では，プレイヤは 1 ターンに 2 枚のカードをめくる．このときプレイヤは，書かれた文字を覚えている

[1] 東北大学大学院情報科学研究科
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University
[a)] tomoki.urata.r4@dc.tohoku.ac.jp

©2022 Information Processing Society of Japan

カード（既知カード）をめくるか，書かれた文字を覚えていないカード（未知カード）をめくるか選ぶことができる．2 人神経衰弱において最適なめくり方を研究したのが，Zwick と Paterson [2]，篠田 [3] である．前者では，現在の獲得カード数に関わらず，これから獲得するカード数の期待値を最大化することを目的とした．後者では，ゲームに勝利する確率を最大化すること，すなわちゲーム終了時に自分が獲得するカードが相手より多くなる確率を最大化することを目的とした．また，1 人神経衰弱の先行研究として Foerster と Wattenhofer [1] の研究がある．1 人神経衰弱は，できるだけ少ないターン数でカードを全て獲得することを目的とする．Forerster と Wattenhofer が分析した 1 人神経衰弱では，場の状況に応じてカードのめくり方を変える必要がないことが示された．これらの先行研究では，同じ文字のカードが 2 枚だけ存在し，1 度めくられたカードは全て覚えているものとして解析がなされた．

## 3. 記憶が無制限の 2 人神経衰弱

この節で考える神経衰弱は次のような設定である．ゲームはプレイヤ 2 人で行い，両プレイヤは一度めくられたカードの文字は全て記憶するものとする．同じ文字のカードは最大 4 枚存在し，各文字のカードが場に何枚残っているかは知らされている．現時点からゲームが終了するまでに自分が獲得するカード枚数を $c_+$，現時点からゲームが終了するまでに相手が獲得するカード枚数を $c_-$ と表し，$c_+ - c_-$ をプレイヤの利得とする．$c_+ - c_-$ の期待値を最大化するような戦略について考える．

### 3.1 準備

1 枚目のカードをめくる前に，既知カード内に，ある文字のカードが 2 枚あるとき，最適な戦略において，プレイヤは直ちにその 2 枚をめくって獲得するものとして良いことは容易に示すことができる．したがって，既知のカード内に各文字のカードが高々 1 枚ある場について，利得の期待値を最大化する最適な戦略を考えれば十分である．文字 X の書かれた既知カードが存在するとき，X を既知の文字と呼び，そうでないとき，未知の文字と呼ぶ．場に文字 X のカードが $x$ 枚あるとき，その文字をタイプ $x$ と呼び，タイプ $x$ の文字が書いてあるカードもまたタイプ $x$ と呼ぶ．図 1 中の D は既知かつタイプ 2 であり，C は未知かつタイプ 4 である．本設定のゲーム中にタイプ 1 や 3 の文字は存在し得ない．場は 4 つ組 $(n_a, n_f, k_a, k_f)$ で表される．

- $n_a$：場にあるカードの文字の種類数
- $n_f$：場にあるタイプ 4 のカードの文字の種類数
- $k_a$：場にある既知カードの枚数
- $k_f$：場にあるタイプ 4 の既知カードの枚数

例えば，図 1 のような場は $(4, 3, 1, 2)$ と表される．

プレイヤは自分のターンに 2 枚のカードをめくる．プレイヤが 1 枚目のカードをめくるときに選べる戦略は次の 3 つである．

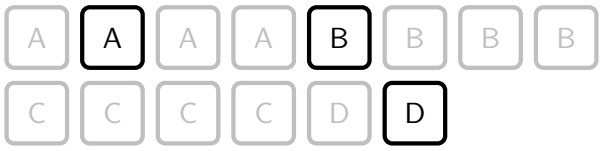


図 1: $(4, 3, 1, 2)$ で表される場．グレーは一度もめくられていないカードを表し，黒は一度めくられてプレイヤが記憶している既知のカードを表す．

- タイプ 2 の既知カードをめくる．
- タイプ 4 の既知カードをめくる．
- 未知カードをめくる．

プレイヤが 1 枚目に未知カードをめくったとき，書かれている文字は次の 4 通りがある．

- 既知かつタイプ 2
- 既知かつタイプ 4
- 未知かつタイプ 2
- 未知かつタイプ 4

プレイヤは 2 枚目にめくるカードを次の 3 つから選べる．

- 1 枚目のカードと文字が一致する既知カード
- 1 枚目のカードと文字が一致しない既知カード
- 未知カード

ただし，それぞれそのようなカードが存在する場合に限る．プレイヤが 2 枚目に未知カードをめくったとき，書かれている文字は次の 5 通りがある．

(1) 1 枚目と一致する文字
(2) 1 枚目の文字と一致しない，既知かつタイプ 2 の文字
(3) 1 枚目の文字と一致しない，既知かつタイプ 4 の文字
(4) 1 枚目の文字と一致しない，未知かつタイプ 2 の文字
(5) 1 枚目の文字と一致しない，未知かつタイプ 4 の文字

ここで，文字の既知／未知は 1 枚目をめくる前の場を基準としている．(1) の場合，自分がめくった 2 枚のカードを獲得でき，続けて自分のターンを行う．(2) と (3) の場合，次のターンに相手にカードを獲得され，続けて相手のターンとなる．(4) と (5) の場合，確実にカードを獲得することはできず，既知のカードが増えて相手のターンとなる．

