一般化二人七並べに対する線形時間アルゴリズム

木谷　裕紀[1,a)]　末續　鴻輝[2,b)]

概要：
本稿では全国で広く遊ばれるトランプゲーム「七並べ」の解析を行う．七並べの勝利条件は「手札を全て出し切った場合に勝ち」というルールと「(全ての) 相手プレイヤが (規定回数以上の) パス (手番時に札を出さない or 出せない) を行なったら負け」の二つがあるが，著者らの過去の研究によって勝利条件を後者に限定した場合の完全解析の結果が知られている [8]．一方で両方の性質を持つゲームの現実的な時間での解析は七並べに限らず知られていない．本稿では，両方の勝利条件を含めた線形時間アルゴリズムを作成する．

Linear time algorithm for generalized 2-player Shichinarabe

Hironori kiya[1,a)]　Koki Suetsugu[2,b)]

Abstract:
In this paper, we investigate a famous card game, Shichinarabe. The winning conditions of Shichinarabe are playing out all the cards in his/her hand or forcing the opponent to pass more times than allowed. The authors have studied the case where the winning condition is restricted to the latter. On the other hand, games with both conditions as winning conditions have not been studied yet. In this paper, we show a linear time algorithm for determining which player has a winning strategy for the case where both conditions are winning conditions.

1. はじめに

二人ゲームの勝利条件には，最後の着手をしたら勝ち (正規形)，最後の着手をしたら負け (逆形)，多くの得点を獲得したほうが勝ち (得点つき)，など様々なものが存在する．このうち正規形については古くから**組合せゲーム理論**において研究され，多くの代数的な性質が見出されている [1,3]．また，逆形や得点つきについても，正規形ほどよい代数構造はないが，様々な性質を加えることでよい性質を見出そうという試みが，特に近年，活発に行われている [4]．本研究では，正規形，逆形，得点つきのいずれにも当てはまらないような勝利条件を持つトランプゲーム「七並べ」について，必勝判定法を考察する．

七並べと同じような「手札を出し切ったプレイヤが勝ち」であるようなゲームの必勝判定は「大貧民」およびそれを単純化した「単貧民」や「ババ抜き」などトランプゲームを中心にこれまで研究が進められてきた [2,5–7,9,10]．「七並べ」も，これらのゲームと同様に全国的に遊ばれるトランプゲームであり，配られた手札を規則に従って出し，最初にすべての手札を出し切ったプレイヤが勝ちとなるゲームである．七並べの勝利条件は過去の研究と同様の「手札を全て出し切った場合に勝ち」というルールのほか「(全ての) 相手プレイヤが (規定回数以上の) パス (手番時に札を出さない or 出せない) を行なったら負け」というルールがあるが，著者らの過去の研究によって勝利条件を後者に限定した場合の完全解析の結果が知られている [8]．一方で両方の性質を持つゲームの現実的な時間での解析は七並べに限らず知られていない．これは上記の勝利条件が，これまで研究されてきた正規形，逆形，得点つきのどの条件

[1] 九州大学
Kyushu university, Motooka, Fukuoka 101–0062, Japan
[2] 国立情報学研究所
National Institute of Informatics, Chiyoda, Tokyo 101–8430, Japan
[a)] h-kiya@econ.kyushu-u.ac.jp
[b)] suetsugu.koki@gmail.com

©2022 Information Processing Society of Japan

にも当てはまらず，統一的なフレームワークがないことが一つの要因であると考えられる．本稿では統一的なフレームワークの第一歩として，両方の勝利条件を含めたゲームに対する解析の事例研究となる七並べの線形時間アルゴリズムを作成する．

2. 準備（定義）

まず本研究の基礎となる k 列 (スート)n 枚で行う一般化二人七並べを先行研究に倣い以下のようにモデル化する: n 枚の札それぞれには列（スート）と値 $(0, 1, 2, \ldots, m)$ が重複なくラベル付けされ, この列と値にしたがって札の提出を行う．一般に行われる七並べはスートの長さが全て 6(1 から 6 の札と 8 から K の札に対応), スート数が 8 である．プレイヤに配布された札（**手札**と呼ぶ）の枚数は必ずしも等しくなくてよい. 札の番号は札を出すことができる場所に対応している．この設定の下, 以下の形でゲームを進める．

