7A-01

行列の作用素の代数系と Magic Matrix 構成への応用

杉山 雅英, 西舘 陽平, 浅井信吉 (会津大)

1. まえがき 実数成分の $n \times n$ 行列の集合を $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n(\mathrm{R})$ とする．連続する整数を成分としその逆行列の成分が整数である行列 $A \in \mathcal{M}_n$ を Magic Matrix (MM)，さらに逆行列 A^{-1} の成分も連続する整数である時，完全 Magic Matrix (PMM) と定義した [1]．行列の行の交換・列の交換を行っても MM, PMM の性質は保存される．本報告では行列の左・右回転，転置，反転置などの成分の規則的な変形 (作用素) も MM, PMM の性質を保存することを示す．

2. 行列の作用素と代数系 $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n$ に対して左回転 (ℓ: left rotation)，2 回転[1] (w: double rotation)，右回転 (r: right rotation)，転置 (t: transpose)，列の反転 (v: vertical inversion)，反転置 (a: anti-transpose)、行の反転 (h: horizontal inversion) を以下のように定義する．左回転は例えば 1 行目を回転させて 1 列目に、右回転は 1 行目を n 列目に移動させる変形である．列の反転は列の左右の入れ替え，行の反転は行の上下の入れ替えである．反転置は反対角軸 $a_{1n}, \cdots, a_{n1}$ に対する転置である．変形を行う行列 A の右肩に変形の種類を記号 $1, \ell, w, r, t, v, a, h$ で書き表す．

$$A^1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, A^\ell = \begin{pmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{pmatrix},$$

$$A^w = \begin{pmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{11} \end{pmatrix}, A^r = \begin{pmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix},$$

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, A^v = \begin{pmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{11} \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{n1} \end{pmatrix},$$

$$A^a = \begin{pmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{pmatrix}, A^h = \begin{pmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

それぞれの変形は行列 A の ij 成分 a_{ij} を用いて $A^\ell = (a_{j,n+1-i})$, $A^w = (a_{n+1-i,n+1-j})$, $A^r = (a_{n+1-j,i})$, $A^t = (a_{ji})$, $A^v = (a_{i,n+1-j})$, $A^a = (a_{n+1-j,n+1-i})$, $A^h = (a_{n+1-i,j})$ と表示できる．以下では $1, \ell, w, r, t, v, a, h$ を $\mathcal{M}_n$ の作用素と呼ぶ．行列 A の作用素 λ_1, λ_2 の積 $\cdot$ を $A^{\lambda_1 \cdot \lambda_2} = (A^{\lambda_1})^{\lambda_2}$ で定義すると $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ に関して結合律 $A^{(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot \lambda_3} = A^{\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \lambda_3)}$ が成り立つ．

正 m 角形 ($m \geq 3$) の回転 R と鏡映 S を生成元とし $R_k = R^k, S_k = R^k S$ ($k = 0, 1, \cdots, m-1$) ($R^m = 1, S^2 = 1, SRS = R^{-1}$) で得られる合同変換全体の二面体群 [2] を $D_m = \{R_0, R_1, \cdots, R_{m-1}, S_0, S_1, \cdots, S_{m-1}\}$ とすると作用素 $1, \ell, w, r, t, v, a, h$ と演算 $\cdot$ の代数系は行列を正方形 (正 4 角形) と見た $m = 4$ の二面体群 D_m に一致する．ここで $R_0 = 1, R_1 = \ell, R_2 = w, R_3 = r, S_0 = t, S_1 = v, S_2 = a, S_3 = h$ である．D_4 の演算表を命題 1 に示す．作用素の個数が 8 で $R_1 \cdot S_0 = S_1 \neq S_3 = S_0 \cdot R_1$ であるので D_4 は位数 8 の非可換群である．

命題 1 (作用素の集合 D_4 の演算表)

	R_0	R_1	R_2	R_3	S_0	S_1	S_2	S_3
	1	ℓ	w	r	t	v	a	h
R_0 1	R_0	R_1	R_2	R_3	S_0	S_1	S_2	S_3
R_1 ℓ	R_1	R_2	R_3	R_0	S_1	S_2	S_3	S_0
R_2 w	R_2	R_3	R_0	R_1	S_2	S_3	S_0	S_1
R_3 r	R_3	R_0	R_1	R_2	S_3	S_0	S_1	S_2
S_0 t	S_0	S_3	S_2	S_1	R_0	R_3	R_2	R_1
S_1 v	S_1	S_0	S_3	S_2	R_1	R_0	R_3	R_2
S_2 a	S_2	S_1	S_0	S_3	R_2	R_1	R_0	R_3
S_3 h	S_3	S_2	S_1	S_0	R_3	R_2	R_1	R_0

