5K-05

DAGに対する幅とアルゴリズムに関する一考察

森順平 † 川原純 ‡ 湊真一 § 笠原正治 ¶
京都大学 † 京都大学 ‡ 京都大学 § 奈良先端科学技術大学院大学 ¶

1 序論

幅の小さいグラフはよく見られ，その上で何らかの計算をすることはよくある．無向グラフにおいてはパス幅 [4] や木幅 [5, 2] といった幅の指標が知られており，それぞれパスへの類似度，木への類似度を表す値である．この幅が小さいときにある種の問題を効率的に解く手法はいくつか知られている [1]．有向グラフにおいてもこのような手法は知られており，Directed-path-width [3] がその一つである．これらは非有向巡回グラフ（DAG）への類似度を表すものに近く，DAG に対する幅の指標はこれまで研究されていない．本研究の目標は幅が小さい DAG 上のある種の問題を効率的に解くことである．

本研究の貢献は二つに分けられる．一つ目として，DAG に対する幅の指標として有向パス幅を提案する．無向グラフにおけるパス幅の拡張として定義する．二つ目として，有向パス幅の小さい DAG 上の問題を効率的に解くアルゴリズムを設計する．それぞれ 3 章，4 章で説明する．

2 準備

有向グラフ D を (V, E) の組で表す．ただし，V は有限集合で $E \subset V^2$ である．$(u, v) \in E$ は頂点 u から頂点 v への辺であり，図では u から v への矢印で表す．有向グラフにおいて頂点の列 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ で，$i = 1, 2, \ldots, k-1$ について $(v_i, v_{i+1}) \in E$ が成立するものを，歩道と呼び，k を長さと呼ぶ．長さ 2 以上の歩道において $v_1 = v_k$ が成立するものを回路と呼ぶ．回路が存在しない有向グラフを DAG と呼ぶ．DAG において，歩道 $v_1, v_2, \ldots, v_k$ は有向パスと呼ばれる．

3 有向パス幅の定義

パス幅と同様に，有向パス幅は DAG パス分解から定義される．

Definition 1. $D = (V, E)$ を DAG とする．D の DAG パス分解は頂点の部分集合の列，$X = (X_1, X_2, \ldots, X_s)$ で，次の (i), (ii), (iii) の条件を満たすものである．(i) $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_s = V$．(ii) 任意の辺 $(u, v) \in E$ について続く (a), (b) のどちらかが成立する．(a) $u, v \in X_1$．(b) ある添え字 $i \geq 2$ が存在して，$u \in X_i$ かつ $u \notin X_{i-1}$ かつ $v \in X_i$．(iii) 添え字 $i, j, k (1 \leq i \leq j \leq k \leq s)$ について $X_i \cap X_k \subset X_j$．

分解 $X = (X_1, X_2, \ldots, X_s)$ に対して，X の幅 W_X を $W_X = \max_{i=1,2,\ldots,s} |X_i| - 1$ で定義する．DAG D の有向パス幅 W を D の DAG パス分解の幅の最小値と定義する．上記の (i) と (iii) の条件は無向グラフのパス幅の条件と同じものであり，(ii) の条件は有向を表す条件でパス幅の条件の拡張である．図 1 は DAG パス分解の一例である．分解 (X_1, X_2, X_3, X_4) の幅は 3 である．X_3 は $\{v_3, v_4\}$ と $\{v_4, v_5, v_6\}$ に分けるこ

On width and algorithms for directed acyclic graphs.

† Jumpei Mori, Kyoto University
‡ Jun Kawahara, Kyoto University
§ Shin-ichi Minato, Kyoto University
¶ Shoji Kasahara, Nara Institute of Science and Technology

Copyright ©2022 Information Processing Society of Japan.
All Rights Reserved.

とでより小さい分解が得られ，この DAG の有向パス幅は 2 である．

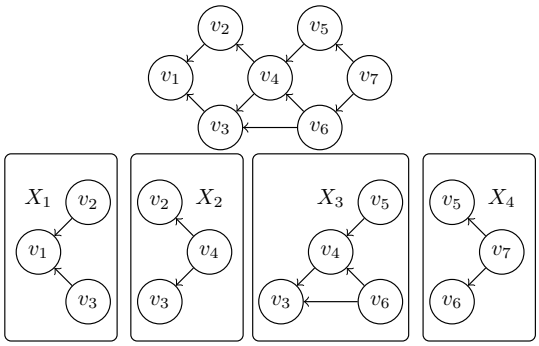

図 1　DAG パス分解の例

長さ 2 以上の有向パスのみからなる DAG の有向パス幅は 1 である．有向パス幅は直感的には 1 に近いほど有向パスに近い DAG であることを表す．

4　アルゴリズムの設計

アルゴリズムの一例について触れる．DAG $D = (V, E)$ を入力として，各頂点について到達可能な頂点数を出力する問題を考える．愚直な全探索で $O(|V||E|)$ 時間で計算することができる．これより高速な解法も知られているが，いずれも $\Omega(|V|^2)$ 時間必要である．ここで入力に DAG D に加え，幅 W の DAG パス分解 $X = (X_1, X_2, \ldots, X_s)$ が与えられるとする．このとき $O(2^W W^2 |V|)$ 時間で計算することができる．すなわち，幅 W が定数のとき頂点数に対して線形時間で計算することができる．

図 1 を用いて計算方法を説明する．例として，X_4 に含まれる v_7 について注目する．v_7 から到達できる X_1, X_2, X_3 の頂点数は X_3 と X_4 の共通部分である v_5 または v_6 を通る．これは (v_5 から到達でき，v_6 からは到達できない頂点数) + (v_5 から到達できず，v_6 からは到達できる頂点数) + (v_5 と v_6 から到達できる頂点数) によって計算できる．このアイデアを一般化すると，$i = 1, 2, \ldots, s$ と順に各 X_i とその部分集合 A について A の全ての頂点から到達でき，$X_i \setminus A$ のどの頂点からも到達できない頂点数を計算していくことで各頂点から到達可能な頂点数を計算することができる．

5　まとめ

DAG に対しての幅の提案と，その幅が小さい DAG に対して効率的に動作するアルゴリズムを提案した．今後の課題としては有向パス幅に対する性質の発見，他の問題に対するアルゴリズムの設計，無向グラフにおける木幅の拡張として有向木幅の提案などが挙げられる．

謝辞

本研究の 3 節は JSPS 科研費 JP19H01103, JP20H00605 の助成を，4 節は京都大学とトヨタ自動車の共同研究プロジェクト「モビリティ基盤数理の研究」の支援を受けている．

参考文献

[1] Arnborg, S. and Proskurowski, A.: Linear time algorithms for NP-hard problems restricted to partial k-trees, *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 23, No. 1, pp. 11–24 (1989).

[2] Halin, R.: S-functions for graphs, *Journal of Geometry*, Vol. 8, No. 1, pp. 171–186 (1976).

[3] Reed, B. A.: Tree width and tangles: a new connectivity measure and some applications, *Surveys in Combinatorics,*, pp. 87–162 (1997).

[4] Robertson, N. and Seymour, P.: Graph minors. I. Excluding a forest, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, Vol. 35, No. 1, pp. 39–61 (1983).

[5] Robertson, N. and Seymour, P.: Graph minors. III. Planar tree-width, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, Vol. 36, No. 1, pp. 49–64 (1984).

Copyright ©2022 Information Processing Society of Japan.
All Rights Reserved.