一般化二人七並べのルール

- 先手後手を決め, **先手プレイヤ**, **後手プレイヤ**の順に交代で, 手札から**場**に 1 枚ずつ札を出していく．各プレイヤが札を出すことのできる機会のことを**手番**と呼ぶ.
- 場は最初, 各スートに 0 の札のみ置かれている．
- 手番のプレイヤは，場にあるいずれか一つのスートについて，そのスートに属し，出ている札の値よりも真に 1 のみ大きい値の札を手札から 1 枚出すことができる．このとき, 出した札はそれまで出ていた札の上に置かれる（場に出ている札は今出した札に代わる）．この場合, 手番はもう一人のプレイヤに移る．
- いずれかのプレイヤが手番時，場に札が出せないときゲームは終了する．このとき，手札が残り 0 枚の場合は場に出せる札がないプレイヤは勝利する．手札が残っているにも関わらず，場に出せる札がないプレイヤが発生した場合，直前のプレイヤつまり最後に手札を出したプレイヤが勝ちである（場に出せる札がないプレイヤの負けとなる）．

このゲームは一般の七並べについて二人で行うようにし，パスによる脱落が 1 回目のパスで起こるようにしたうえで，列の数や最大値を一般化したゲームである．なお，パス回数の増減は本論文の主張には影響を与えない．本稿ではこの七並べにおいて札の枚数 n に対して線形時間でどちらのプレイヤが必勝戦略を持つか判定できることを示す.

2.1 七並べの解析

本解析では各スートに対し，既に場にある札と各プレイヤの手札内にある札を文字列で定義し，各文字列に対応する関数を利用して必勝戦略を持つプレイヤを計算する．二人のプレイヤを**左プレイヤ (単に左とも呼ぶ)**，**右 (単に右とも呼ぶ)** とし，左プレイヤの持ち札を L，右プレイヤの手札を R とする．

以下では各スートについて，数と L, R の文字列を用いて表す. すなわち, 既に場に出されている札は数, 場に提出されていない札, つまりプレイヤの手札内にある札は, それぞれを持っているプレイヤに応じて左が持っているなら L, 右が持っているなら R で表す．例えば, あるスートが $01LLRL$ と表された場合, 既に場に出ている札が 0 と 1 であり, 左が持っている札が $2, 3, 5$, 右が持っている札が 4 となる．このスート $01LLRL$ に対して，左が 2 の札を出すと，$012LRL$ となり，左が持っている札が $3, 5$, 右が持っている札が 4 となる．各局面について，0 の次に文字列が来るとしても，一般性を失わない．スート $012LRL$ とスート $0LRL$ は等価である．以下では 0 以外の数を省略する．

本稿では局面を分類する関数を定義し，これを用いた線形時間アルゴリズムを設計する．一列七並べの局面 X に対してある整数を対応させる関数を $f_I(X)$，集合 $\{0, L, LL, NL, R, RR, NR\}$ に属するある文字列を対応させる関数を $f_S(X)$ とする．f_I, f_S の定義は表 1 のとおりである．

X	$f_I(X)$	$f_S(X)$
0	0	0
$0L^x$	x	0
$0R^x$	$-x$	0
$0L^xR^y$	$x-1$	LL
$0R^xL^y$	$-x+1$	RR
$0R^x(LR)^yR^{z-1}$	$-x$	L
$0L^x(RL)^yL^{z-1}$	x	R
$0L^x(RL)^yR^z$	$x-1$	L
$0R^x(LR)^yL^z$	$-x+1$	R
$0L^x(RL)^yL^zRS$	x	NL
$0R^x(LR)^yR^zLS$	$-x$	NR
$0L^x(RL)^{y-1}R^{z+1}LS$	$x-1$	NL
$0R^x(LR)^{y-1}L^{z+1}RS$	$-x+1$	NR

表 1 文字列 X とそれに対応する $f_I(X), f_S(X)$ の値

ただし，L^x は L が x 枚続くことを意味する．ほかの肩付き文字も同様である．また，$x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ を満たし， S は 0 文字以上の任意の文字列とする．

このとき以下の補題が成立する．

補題 1. 全ての一列七並べの局面 X に対して，f_I, f_S が一意に定義される．

証明. 同じ文字列 X に対して異なる f_I, f_S の値が定義されないことと，任意の文字列 X に対してある f_I, f_S の値が定義されることを順に確認する．