ここで $R_i \cdot R_j = R^{i+j} = R_{i+j}, R_i \cdot S_j = R^i \cdot R^j S = S_{i+j}, S_i \cdot R_j = R^i S R^j = R^i R^{-j} S = S_{i-j}, S_i S_j = R^i S R^j S = R^i R^{-j} = R_{i-j}$ が成り立つ．ただし添字は mod. m で $0, 1, 2, 3$ とする．ここで $SR^iS = R^{-i} (i \geq 1)$ を用いた．

3. 行列の作用素と行列演算 $A, A^\lambda (\lambda \in D_4)$ の行列式の値の関係を命題 2 で，行列の積の作用素について命題 3 で述べる．$\ell (= R), t (= S)$ が D_4 の生成元であるので命題 2 は $\det(A^\ell), \det(A^t)$ の値，命題 3 は $(AB)^\ell, (AB)^t$ に帰着できる．

命題 2 (行列式の値)

$$\det(A^\lambda) = \mathrm{sgn}(\lambda) \det(A). \tag{1}$$

ただし

$$\begin{cases} \mathrm{sgn}(1) = \mathrm{sgn}(w) = \mathrm{sgn}(t) = \mathrm{sgn}(a) = 1, \\ \mathrm{sgn}(\ell) = \mathrm{sgn}(r) = \mathrm{sgn}(v) = \mathrm{sgn}(h) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}. \end{cases}$$

例えば $\det(A^\ell) = \mathrm{sgn}(\ell) \det(A)$ から $w = \ell \cdot \ell$ であるので $\det(A^w) = \det((A^\ell)^\ell) = \mathrm{sgn}(\ell) \det(A^\ell) =$

[0] Algebra of Matrix Operators Applied to Magix Matrix Generation,

†M. Sugiyama(Emeritus Professor, The Univ. of Aizu), N. Asai, Y. Nishidate (The Univ. of Aizu)

[1] 命題 1 から w は行と列の反転 (double inversion) でもある．

Copyright ©2022 Information Processing Society of Japan.
All Rights Reserved.

$\mathrm{sgn}(\ell)^2\det(A) = \det(A)$ である．反対角行列 $J_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ に対して式 (2) が成り立つ[2].

$$A^w = J_nAJ_n, A^h = J_nA, A^v = AJ_n. \tag{2}$$

従って $\det(A^v) = \det(A)\det(J_n) = \mathrm{sgn}(v)\det(A)$ である．$v = \ell \cdot t, \det(A^t) = \det(A)$ を用いて $\det(A^v) = \det((A^\ell)^t) = \det(A^\ell)$ であるので $\det(A^\ell) = \mathrm{sgn}(\ell)\det(A)$ である．

命題 3 (行列の積の作用素)

$$\begin{cases} (AB)^1 = A^1B^1 = A^vB^h, \\ (AB)^\ell = B^\ell A^t = B^aA^\ell, \\ (AB)^w = A^hB^v = A^wB^w, \\ (AB)^r = B^tA^r = B^rA^a, \\ (AB)^t = B^tA^t = B^rA^\ell, \\ (AB)^v = AB^v = A^vB^w, \\ (AB)^a = B^\ell A^r = B^aA^a, \\ (AB)^h = A^hB = A^wB^h. \end{cases} \tag{3}$$

例えば $w = \ell \cdot \ell$ であるので $(AB)^w = ((AB)^\ell)^\ell = (B^\ell A^t)^\ell = (A^t)^\ell(B^\ell)^t = A^hB^v$ である．式 (2) を用いて $(AB)^w = J_n(AB)J_n = (J_nAJ_n)(J_nBJ_n) = A^wB^w$ が導かれる．命題 3 は行列 $A_1, \cdots, A_k$ の積 $(A_1A_2\cdots A_{k-1}A_k)^\ell = A_k^\ell(A_{k-1}^t\cdots A_1^t) = (A_k^a\cdots A_2^a)A_1^\ell$ 等に一般化できる． 命題 3 から作用素と逆行列との関係が得られる．

命題 4 (作用素と逆行列の関係)

$$\begin{cases} (A^\ell)^{-1} = (A^{-1})^r, (A^r)^{-1} = (A^{-1})^\ell, \\ (A^w)^{-1} = (A^{-1})^w, \\ (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t, (A^a)^{-1} = (A^{-1})^a, \\ (A^h)^{-1} = (A^{-1})^v, (A^v)^{-1} = (A^{-1})^h. \end{cases} \tag{4}$$

$E^w = E^t = E^a = E$ であるので命題 3 から $(A^w)^{-1} = (A^{-1})^w, (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t, (A^a)^{-1} = (A^{-1})^a$．$E = E^a = (A^{-1}A)^a = A^\ell(A^{-1})^r$ から $(A^\ell)^{-1} = (A^{-1})^r$ が得られる．式 (2) から $(A^h)^{-1} = (J_nA)^{-1} = A^{-1}J_n = (A^{-1})^v$ が導ける．ℓ, t が生成元であることを用いて導くこともできる．