プレイヤは 1 枚目と 2 枚目のめくり方の組み合わせにより $3 \times 3$ 通りの行動があるが，例えば 1 枚目に既知カードをめくって 2 枚目に未知カードをめくる行動は，その逆より利得の期待値が高くなることはない．このように明らかに最適戦略として考慮する必要のない行動は省略して考えることができる．プレイヤには文字が一致しない既知のカードを 2 枚めくる戦略があるが，これが最適な行動である場合，場が変化しないまま両プレイヤがその行動を繰り返してしまう．これを防ぐため，プレイヤが文字が一致しない 2 枚の既知カードをめくったときには直ちにゲームが終了するものとする [2]．最適戦略として考慮する必要がない行動を省いた場合分けを図 2 に示す．

©2022 Information Processing Society of Japan

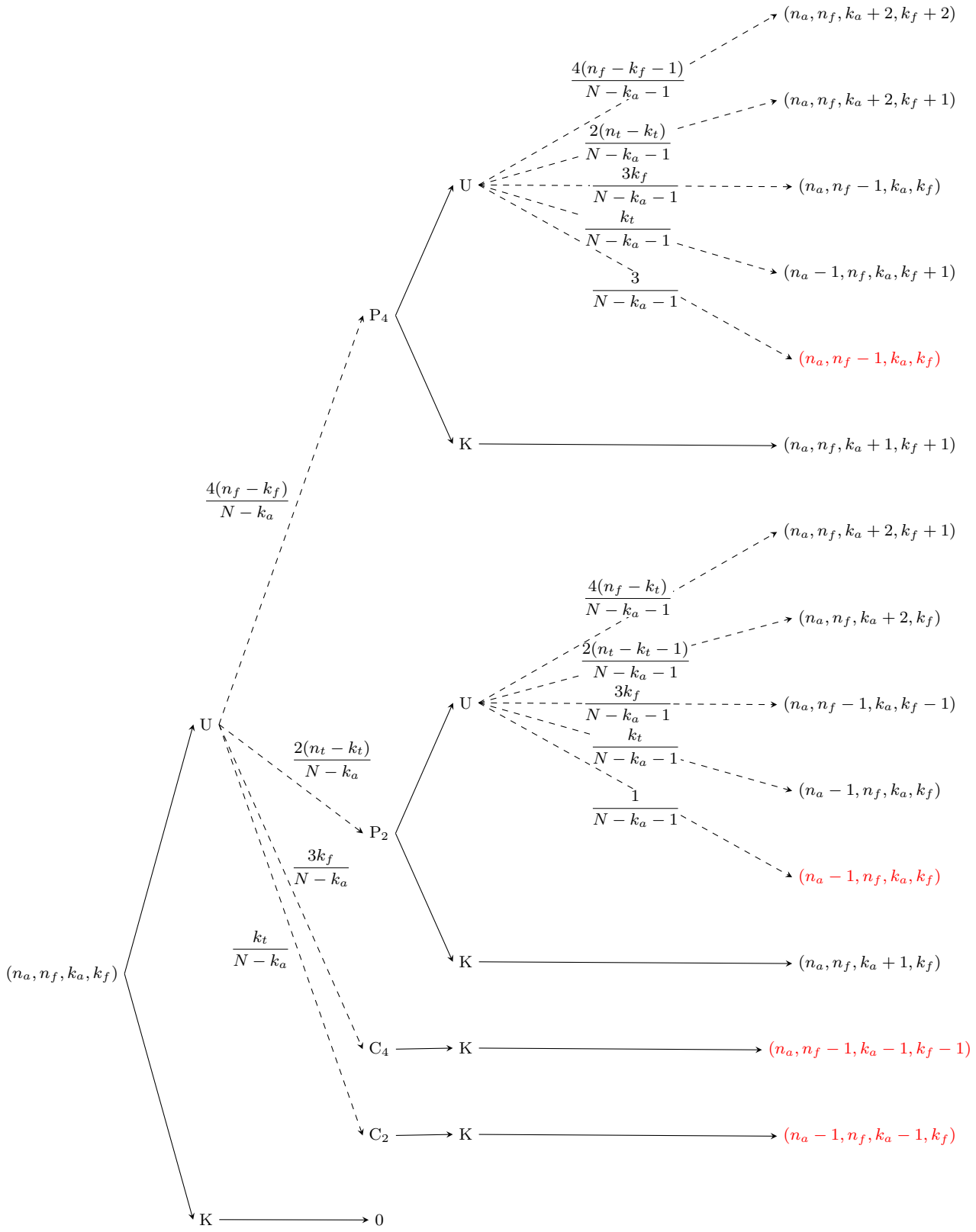


図 2: 場 $(n_a, n_f, k_a, k_f)$ から遷移する場．実線はプレイヤの行動選択を表し，点線は未知カードをめくった結果の確率的な遷移を表す．K は既知カード，U は未知カードをめくることを表す．$C_x$ は 1 枚目にめくったカードの文字が既知かつタイプ $x$ であることを表し，$P_x$ は 1 枚目にめくったカードの文字が未知かつタイプ $x$ であることを表す．赤で書かれた場はカードを獲得して自分のターンをもう一度行うことを表す．