まず，$x > 0$ であるから $X = 0$ に対して定義される $f_I(0) = 0, f_S(X) = 0$ が一意に定まる．

また，$y > 0, z > 0$ であるので $0L^x$ の値は重複して定義されない．$0L^xR^y$ も同様である．

$0L^x(RL)^yL^{z-1}$, $0L^x(RL)^yR^z$, $0L^x(RL)^yL^zRS$, $0L^x(RL)^{y-1}R^{z+1}LS$ について重複がないかを考えるが，

©2022 Information Processing Society of Japan

まず $0L^x(RL)^{y-1}R^{z+1}LS$ において $y=1$ となるある文字列 T を考える．$z>0$ よりこれは 0 のあと L が 1 文字以上続いてさらに R が 2 文字以上続くところから始まる文字列であるが，$0L^x(RL)^yL^{z-1}$, $0L^x(RL)^yR^z$, $0L^x(RL)^yL^zRS$ ではいずれも 0 のあと L が 1 文字以上続いてから，RL になる，すなわち R が 2 文字以上続かないということであり，T とは一致しない．

またそれ以外の条件についてそれぞれ見比べると，これらの文字列は 0 のあと L が 1 文字以上続き，さらに RL が 1 ペア以上続く文字列であり，その次が L が 0 文字以上続いて終わる文字列，R が 1 文字以上続いて終わる文字列，L が 1 文字以上続き，その後 R から始まる文字列が続いて終わる文字列，R が 2 文字以上続き，その後 L から始まる文字列が続いて終わる文字列となり，それぞれ重複しない．

0 の後に R から始まる文字列についても同様である．

次に，任意の文字列 X に対して値が定義されていることを示す．

$X=0$ のとき，明らかに値は定義されている．以下では $X=0LY$(Y は任意の文字列) について考える．

(1) L が $a(>0)$ 文字続き，そこで文字列が終わる場合 ：$X=0L^x$ と表せ，X に対する値は定義されている．

(2) L が $a(>0)$ 文字続き，次に R が続く場合：

(2-1)R が $b(>0)$ 文字続き，そこで文字列が終わる場合：$x=0L^xR^y$ と表せ，X に対する値は定義されている．

(2-2)R が $b(>1)$ 文字続き，さらに L から始まる文字列が続く場合：$X=0L^x(RL)^{1-1}R^{z+1}LS$ と表せ，X に対する値は定義されている．

(2-3)R が 1 文字続き，さらに L から始まる文字列が続く場合：これは，RL が 1 ペア以上続く場合と言い換えることができる．そのうえでさらに場合分けを行う．

(2-3-1)RL が $b(>0)$ ペア続き，次の文字がない，もしくは L の場合：

(2-3-1-1)L が $c(\geq 0)$ 文字続いて終わる場合：$X=0L^x(RL)^yL^{z-1}$ と表せ，X に対する値は定義されている．

(2-3-1-2)L が $c(>0)$ 文字続いたあと，R から始まる文字列が続く場合：$X=0L^x(RL)^yL^zRS$ と表せ，X に対する値は定義されている．

(2-3-2)RL が $b(>0)$ ペア続き，次の文字が R の場合：

(2-3-2-1)R が $c(>0)$ 文字続いて終わる場合：$X=0L^x(RL)^yR^z$ と表せ，X に対する値は定義されている．

(2-3-2-2)R が $c(>1)$ 文字続いたあと，L から始まる文字列が続く場合 ($c=1$ の場合は RL のペアがもう一つ増えると考えられるので，$c>1$ としてよい)：$x=0L^x(RL)^{y-1}R^{z+1}LS$ と表せ，X に対する値は定義されている．

以上により $0L$ から始まるすべての場合は尽くされた．$0R$ から始まる場合も同様である． □

組合せゲーム理論において，ゲームがいくつかの構成成分に分かれ，プレイヤはいずれかの成分を一つ選択して着手し，他の成分に影響なく，相手の手番に変わるような状況になったとき，その局面はそれぞれの構成成分の直和になっているという．

七並べの局面は単一スート局面の直和になっている．ただし，組合せゲーム理論でよく研究されているゲームの勝利条件は，どこにも打てなくなったときに最後の着手者であったプレイヤが勝者（正規形）や，どこにも打てなくなったときに最後の着手者であったプレイヤが敗者（逆形）である．一方本稿で論じている七並べの勝利条件はいずれにも当てはまらず，打てなくなり，かつ手札を使い切っていれば勝者であるが，打てなくなり，かつ手札を使い切っていなければ敗者となる．したがって，組合せゲーム理論における先行研究をそのまま援用することはできず，新たな理論構築が必要となる．