4. 作用素と Magic Matrix の構成

以下では行列の成分は全て整数とする．$\mathbf{GL}_n$ を n 次のユニモジュラ行列の集合，$\mathbf{MM}_n$ を n 次の Magic Matrix の集合，$\mathbf{PMM}_n$ を n 次完全 Magic Matrix の集合とする．ここでユニモジュラ行列とは A, A^{-1} が整数を成分とすることであり $\det(A) = \pm1$ と同値 [3] である．命題 2 から $\det(A^\lambda) = \pm1$ と $\det(A) = \pm1$ は同値であるので $\lambda \in D_4$ は $\mathbf{GL}_n$ を保存する．$A \in \mathbf{MM}_n$ は $A \in \mathbf{GL}_n$ かつ A の成分は連続した整数である．この時 $A^\lambda \in \mathbf{GL}_n$ であり A の成分が連続した整数であれば A^λ の成分も連続した整数であるので $\mathbf{MM}_n$ も保存する．$A \in \mathbf{PMM}_n$ と $A, A^{-1} \in \mathbf{MM}_n$ は同値であり，命題 4 から $A, A^{-1} \in \mathbf{MM}_n$ と $A^\lambda, (A^\lambda)^{-1} \in \mathbf{MM}_n$ が同値であることが導かれる．

命題 5 (性質の保存)
$\lambda \in D_4$ に対して

$$\begin{cases} A \in \mathbf{GL}_n \Leftrightarrow A^\lambda \in \mathbf{GL}_n \\ A \in \mathbf{MM}_n \Leftrightarrow A^\lambda \in \mathbf{MM}_n \\ A \in \mathbf{PMM}_n \Leftrightarrow A^\lambda \in \mathbf{PMM}_n \end{cases} \tag{5}$$

$A \in \mathbf{MM}_n$ を初項 a の MM とすると $A^\lambda(\lambda \in D_4)$ も初項 a の MM である． 一方 $-A$ は初項 $-a-(n^2-1)$ の A とは異なる初項を持つ MM であり，$A \in \mathbf{MM}_n$ に対して $-A \in \mathbf{MM}_n$ を双対の MM と呼ぶ．$(-A)^\lambda = -A^\lambda$ も初項 $-a-(n^2-1)a$ の MM である． MM 行列 A の標準形[3] $\bar{A}$ の行列式は初項 a の一次式 $\det(\bar{A}) = c_1a + c_2$ で表される [1]．λ による 11 成分の位置に応じた符号 $(-1)^k$ ($\lambda = \ell, r, v, h$ の時 $k = n+1$, それ以外 $k = 0$) を用いて $\det(\bar{A^\lambda}) = (-1)^k\mathrm{sgn}(\lambda)(c_1a + c_2)$ と表されるので命題 6 を得る．

命題 6 ($\mathbf{MM}_n$ の型保存)
$\lambda \in D_4$ は Magic Matrix の３つの型 (無限型，双子型，単独型) を保存する．

命題 7 ($\mathbf{PMM}_2$ の特徴付け)

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{PMM}_2$$

は $A_1 = -A_2^h$ で双対で $A_1^{-1} = A_1, A_2^{-1} = A_2^w$．

行列 A_1 は冪単行列で固有値は ±1 であり，A_2 は反直交行列である[4]．

5. むすび

本報告では行列の作用素を定義し，Magic Matrix 構成への応用について述べた．今後の検討課題は以下の通りである．

1. Magic Matrix $\mathbf{MM}_n(n \geq 4)$ の構成
2. 完全 Magic Matrix $\mathbf{PMM}_n(n \geq 3)$ の構成
3. 複素整数への拡張

参考文献

[1] 杉山, 西舘, Magic Matrix の提案とその性質, 情報処理学会, 6B-03 (2021-03).
[2] 渡辺敬一, 草場公邦, 代数の世界, 朝倉書店. (p.187-188)
[3] 斎藤正彦, 線形代数入門, 東京大学出版会. (p.46-47, p.91)

[2] E を単位行列する．$J_n^\ell = J_n^r = E, J_n^2 = E, E^\ell = E^r = J_n, \det(J_n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ が成り立つ．

[3] 1, 1 成分が数列の初項 a に一致しさらに 1 行 1 列を除いて k_{nn} が最大要素かつ $k_{1n} < k_{n1}$ となる MM 行列の変形を標準形と呼ぶ．

[4] $AA = A^2 = E$ を満たす行列を冪単行列，$AA^w = A^wA = E$ を満たす行列を反直交行列と呼ぶ．

Copyright ©2022 Information Processing Society of Japan.
All Rights Reserved.