©2022 Information Processing Society of Japan

### 3.2 漸化式

両プレイヤが自分の利得の期待値を最大化する最適な行動をおこなったときに，$(n_a, n_f, k_a, k_f)$ における利得の期待値を評価値と呼び，$E(n_a, n_f, k_a, k_f)$ で表す．$E(n_a, n_f, k_a, k_f)$ は図 2 をもとに下記の式 (1)，式 (2) で計算できる．ただし，場にある全てのカード枚数を $N$（$= 2n_a + 2n_f$），場にあるタイプ 2 のカードの文字の種類数を $n_t$（$= n_a - n_f$），場にあるタイプ 2 の既知カードの枚数を $k_t$（$= k_a - k_f$）とした．

$$E(0,0,0,0) = 0 \tag{1}$$

$$E(n_a, n_f, k_a, k_f) = \max\{\alpha_{\mathrm{K}}, \alpha_{\mathrm{U}}\} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{\mathrm{K}} &= 0 \\
\alpha_{\mathrm{U}} &= \frac{k_t}{N-k_a} \cdot \alpha_{\mathrm{UC}_2} + \frac{3k_f}{N-k_a} \cdot \alpha_{\mathrm{UC}_4} \\
&\quad + \frac{2(n_t-k_t)}{N-k_a} \cdot \alpha_{\mathrm{UP}_2} + \frac{4(n_f-k_f)}{N-k_a} \cdot \alpha_{\mathrm{UP}_4} \\
\alpha_{\mathrm{UC}_2} &= 1 + E(n_a-1, n_f, k_a-1, k_f) \\
\alpha_{\mathrm{UC}_4} &= 1 + E(n_a, n_f-1, k_a-1, k_f-1) \\
\alpha_{\mathrm{UP}_2} &= \max\{\alpha_{\mathrm{UP}_2\mathrm{K}}, \alpha_{\mathrm{UP}_2\mathrm{U}}\} \\
\alpha_{\mathrm{UP}_4} &= \max\{\alpha_{\mathrm{UP}_2\mathrm{K}}, \alpha_{\mathrm{UP}_2\mathrm{U}}\} \\
\alpha_{\mathrm{UP}_2\mathrm{K}} &= -E(n_a, n_f, k_a+1, k_f) \\
\alpha_{\mathrm{UP}_4\mathrm{K}} &= -E(n_a, n_f, k_a+1, k_f+1) \\
\alpha_{\mathrm{UP}_2\mathrm{U}} &= \frac{1}{N-k_a-1} \cdot (1 + E(n_a-1, n_f, k_a, k_f)) \\
&\quad - \frac{k_t}{N-k_a-1} \cdot (1 + E(n_a-1, n_f, k_a, k_f)) \\
&\quad - \frac{3k_f}{N-k_a-1} \cdot (1 + E(n_a, n_f-1, k_a, k_f-1)) \\
&\quad - \frac{2(n_t-k_t-1)}{N-k_a-1} \cdot E(n_a, n_f, k_a+2, k_f) \\
&\quad - \frac{4(n_f-k_f)}{N-k_a} \cdot E(n_a, n_f, k_a+2, k_f+1) \\
\alpha_{\mathrm{UP}_4\mathrm{U}} &= \frac{3}{N-k_a-1} \cdot (1 + E(n_a, n_f-1, k_a, k_f)) \\
&\quad - \frac{k_t}{N-k_a-1} \cdot (1 + E(n_a-1, n_f, k_a, k_f+1)) \\
&\quad - \frac{3k_f}{N-k_a-1} \cdot (1 + E(n_a, n_f-1, k_a, k_f)) \\
&\quad - \frac{2(k_t-k_f)}{N-k_a-1} \cdot E(n_a, n_f, k_a+2, k_f+1) \\
&\quad - \frac{4(n_f-k_f-1)}{N-k_a} \cdot E(n_a, n_f, k_a+2, k_f+2)
\end{aligned}$$

$\alpha$ の添字は図 2 に対応している．例えば，1 枚目に既知のカードをめくった場合の利得の期待値が $\alpha_{\mathrm{K}}$ であり，1 枚目に未知のカードをめくった結果，タイプ 2 かつ未知の文字のカードがめくられて，2 枚目に既知のカードをめくった場合の利得の期待値が $\alpha_{\mathrm{UP}_2\mathrm{K}}$ である．

表 1: $(n_a, 0, k_a, 0)$ における最適な行動．0 は 0-move，1 は 1-move，2 は 2-move が最適な場合．

| $n_a \backslash k_a$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 1,2 | | | | | | | | |
| 3 | 1 | 2 | 1,2 | | | | | | | |
| 4 | 2 | 1 | 0,2 | 1,2 | | | | | | |
| 5 | 1 | 2 | 1 | 0 | 1,2 | | | | | |
| 6 | 1 | 1 | 2 | 1 | 0 | 1,2 | | | | |
| 7 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 0 | 1,2 | | | |
| 8 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 0 | 1,2 | | |
| 9 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 0 | 1,2 | |
| 10 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 0 | 1,2 |

### 3.3 実験

実際に漸化式を用いて $E(n_a, n_f, k_a, k_f)$ を計算した．例として，場のカードが全てタイプ 2 のとき（$n_f = k_f = 0$）の最適な行動を表 1，既知かつタイプ 4 の文字が 1 つだけあるとき（$n_f = k_f = 1$）の最適な行動を表 2 に示す．（表 1 は [2] で得られていた結果である．）ここでは，[2] に従い，行動を次の 3 つに分類した．

- 0-move : 書かれている文字が一致しない既知カードを 2 枚めくる．
- 1-move : 1 枚目に未知カードをめくった後，1 枚目と文字が一致する既知カードが存在すればそれをめくり，存在しなければ 1 枚目と文字が一致しない既知カードをめくる．
- 2-move : 1 枚目に未知カードをめくった後，1 枚目と文字が一致する既知カードが存在すればそれをめくり，存在しなければ未知カードをめくる．