以下では文字列として与えられる単一スート局面 $X_1, X_2, \ldots, X_m$ の直和について考える．ゲーム和 $\mathcal{S}_I$ を $\mathcal{S}_I = f_I(X_1) + f_I(X_2) + \cdots + f_I(X_m)$ と定義する．

3. 主結果

本研究では，与えられた七並べの局面に対して，線形時間でどちらのプレイヤに必勝戦略があるか判定するアルゴリズムを作成する．アルゴリズムはアルゴリズム 3 のとおりである．

このアルゴリズムについて以下の定理が成立する．

定理 1. アルゴリズム 1 は線形時間で正しく動作をする．

定理 1 は以下の 6 つの補題の成立によってその成立を確かめることができる．

補題 2. 任意の i について $f_S(X_i)=0$ のとき，$\mathcal{S}_I>0$ ならば右プレイヤが，$\mathcal{S}_I<0$ ならば左プレイヤが，$\mathcal{S}_I=0$ ならば先手プレイヤが必勝戦略を持つ．

補題 3. 任意の i について $f_S(X_i)\in\{0, LL\}$ かつ，ある j について $f_S(X_j)=LL$ であるとする．このとき，左プレイヤが必勝戦略を持つ．

補題 4. 任意の i について $f_S(X_i)\in\{0, RR\}$ かつ，ある j について $f_S(X_j)=RR$ であるとする．このとき，右プレイヤが必勝戦略を持つ．

補題 5. 任意の i について $f_S(X_i)\in\{0, LL, L\}$ かつ，ある j について $f_S(X_j)=L$ であるとする．このとき，$\mathcal{S}_I\geq 0$ ならば左プレイヤが，$\mathcal{S}_I=-1$ ならば後手プレイヤが，$\mathcal{S}_I\leq -2$ ならば右プレイヤが必勝戦略を持つ．

補題 6. 任意の i について $f_S(X_i)\in\{0, RR, R\}$ かつ，ある j について $f_S(X_j)=R$ であるとする．このとき，$\mathcal{S}_I\geq 2$ ならば左プレイヤが，$\mathcal{S}_I=1$ ならば後手プレイヤが，$\mathcal{S}_I\leq 0$

©2022 Information Processing Society of Japan

アルゴリズム 1 七並べ勝者判定アルゴリズム

1: $f_I, f_S, \mathcal{S}_I$ を求める.
2: 全てのスート X_i が $f_S(X_i) = 0$ を満たすとき, $\mathcal{S}_I$ が 0 より大きいなら右プレイヤ, 0 より小さいなら左プレイヤ, 0 なら先手プレイヤを勝利プレイヤとして出力する. あるスートが $f_S(X_i) = 0$ でない場合操作 3 に進む.
3: 全てのスート X_i が $f_S(X) \in \{0, LL\}$ を満たすとき, 左プレイヤを勝利プレイヤとして出力する. あるスート X_i が $f_S(X_i) \notin \{0, LL\}$ の場合操作 4 に進む.
4: 全てのスート X_i が $f_S(X_i) \in \{0, RR\}$ を満たすとき, 右プレイヤを勝利プレイヤとして出力する. あるスート X_i が $f_S(X_i) \notin \{0, RR\}$ の場合操作 5 に進む.
5: 全てのスート X_i が $f_S(X) \in \{0, LL, L\}$ を満たすとき, $\mathcal{S}_I$ が -1 より大きいなら左プレイヤ, -1 より小さいなら右プレイヤ, -1 なら後手プレイヤを勝利プレイヤとして出力する. あるスート X_i が $f_S(X_i) \notin \{0, LL, L\}$ の場合, 操作 6 に進む.
6: 全てのスート X_i が $f_S(X) \in \{0, RR, R\}$ を満たすとき, $\mathcal{S}_I$ が 1 より小さいなら右プレイヤ, 1 より大きいなら左プレイヤ, 1 なら後手プレイヤを勝利プレイヤとして出力する. あるスート X_i が $f_S(X_i) \notin \{0, RR, R\}$ の場合, 操作 7 に進む.
7: $\mathcal{S}_I$ が 0 より大きいなら左プレイヤ, 0 より小さいなら右プレイヤ, 0 なら後手プレイヤを勝利プレイヤとして出力する.