$x$-move は既知のカードが最大 $x$ 枚増える行動である．0-move は既知のカードが 2 枚以上，1-move は既知のカードが 1 枚以上ある場でしか選択することはできない．前述のように 0-move を行った場合は直ちにゲームが終了する．表を見ると，$(n_a, 1, k_a, 1)$ について 0-move が最適である場がないことがわかる．特に $(n, 0, n-1, 0)$ においては $n \geq 4$ で 0-move が最適であるのに対して，$(n, 1, n-1, 1)$ においては 2-move が最適である．このことを 3.5 節で証明する．また，計算した評価値を表 3，表 4 に示す．有理数で計算した結果を小数表記した．

### 3.4 $E(n, 1, n, 1)$ の一般項

本節では 3.5 節で最適な行動を証明する準備として $E(n, 1, n, 1)$ の一般項を導出する．場のカードの文字がすべて既知かつタイプ 2 の場合（$(n, 0, n, 0)$），プレイヤは未知カードをめくりそれと文字が一致する既知カードをめくる，という行動を繰り返すことにより，場にある全てのカードを獲得することができるため，$E(n, 0, n, 0) = n$ である．しかし，場のカードの文字のが全て既知であり，そのうち 1 文字だけタイプ 4 である場合（$(n, 1, n, 1)$），タイ

©2022 Information Processing Society of Japan

表 2: $(n_a, 1, k_a, 1)$ における最適な行動.

| $n_a \backslash k_a$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 1,2 | | | | | | | | |
| 3 | 1 | 2 | 1,2 | | | | | | | |
| 4 | 1 | 1 | 2 | 1,2 | | | | | | |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1,2 | | | | | |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1,2 | | | | |
| 7 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1,2 | | | |
| 8 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1,2 | | |
| 9 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1,2 | |
| 10 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1,2 |

表 3: $E(n_a, 0, k_a, 0)$

| $n_a \backslash k_a$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.67 | 2.00 | | | | | |
| 3 | -0.20 | 0.33 | 3.00 | | | | |
| 4 | 0.11 | 0.27 | 0.00 | 4.00 | | | |
| 5 | -0.03 | 0.14 | 0.54 | 0.00 | 5.00 | | |
| 6 | 0.00 | 0.10 | 0.12 | 0.77 | 0.00 | 6.00 | |
| 7 | 0.05 | 0.03 | 0.23 | 0.10 | 0.98 | 0.00 | 7.00 |

表 4: $E(n_a, 1, k_a, 1)$

| $n_a \backslash k_a$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.00 | 2.00 | | | | | |
| 3 | 0.17 | 0.30 | 2.00 | | | | |
| 4 | 0.13 | 0.25 | 0.63 | 2.00 | | | |
| 5 | 0.09 | 0.24 | 0.27 | 0.87 | 2.14 | | |
| 6 | 0.16 | 0.10 | 0.37 | 0.29 | 1.08 | 2.34 | |
| 7 | 0.04 | 0.24 | 0.10 | 0.50 | 0.31 | 1.27 | 2.56 |

プ 4 のカードのうち既知カードを含む 2 枚を獲得したときに，残り 2 枚のカードは未知かつタイプ 2 になってしまうため全てのカードを必ずしも獲得できるわけではない．

まず，$n \geq 4$ について $E(n, 0, n-1, 0) = 0$ を示す．式 (2) と $E(n, 0, n, 0) = n$ より，式 (3) を得る．

$$E(n, 0, n-1, 0) = \max\left\{0, \frac{(n-1) \cdot E(n-1, 0, n-2, 0) + 3 - n}{n+1}\right\} \tag{3}$$

実際の計算により (表 3)，$E(4, 0, 3, 0) = 0$ を得る．$n \geq 4$ について，帰納法により $E(n, 0, n-1, 0) = 0$ を示すことができる．すなわち，$E(n-1, 0, n-2, 0) = 0$ が成り立つと仮定すると，式 (3) より $E(n, 0, n-1, 0) = \max\{0, (3-n)/(n+1)\} = 0$ が $n \geq 3$ において成り立つ．

$E(n, 1, n, 1)$ の値について式 (2) より，式 (4) を得る．

$$E(n, 1, n, 1) = \max\left\{0, 1 + \frac{n-1}{n+2} \cdot E(n-1, 1, n-1, 1) + \frac{3}{n+2} \cdot E(n, 0, n-1, 0)\right\} \tag{4}$$

前に示した $n \geq 4$ について $E(n, 0, n-1, 0) = 0$ が成り立つことと，実際に計算した値 $E(3, 1, 3, 1) = 2$（表 4）を用いて $n \geq 4$ についての一般項を求めると式 (5) を得る．

$$E(n, 1, n, 1) = \frac{1}{4}\left\{\frac{120}{n(n^2+3n+2)} + n + 3\right\} \tag{5}$$