ならば右プレイヤが必勝戦略を持つ.

補題 7. 補題 2-6 の条件に合わないとき，$\mathcal{S}_I \geq 1$ ならば左プレイヤが，$\mathcal{S}_I = 0$ ならば後手プレイヤが，$\mathcal{S}_I \leq -1$ ならば右プレイヤが必勝戦略を持つ.

4. 証明

4.1 基本的な性質

各補題を証明する前に，それぞれの証明に必要な一列七並べにおいて成り立ついくつかの性質を確認する．以下では $f_I(X)$ をスート X の値 (あるいは単にスートの値), $f_S(X)$ を X のスートの種類と呼ぶ．また，X^L を盤面 X に対して左が着手した後の盤面とする．定義より以下の観察がただちに得られる.

性質 1. 局面 X に左が着手可能であるための必要十分条件は，$f_I(X) > 0$ または $f_I(X) = 0, f_S(X) \in \{L, LL, NL\}$ である.

性質 2. 局面 X に右が着手可能であるための必要十分条件は，$f_I(X) < 0$ または $f_I(X) = 0, f_S(X) \in \{R, RR, NLR\}$ である.

性質 3. $f_I(X) > 0$ とする．このとき, $f_I(X^L) = f_I(X) - 1$ となる．また，$f_I(X) = 0$ で X に左選択肢が存在するとする．このとき，$f_I(X^L) \leq f_I(X) - 1$ となる.

性質 1-3 の証明. 左が着手可能であるためには，$0L\ldots$ となっていることが条件でこの時に限り，左は着手可能である．これらを満たす条件を $x > 0$ に留意して表 1 より探すと確かに性質 1-3 が成立することが確認できる. □

性質 4. $f_I(X) = 0, f_S(X) = NL$ とする．$f_S(X^L) = L$ となるような X^L について考える．このとき，$f_I(X^L) \leq -2$ となる.

証明. $x > 0$，補題 1 より，$f_I(X) = 0, f_S(X) = NL$ となるのは $X = 0L(RL)^{y-1}R^{z+1}LS$ が成立するときのみである．このとき，$f_S(X^L) = L$ となるのは，$y > 0$ の範囲では，$y - 1 = 0$ のときのみである．したがって，$X^L = R^{z+1}LS$．したがって，$f_I(X^L) = f_I(R^{z+1}LS)$. $z > 0$ より，$f_I(X^L) \leq -2$. □

性質 5. $f_I(X) = 0, f_S(X) = NL$ とする．$f_S(X^L) \neq L$ となるような X^L について考える．このとき，$f_S(X^L) \notin \{0, LL\}$.

証明. $x > 0$，補題 1 より，$f_I(X) = 0, f_S(X) = NL$ となるのは $X = 0L(RL)^{y-1}R^{z+1}LS$ が成立するときのみである．このとき，$f_S(X^L) = L$ となるのは，$y > 0$ の範囲では，$y - 1 = 0$ のときのみである．したがって，$X^L = R^{z+1}LS$．したがって，$f_I(X^L) = f_I(R^{z+1}LS)$. $z > 0$ より，$f_I(X^L) \leq -2$. □

以上の性質は符号を反転させることで右についても同様のことが言えることに留意されたい.

以下では，局面 $X_1, X_2, \ldots, X_m$ について，$A_+ = \{i \mid f_I(X_i) > 0\}, A_- = \{i \mid f_I(X_i) < 0\}$ と定義する．また，スートの値が正のスートの和を $\mathcal{S}_I^+ = \sum_{i \in A_+} f_I(X_i)$, スートの値が負のスートの和の絶対値を $\mathcal{S}_I^- = \sum_{i \in A_-} |f_I(X_i)|$ とする.

4.2 補題 2-7 の証明

補題 2 の証明. 任意の i について $f_S(X_i) = 0$ なので，全てのスートはある整数 n を用いて $0L^n$ あるいは $0R^n$ の形で表される.