### 3.5 $(n, 1, n-1, 1)$ の最適な行動

$n \geq 4$ とする．$(n, 1, n-1, 1)$ では 2-move が最適であることを証明する．式 (2) より，式 (6) を得る．

$$E(n, 1, n-1, 1) = \max\{0, \beta + \gamma\} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{n+1}{n+3} + \frac{n-2}{n+3} \cdot E(n-1, 1, n-2, 1) + \frac{3}{n+3} \cdot E(n, 0, n-2, 0) \\
\gamma &= \frac{2}{n+3} \cdot \max\{\delta, \epsilon\} \\
\delta &= -E(n, 1, n, 1) \\
\epsilon &= -\frac{n}{n+2} - \frac{n-3}{n+2} \cdot E(n-1, 1, n-1, 1) - \frac{3}{n+2} \cdot E(n, 0, n-1, 0)
\end{aligned}$$

3.4 節で得られた $E(n, 0, n-1, 0) = 0$ と式 (4) を用いて，$\gamma = \frac{2}{n+3} \cdot \epsilon$ を得る．式 (5) より $E(n-1, 1, n-1, 1) \leq n/2$ が得られ，$\gamma \geq -\frac{n(n-1)}{(n+2)(n+3)}$ を得る．既知のカードが 2 枚以上ある場合は 0-move によりゲームを終了させることができるため評価値が 0 以上になることから，$\beta \geq \frac{n+1}{n+3}$ を得る．これらのことより，$\beta + \gamma \geq 0$ である．したがって，$n \geq 4$ について $(n, 1, n-1, 1)$ では 2-move が最適である．

## 4. カードを 1 枚だけ記憶できる 1 人神経衰弱

本節では，ゲームをプレイヤ 1 人で行い，場にタイプ 2 とタイプ 4 のカードが存在し，プレイヤはカードを 1 枚しか覚えられない設定の神経衰弱を考える．1 人神経衰弱におけるプレイヤの最適な行動とは，カードを全て獲得するのに要するターン数の期待値を最小化する行動である．プレイヤの記憶を制限するときに，プレイヤが記憶するカードを制御できず，選択肢の中からランダムなカードを記憶する設定や，必ず最後にめくったものを記憶する設定なども考えられる．ここでは，プレイヤはカードをめくった後に，元々記憶していた高々 1 枚のカードと，カードをめくって獲得できなかった場合の 2 枚のカードの計高々 3 枚から 1 枚選んで記憶できるものとする．このとき，場のカードが全てタイプ 2 の場合は，どのカードを覚えても残りター

©2022 Information Processing Society of Japan

図 3: $(3,1,2)$ で表される場．グレーは記憶していないカードを表し，黒は一度めくられてプレイヤが記憶している既知のカードを表す．

ン数の期待値は変わらない．しかし，本設定ではタイプ 2 のカードとタイプ 4 のカードが存在し，どちらを覚えるかで所要ターン数に影響する．そこで，どちらのカードを覚えた方がより早く全てのカードを獲得できるかについて分析する．

### 4.1 準備

プレイヤが 1 人の場合には，自然なめくり方が最適な戦術であることは容易に示すことができる．すなわち，まず 1 枚目に未知カードをめくり，そのカードの文字が既知である場合には，その文字の既知カードをめくりこれらのカードを獲得する．1 枚目のカードの文字が未知であった場合には，別の未知カードをめくる．カードをめくり終わった後にプレイヤが（記憶可能なカードが存在して）カードを記憶するとき，次の 2 つの戦略から選ぶ．

- 2-save：タイプ 2 のカードを記憶
- 4-save：タイプ 4 のカードを記憶

本設定では，場を次の三つ組 $(n_a, n_f, n_m)$ で表す．

- $n_a$：場にあるカードの文字の種類数
- $n_f$：場にあるカードのタイプ 4 の文字の種類数
- $m$：記憶しているカードのタイプ
  （記憶しているカードがない場合は 0）

例えば，図 3 のような場は $(3,1,2)$ と表される．場 $(n_a, n_f, m)$ において最適な行動を取ったときのターン数の期待値を評価値と呼び，$E(n_a, n_f, m)$ で表し，漸化式を用いて計算する．

### 4.2 評価値の漸化式

$(n_a, n_f, 0)$ で表される場について考える．1 枚目にめくったカードの文字は，タイプ 2 とタイプ 4 に分けられる．2 枚目にめくったカードの文字は，次の 3 つに分けられる．

- 1 枚目と一致する文字
- 1 枚目と一致しない，タイプ 2 の文字
- 1 枚目と一致しない，タイプ 4 の文字

$(n_a, n_f, 0)$ からの遷移を図 4 に表す．これをもとにして，$E(n_a, n_f, 0)$ は漸化式 (7)，(8) で計算できる．なお，第 1 項の 1 はプレイヤが 1 ターンの行動を行うことで場が遷移することを表している．同様に，$E(n_a, n_f, 2)$ は (9)，$E(n_a, n_f, 4)$ は (10) で計算できる．

$$E(0,0,m) = 0 \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
E(n_a, n_f, 0) &= 1 \\
&+ \frac{2n_a - 2n_f}{N} \cdot \Bigg( \frac{1}{N-1} \cdot E(n_a - 1, n_f, 0) \\
&+ \frac{2n_a - 2n_f - 2}{N-1} \cdot E(n_a, n_f, 2) \\
&+ \frac{4n_f}{N-1} \cdot \min\{E(n_a, n_f, 2), E(n_a, n_f, 4)\} \Bigg) \\
&+ \frac{4n_f}{N} \cdot \Bigg( \frac{3}{N-1} \cdot E(n_a, n_f - 1, 0) \\
&+ \frac{4n_f - 4}{N-1} \cdot E(n_a, n_f, 4) \\
&+ \frac{2n_a - 2n_f}{N-1} \cdot \min\{E(n_a, n_f, 2), E(n_a, n_f, 4)\} \Bigg)
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
E(n_a, n_f, 2) &= 1 \\
&+ \frac{1}{N-1} \cdot E(n_a - 1, n_f, 0) \\
&+ \frac{2n_a - 2n_f - 2}{N-1} \cdot \Bigg( \frac{1}{N-2} E(n_a - 1, n_f, 2) \\
&+ \frac{2n_a - 2n_f - 3}{N-2} E(n_a, n_f, 2) \\
&+ \frac{4n_f}{N-2} \cdot \min\{E(n_a, n_f, 2), E(n_a, n_f, 4)\} \Bigg) \\
&+ \frac{4n_f}{N-1} \cdot \Bigg( \frac{3}{N-2} \cdot E(n_a, n_f - 1, 2) \\
&+ \frac{N-5}{N-2} \cdot \min\{E(n_a, n_f, 2), E(n_a, n_f, 4)\} \Bigg)
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
E(n_a, n_f, 4) &= 1 \\
&+ \frac{3}{N-1} \cdot E(n_a, n_f - 1, 0) \\
&+ \frac{2n_a - 2n_f}{N-1} \cdot \Bigg( \frac{1}{N-2} \cdot E(n_a - 1, n_f, 4) \\
&+ \frac{N-3}{N-2} \cdot \min\{E(n_a, n_f, 2), E(n_a, n_f, 4)\} \Bigg) \\
&+ \frac{4n_f - 4}{N-1} \cdot \Bigg( \frac{3}{N-2} \cdot E(n_a, n_f - 1, 4) \\
&+ \frac{2n_a - 2n_f}{N-2} \cdot \min\{E(n_a, n_f, 2), E(n_a, n_f, 4)\} \\
&+ \frac{4n_f - 5}{N-2} \cdot E(n_a, n_f, 4) \Bigg)
\end{aligned} \tag{10}$$

### 4.3 最適な記憶選択

2-save と 4-save どちらが最適であるかを知るためには，$E(n_a, n_f, 2)$ と $E(n_a, n_f, 4)$ の大小関係を調べる必要があるが，代わりに後述する $E_2(n_a, n_f, 2)$ と $E_4(n_a, n_f, 4)$ の大小関係を調べれば最適な行動が求められる．

$(n_a, n_f, m)$ で $x$-save（$x \in \{2, 4\}$）を優先して行う時の所要ターン数の期待値を $E_x(n_a, n_f, m)$ と表す．$(n_a, n_f, m)$ でカードを 2 枚めくり文字が合わず，2-save と 4-save の選択肢がある時を考える．$E(n_a, n_f, 2) < E(n_a, n_f, 4)$ と仮定する．このとき，2-save を選択するのが最適．

©2022 Information Processing Society of Japan

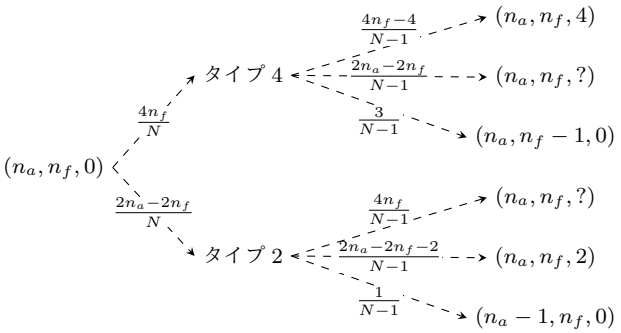


図 4: 場 $(n_a, n_f, 0)$ から遷移する場．図中のタイプ 2，タイプ 4 は 1 枚目にめくったカードのタイプを表している．また，$(n_a, n_f, ?)$ は記憶するカードを選択することにより，その後に遷移する場を $(n_a, n_f, 2)$ と $(n_a, n_f, 4)$ のどちらでも選択することができる状況を表す．

よって，$E(n_a, n_f, 2) = E_2(n_a, n_f, 2)$ かつ $E(n_a, n_f, 4) = E_2(n_a, n_f, 4)$．この時，$E_2(n_a, n_f, 2) < E_2(n_a, n_f, 4) < E_4(n_a, n_f, 4)$．対偶をとると，$E_2(n_a, n_f, 2) \geq E_4(n_a, n_f, 4)$ ならば $E(n_a, n_f, 2) \geq E(n_a, n_f, 4)$．同様にして，$E_2(n_a, n_f, 2) \leq E_4(n_a, n_f, 4)$ ならば $E(n_a, n_f, 2) \leq E(n_a, n_f, 4)$．したがって，$E_2(n_a, n_f, 2)$ と $E_4(n_a, n_f, 4)$ の大小関係を計算することにより，2-save と 4-save どちらが最適か知ることができる．

式 (9) と式 (10) より，式 (11)，式 (12) が得られる．

$$E_2(n_a, n_f, 2) = \alpha_2 + \beta_2 \tag{11}$$

$$E_4(n_a, n_f, 4) = \alpha_4 + \beta_4 \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \frac{(N-1)(N-2)}{4n_a + 12n_f - 4} \\
\beta_2 &= \frac{N-2}{4n_a + 12n_f - 4} \cdot E(n_a - 1, n_f, 0) \\
&\quad + \frac{2n_a - 2n_f - 2}{4n_a + 12n_f - 4} \cdot E(n_a - 1, n_f, 2) \\
&\quad + \frac{12n_f}{4n_a + 12n_f - 4} \cdot E(n_a, n_f - 1, 2) \\
\alpha_4 &= \frac{(N-1)(N-2)}{8n_a + 16n_f - 18} \\
\beta_4 &= \frac{3(N-2)}{8n_a + 16n_f - 18} \cdot E(n_a, n_f - 1, 0) \\
&\quad + \frac{2n_a - 2n_f}{8n_a + 16n_f - 18} \cdot E(n_a - 1, n_f, 4) \\
&\quad + \frac{12n_f - 12}{8n_a + 16n_f - 18} \cdot E(n_a, n_f - 1, 4)
\end{aligned}$$