それぞれの手番において, 相手がどの順序で手を打とうとも左は $\mathcal{S}_I^+$ 手, 右は $\mathcal{S}_I^-$ 手パスすることなく打つことが可能である. $\mathcal{S}_I^+ - \mathcal{S}_I^- > 0$ つまりゲーム和が 0 より大きいなら右プレイヤが, $\mathcal{S}_I^+ - \mathcal{S}_I^- < 0$ つまりゲーム和が 0 より小さいなら左プレイヤがより少ない手数で全ての札を出すことができるので, 勝利プレイヤである. また, ゲーム和が 0 のとき, 左も右もすべての手札を出すのに同手数かかるため, この場合, 先に出し終えることができる先手が必勝戦略を持つ. したがって補題 2 は示された. □

補題 3 の証明. $\mathcal{S}_I^+ - \mathcal{S}_I^- > 0$，または $\mathcal{S}_I^+ = \mathcal{S}_I^-$ かつ左後手のとき,

左プレイヤはスートの値が正のスートにのみ着手すると

いう戦略を取ることができる．

この戦略を取ることにより, $\mathcal{S}_I^-$ 回右プレイヤが着手した直後の局面は左プレイヤの手番であって、任意の i について $f_S(X_i) \in \{0, LL\}, f_I(X_i) \geq 0$ であり，ある j について $f_S(X_j) = LL$, ある j' について $f_I(X_{j'}) > 0$ が成り立つ．

この局面において, ある j' について，$f_I(X_{j'}) > 0$ となるので, 左は一手 $X_{j'}$ に着手することができる．左が一手 $X_{j'}$ に打った後の局面は, 任意の i について，$f_S(X_i) \in \{0, LL\}$ かつ $f_I(X_i) \geq 0$ を満たし，しかも少なくとも一つの j について，$f_S(X_j) = LL$ である．

このとき，右の手番であるが，少なくとも一つの j について，$f_S(X_j) = LL$ であるため，右は手札を出し切っておらず，かつ性質 2 より，右はこの手番に着手することができるスートが存在しない．したがって，右の負けとなる．

$\mathcal{S}_I^+ - \mathcal{S}_I^- < 0$, または $\mathcal{S}_I^+ = \mathcal{S}_I^-$ かつ左先手のとき,

$\mathcal{S}_I^+ - \mathcal{S}_I^- < 0$ で右が先手のとき，$\mathcal{S}_I^+ - \mathcal{S}_I^- < 0$ で左が先手のとき，$\mathcal{S}_I^+ = \mathcal{S}_I^-$ で左が先手のときの三通りが考えられる．いずれの場合であっても，左は値が正のスートに $\mathcal{S}_I^+$ 回着手できることが保証されている．また，この間，右は値が負の $f_S(X_i) = 0$ であるスートに着手し続けることになる．

今，左が値が正のスートに $\mathcal{S}_I^+$ 回着手し終えた局面を考える．このとき, (右プレイヤの手番であるが,) $f_I(X_i) < 0$ かつ $f_S(X_i) = 0$ のスートが一つ以上あり，右プレイヤが着手できるのはそれらのスートのみなので，右プレイヤはそのスートに着手することになる．

この着手後の局面は左プレイヤの手番であって、現時点で着手できるのは $f_S(X_i) = LL$ かつ $f_I(X_i) = 0$ を満たす一つ以上のスートであり，かつ，このようなスートすべてに着手し終えれば，その時点で手札をすべて出し切れるようになっている．

この後，左プレイヤは $f_S(X_i) = LL$ かつ $f_I(X_i) = 0$ を満たすスートに着手し続けることになるがそのどのスートにおいても「左の札は高々 1 枚でかつ，右の札は左が着手後にしか出すことができない」ため，左プレイヤはそれらの着手により，右プレイヤが全ての手札を出し終えるよりも早く札を出し終えることができる．したがって，左の勝ちである． □

補題 4 の証明. 補題 3 の証明と同様である． □

補題 5 の証明. ゲーム和の値によって 2 つに場合分けして示す. $\mathcal{S}_I^+ \geq \mathcal{S}_I^-$，または $\mathcal{S}_I^+ + 1 = \mathcal{S}_I^-$ かつ左後手のとき, いずれの場合においても，左は値が正のスートに $\mathcal{S}_I^+$ 回着手できることが保証されている．また，この間，右は値が負のスートに着手し続けることになる．今，左が値が正のスートに $\mathcal{S}_I^+$ 回着手し終えた局面を考える（これまでに右が着手できなくなった場合，左プレイヤが勝ちであることであることに留意する）．このとき，（右プレイヤの手番であるが,）$f_I(X_i) < 0$ であるスートは合わせても高々一つである．このスートが存在しないとき, 即座に右プレイヤの負けである． 存在するとき，右プレイヤが着手できるのはそれらのスートのみなので，右プレイヤはそのスートに着手することになる．