ここで，$\alpha_2, \alpha_4$ はカードを 1 枚獲得するまでのターン数の期待値，$\beta_2, \beta_4$ はカードを 1 枚獲得して遷移する場の評価値の加重平均と考えることができる．式 (11)，式 (12) より，式 (13) が得られる．

$$E_2(n_a, n_f, 2) - E_4(n_a, n_f, 4) = (\alpha_2 - \alpha_4) - (\beta_4 - \beta_2) \tag{13}$$

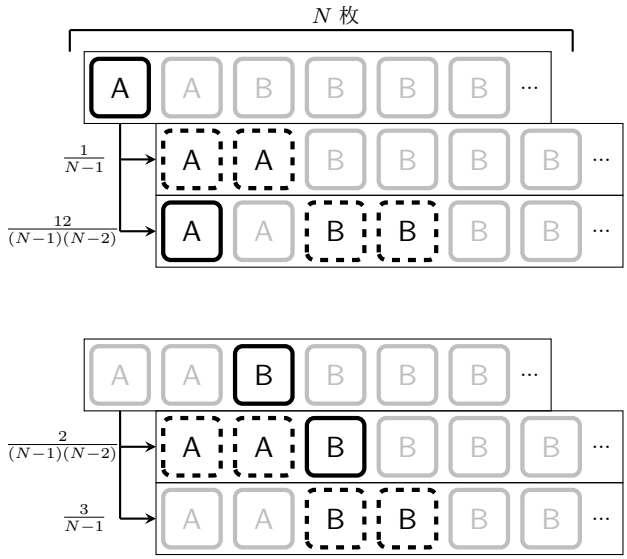


図 5: $(n_a, n_f, 2)$（上）と $(n_a, n_f, 4)$（下）．$\cdots$ の部分には A, B ではない文字が書かれているカードが並んでいる．

$(n_a, n_f, 2)$ と $(n_a, n_f, 4)$ の比較を図 5 に示す．$(n_a, n_f, 2)$ で 2-save，$(n_a, n_f, 4)$ で 4-save を行うことを考える．このとき，A と B 以外のカードを獲得する確率は等しい．A または B を獲得する確率は，$(n_a, n_f, 2)$ では $\frac{N+10}{(N-1)(N-2)}$，$(n_a, n_f, 4)$ では $\frac{3N-4}{(N-1)(N-2)}$ である．$N > 7$ であれば後者の方がカードを 1 枚獲得する確率は大きいため，$\alpha_2 - \alpha_4 > 0$ である．一方，$(n_a, n_f, 2)$ では A を獲得する確率が高く，$(n_a, n_f, 4)$ では B を獲得する確率が高い．ここで，A を獲得した場合は B が 4 枚残るのに対して，B を獲得した場合は A と B が 2 枚ずつ残ってしまうため遷移後の評価値は大きい．よって，$\beta_4 - \beta_2 > 0$ である．

まとめると，4-save はカードを 1 枚獲得するまでのターン数の期待値の点で優れており（$\alpha_2 - \alpha_4 > 0$），2-save はカードを 1 枚獲得した後に遷移する場の評価値の点で優れている（$\beta_4 - \beta_2 > 0$）．この 2 つの大小関係を調べることで，2-save と 4-save どちらが最適な行動であるかわかる．

### 4.4 実験

式 (13) をもとに各場の最適な行動を実際に計算した結果を表 5 に示す．ここで，$n_f = 0$ のときは各文字のカードが 2 枚ずつある場であり，2-save しか選択肢がない．同様に $n_a = n_f$ の場合は 4-save しか選択肢がない．表を見ると，カードが少ない場については 2-save を優先すべきであることがわかる．$n_a \geq 7$ については少なくとも $n_a \leq 30$ の全ての場について 4-save を優先すべきことが計算により確かめられた．表 6，表 7 からわかるように，始めの $n_a = 2$ については 2-save のメリット（$\beta_4 - \beta_2$）の方が大きい．しかし，$n_a = 7$ では 4-save のメリット（$\alpha_2 - \alpha_4$）の方が大きくなり，これ以降では 2-save のメリットが上回ることはないように見える．また，実際に計算した評価値を表 8,

©2022 Information Processing Society of Japan

表 5: 各場における優先すべき記憶の仕方．表中の 2 は 2-save，4 は 4-save を優先するのが最適であることを表している．最適な戦略は $m$ の値に依存しない．また．表中の（$x$）は $x$-save しか選択肢がないことを示している．

| $n_a \backslash n_f$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | (2) | (4) | | | | | | |
| 2 | (2) | 2 | (4) | | | | | |
| 3 | (2) | 2 | 2 | (4) | | | | |
| 4 | (2) | 2 | 2 | 4 | (4) | | | |
| 5 | (2) | 2 | 4 | 4 | 4 | (4) | | |
| 6 | (2) | 2 | 4 | 4 | 4 | 4 | (4) | |
| 7 | (2) | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | (4) |

表 6: $\alpha_2 - \alpha_4$

| $n_a \backslash n_f$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | −0.18 | | | | | |
| 3 | 0.19 | 0.36 | | | | |
| 4 | 0.60 | 0.66 | 0.73 | | | |
| 5 | 1.03 | 1.01 | 1.04 | 1.09 | | |
| 6 | 1.48 | 1.39 | 1.37 | 1.39 | 1.43 | |
| 7 | 1.94 | 1.78 | 1.72 | 1.72 | 1.74 | 1.77 |

表 7: $\beta_4 - \beta_2$

| $n_a \backslash n_f$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.48 | | | | | |
| 3 | 0.70 | 0.60 | | | | |
| 4 | 0.93 | 0.78 | 0.70 | | | |
| 5 | 1.21 | 1.01 | 0.91 | 0.84 | | |
| 6 | 1.51 | 1.26 | 1.13 | 1.04 | 0.98 | |
| 7 | 1.83 | 1.54 | 1.37 | 1.26 | 1.18 | 1.13 |

表 8: $m = 0$ の場の評価値

| $n_a \backslash n_f$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.00 | 2.00 | | | | | | |
| 2 | 3.00 | 4.27 | 6.03 | | | | | |
| 3 | 5.80 | 7.47 | 9.53 | 11.86 | | | | |
| 4 | 9.56 | 11.69 | 14.17 | 16.92 | 19.88 | | | |
| 5 | 14.32 | 16.93 | 19.87 | 23.01 | 26.38 | 30.00 | | |
| 6 | 20.08 | 23.18 | 26.50 | 30.04 | 33.81 | 37.84 | 42.12 | |
| 7 | 26.84 | 30.34 | 34.05 | 37.98 | 42.16 | 46.59 | 51.27 | 56.21 |

表 9，表 10 に示す．有理数で計算した結果を小数表記した．$m = 0$ と $m = 2$，$m = 0$ と $m = 4$ の評価値を比較すると差が見られるのに対し，$m = 2$ と $m = 4$ の評価値を比較するとほとんど差がなく，実はどのカードを覚えるかはあまり重要ではないことがわかる．

## 5. 結論

記憶が無制限の 2 人神経衰弱について，漸化式を用いて場における最適なめくり方と場の評価値を計算した．特に $n \geq 4$ について $(n, 1, n-1, 1)$ では 2-move が最適であることを証明した．

表 9: $m = 2$ の場の評価値．$n_a = n_f$ のときは $m = 2$ となる場は存在しない．

| $n_a \backslash n_f$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.00 | – | | | | | | |
| 2 | 2.50 | 3.63 | – | | | | | |
| 3 | 5.25 | 6.89 | 8.93 | – | | | | |
| 4 | 9.03 | 11.15 | 13.63 | 16.42 | – | | | |
| 5 | 13.79 | 16.41 | 19.36 | 22.53 | 25.93 | – | | |
| 6 | 19.56 | 22.66 | 26.00 | 29.57 | 33.37 | 37.41 | – | |
| 7 | 26.32 | 29.84 | 33.56 | 37.52 | 41.72 | 46.16 | 50.86 | – |

表 10: $m = 4$ の場の評価値．$n_f = 0$ のときは $m = 4$ となる場は存在しない．

| $n_a \backslash n_f$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | – | 2.00 | | | | | | |
| 2 | – | 4.09 | 5.59 | | | | | |
| 3 | – | 7.16 | 9.08 | 11.37 | | | | |
| 4 | – | 11.29 | 13.69 | 16.41 | 19.37 | | | |
| 5 | – | 16.47 | 19.36 | 22.49 | 25.87 | 29.50 | | |
| 6 | – | 22.67 | 25.97 | 29.51 | 33.30 | 37.33 | 41.61 | |
| 7 | – | 29.80 | 33.51 | 37.45 | 41.64 | 46.07 | 50.76 | (55.71) |

カードを 1 枚だけ記憶できる 1 人神経衰弱についても，漸化式を用いて最適な覚え方と場の評価値を計算した．2-save は記憶している文字のカードを獲得した後に評価値が小さい場に遷移するという点で優れており，4-save は記憶している文字のカードを獲得できる確率が高いという点で優れていることを述べた．カードが少ないときは 2-save のメリットが大きいため 2-save，カードが多いときは 4-save のメリットが大きいため 4-save を選択するのが最適であることがわかった．

今後の課題は，記憶が無制限の 2 人神経衰弱について最適なめくり方のより一般的な法則性を解明すること，カードを 1 枚だけ記憶できる 1 人神経衰弱について 2-save と 4-save のメリットの大小関係がカードが増えると逆転する理由について考察を深めることである．さらなる展望として，記憶できる枚数を増やした場合や，プレイヤを 2 人として記憶を制限した場合についての解析も考えられる．

### 参考文献


[1] Foerster, K.-T. and Wattenhofer, R.: The solitaire memory game, Technical report, ETH Zurich (2013).

[2] Zwick, U. and Paterson, M. S.: The memory game, *Theoretical computer science*, Vol. 110, No. 1, pp. 169–196 (1993).

[3] 篠田正人：Winning strategy of the memory game, ゲームプログラミングワークショップ 2008 論文集， Vol. 2008, No. 11, pp. 181–188 (2008).


©2022 Information Processing Society of Japan