この着手後の局面は左プレイヤの手番であって、現時点で着手できるのは $f_S(X_i) \in \{L, LL\}$ かつ $f_I(X_i) = 0$ を満たす一つ以上のスートである．このとき左プレイヤが $f_S(X_i) = L$ であるスートに着手を繰り返すことによって，左プレイヤが勝つことを以下で見ていく．

左プレイヤが $f_S(X_i) = L$ であるスートに着手すると，その直後で，右が着手可能なスートはそのスートのみである．したがって，右プレイヤはそのスートに着手し返すことしかできない．これを繰り返すとある時点で任意のスートについて $f_S(X_i') = LL$ となる．ここで X_i' は成分 X_i が着手によって遷移したものとする．これは補題 2 より左必勝である．

$\mathcal{S}_I^+ + 1 = \mathcal{S}_I^-$ かつ左先手のとき, または，$\mathcal{S}_I^+ + 2 \leq \mathcal{S}_I^-$ のとき, いずれの場合においても以下のアルゴリズム 2 を取ることで右が勝つことを示す．

アルゴリズム 2 右プレイヤの必勝戦略

```
1: if f_I(X_i) = −1, f_S(X_i) = L を満たすスートが一つ以上ある then
2:     return f_I(X_i) = −1, f_S(X_i) = L を満たすスートを一つ残し，それ以外の負のスートに着手する．
3: else
4:     return 値が負のスートに着手する．
5: end if
```

左は値が 0 以上のスートにのみ着手することが可能であることと，左プレイヤが値が 0 であるスートに着手すると, 着手したスートの値が −1 以下になることに留意すると, 右プレイヤは $f_I(X_i) > 0$ を満たすスートがなくなるまで値が負のスートに着手を繰り返すことができる．

$f_I(X_i) > 0$ を満たすスートがなくなるまで繰り返したとき, ある右手番において $\mathcal{S}_I^+ = 0$ かつ, $\mathcal{S}_I^- \geq 2$ が成立する．このとき, 右は $f_I(X_i) = -1$, $f_S(X_i) = L$ を満たすスートがあれば, それを満たすスートを一つ保持したまま

$\mathcal{S}_I^- \geq 1$ となるように着手を行う．

このとき, 左プレイヤは, $f_I(X_i) = 0$, $f_S(X_i) \in \{L, LL\}$ であるスート以外には着手できない．

そのいずれのスートに着手した場合でも, 右がそのスートに着手し返すことができる．それを繰り返すことによって,$f_I(X_i) = -1$, $f_S(X_i) = L$ を満たすスートを一つ以上保持しながら $f_I(X_i) = 0$ であるスートがなくなるまで右が着手し続けることができる．

$f_I(X_i) = 0$ であるスートがなくなったとき, 左は着手不

©2022 Information Processing Society of Japan

可能で手番を迎えるが $f_I(X_i) \leq -1$, $f_S(X_i) = L$ を満たすスートが一つ以上あるため，左は手札を出し切っておらず，右の勝ちとなる．したがって題意は示された． □

補題 6 の証明． 補題 5 の証明と同様である． □

補題 7 の証明． まず，ゲーム和が負のときあるいはゲーム和が 0 で左が先手のときに右勝ちであることを示す．

$f_S(X_i) \neq 0$ となる X_i が存在するので，もし左が着手できないならば，左の負けである．この局面において，左の着手は性質 1 より，

1. $f_I(X_i) > 0$ を満たすスートへの着手
2. $f_I(X_i) = 0$ かつ $f_S(X_i) \in \{LL, L\}$ を満たすスートへの着手
3. $f_I(X_i) = 0$ かつ $f_S(X_i) = NL$ を満たすスートへの着手

の何れかである．このいずれにおいても右が勝つことを後ろ向き帰納法で示す．それぞれについて以下では確認する．

1. 左が値が正のスートに着手する場合，

ゲーム和は 0 以下なので必ず左が着手した後にスートの値が負のスートが存在する．右がそのスートに着手すると，ゲーム和が 0 以下で左が先手の局面であって，補題 2-6 の条件に当てはまらない局面となる．よって帰納法の仮定により，右が勝つ．

2. 左が $f_I(X_i) = 0$ かつ $f_S(X_i) \in \{LL, L\}$ を満たすスートに着手した場合，

そのスートの値は負になるので，右は必ずそのスートに着手でき，その結果補題 4，補題 6 の右必勝局面になるか，ゲーム和が 0 以下で左が先手の局面であって，補題 2-6 の条件に当てはまらない局面となる．よって補題 4,6 または帰納法の仮定により，右が勝つ．

3. 左が $f_I(X_i) = 0$ かつ $f_S(X_i) = NL$ を満たすスートに着手した場合， 局面は性質 3,4,5 より，以下の何れかになる．

3-1. ゲーム和が -1 以下でかつ着手したスートの種類は NR または NL または RR または R となる，

3-2. ゲーム和が -2 以下で L スートが一つは存在する局面になる．

いずれの場合も，左が着手した後にスートの値が負のスートが存在する．前者の場合，右は必ずそのスートに着手でき，その結果補題 4，補題 6 の右必勝局面になるか，ゲーム和が 0 以下で左が先手の局面であって，補題 2-6 の条件に当てはまらない局面となる．よって補題 4,6 または帰納法の仮定により，右が勝つ．

後者の場合について， NL スートが L スートに変わり，任意のスート X_i について $f_S(X_i) \in \{0, LL, L\}$ かつゲーム和が -2 以下の局面となった場合は，補題 3 の右必勝局面となる，それ以外の場合は，右が負のスートに着手することで，ゲーム和が -1 以下で左が先手の局面であって，補題 2-6 の条件に当てはまらない局面となる．よって帰納法の仮定により，右が勝つ．

同様にゲーム和が正あるいはゲーム和が 0 で右が先手のときに左勝ちであることを示すことができる．したがって補題 7 は示された． □

5. まとめと今後の展望

本研究では，七並べゲームをモデル化したうえでその線形時間アルゴリズムを作成した，本研究の結果は個別のゲームへの解析にとどまってはいるが，これらの結果は「自分の手番時に手札がなければ勝ち」かつ「手番時に札を出せないと負け」というある種の背反性を持つルールに関しての解析といえる．ほとんどの組合せゲーム理論が「最後に着手したプレイヤが勝つゲーム（正規形ゲーム）」,「最後に着手したプレイヤが負けるゲーム（逆形ゲーム）」の文脈で議論されてきたことを考えると，この背反性を持つ結果は組合せゲーム理論の新たなフレームワークになる可能性がある．もちろん，個別の問題へのアプローチのため，一般議論への拡張はいくつもの段階はあるが，その一段目として，本研究が組合せゲーム理論の発展に寄与することが期待できる．

参考文献

[1] Albert M. H., Nowakowski R. J., Wolfe D., 川辺治之訳：組合せゲーム理論　勝利の方程式， 共立出版 (2011).

[2] Erik D. Demaine, Martin L. Demaine, Ryuhei Uehara, Takeaki Uno, Yushi Uno:UNO is Hard, Even for a Single Player, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 6099 pp. 33–44(2010)

[3] Siegel A. N.: Combinatorial Game Theory, American Mathematical Society(2013).

[4] 安福智明，末續鴻輝： 組合せゲーム理論における最近のトレンド，システム/制御/情報，Vol. 65, No. 10, pp. 409–414(2021).

[5] 木谷裕紀，小野廣隆： 手札公開ババ抜きについて，ゲームプログラミングワークショップ 2018 論文集，pp. 199–203(2018).

[6] 木谷裕紀, 大渡勝己, 小野廣隆：８切りルールを含む二人単貧民の必勝判定問題, 情報処理学会研究報告, 2018-GI-40, No. 3, pp. 1-–5(2018).

[7] 木谷裕紀，大渡勝己，小野廣隆： 不完全情報二人単貧民分析のためのオラクルモデル，ゲームプログラミングワークショップ 2019 論文集，pp. 258–265(2019).

[8] 木谷 裕紀, 末續 鴻輝： 組合せゲーム理論を用いた七並べの解析，研究報告ゲーム情報学（GI）,2020-GI-43(28),pp. 1–5(2020)

[9] 大渡勝己，木谷裕紀： 負け札の残り枚数を最大化する二人単貧民の解析，ゲームプログラミングワークショップ 2020 論文集，pp. 131–138(2020).

[10] 大渡勝己，田中哲朗： 大貧民の空場におけるパスの有効性の検証，情報処理学会研究報告, 2017-GI-37，No. 11, pp.1—8(2017).

©2022 Information Processing Society of Japan