Vol.2022-MPS-139 No.3
2022/7/26

不良条件問題を解くためのLSMR法におけるDQDS法を用いたcondition L-curveの高速計算について

久保井 五貴[1]　田中 利佳[1]　小澤 伸也[1,a)]　細田 陽介[1]　髙田 雅美[2,b)]　木村 欣司[1,c)]
中村 佳正[3,d)]

概要：大次元疎行列を係数に持つ不良条件の線形方程式に対して，反復解法の 1 つである LSMR 法を適用する．左辺の行列と右辺のベクトルに含まれるノイズが小さくとも，不良条件の線形方程式の近似解は大きく変化する可能性がある． 反復解法を用いる場合，ノイズの影響を少なくするために，適切な回数で反復計算を停止する必要がある．本論文では，反復停止則として機能する，相対残差ノルムと 2 重対角行列の条件数を組み合わせる condition L-curve の高速計算法を提案する．条件数の計算には，特異値計算のための DQDS 法を採用し，DQDS 法が，2 分法よりも高速であることを検証する．

On a fast computation of the condition L-curve in the LSMR method for solving ill-conditioned problems using the DQDS method

1. はじめに

大次元疎行列を係数に持つ不良条件の線形方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に対し，反復解法の 1 つである LSMR 法 [4] の適用を考察する．A と $\boldsymbol{b}$ に含まれるノイズが小さい場合でも，不良条件の方程式の近似解は大きく変化することがある．反復解法を用いる場合，ノイズの影響を軽減するために，反復計算を途中で終了させる．したがって，このような問題に対して LSMR 法を考える場合，適切な回数で反復計算を停止する必要がある．

本論文では，ぼやけ画像鮮明化問題における相対残差ノルムと 2 重対角行列の条件数を組み合わせた反復停止則を与える condition L-curve の高速計算法を提案する．2 重対角行列の条件数の計算は並列化できないため，LSMR 法を高速化するためには，条件数計算のための演算数を減らすことが重要である．2 重対角行列の条件数の計算には，標準的には 2 分法が用いる．本論文では，2 重対角行列の条件数の計算に DQDS 法 [3] を採用し，DQDS 法が 2 分法より高速であることを示す．収束次数解析において，2 分法は線形収束の性質を持つ一方で，DQDS 法は 3 次収束の性質を持つ [1] ことを注意する．

[1] 福井大学
University of Fukui, Fukui, Fukui 910–8507, JAPAN
[2] 奈良女子大学
Nara Women's University, Nara, Nara 630–8506, JAPAN
[3] 大阪成蹊大学
Osaka Seikei University, Higashiyodogawa-ku, Osaka 533–0007, JAPAN
a) ozawa_s@u-fukui.ac.jp
b) takata@ics.nara-wu.ac.jp
c) kkimur@u-fukui.ac.jp
d) nakamura-yo@osaka-seikei.ac.jp

2. 問題設定

線形方程式の解法によるぼやけ画像鮮明化の方法を述べる．元画像と PSF 行列 (the matrix of the point spread function) のコンボリューション $\otimes$ からなる次の式

$$\text{original image} \otimes \text{PSF matrix} = \text{blurred image} \tag{1}$$

を線形方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{2}$$

で定式化することにより，コンボリューション行列 A とぼやけ画像 $\boldsymbol{b}$ から鮮明化された画像 $\boldsymbol{x}$ を得る．実アプリケーションでは，PSF は，元画像の位置に依存して変化する．結果として，ぼやけ画像鮮明化を，高速フーリエ変換を用いて行うことはできない．ゆえに，式 (1) を不良条件の連立方程式 (2) として解く必要がある．ここで，$\boldsymbol{b}$ の観測精度はデジタルカメラの解像度程度であることが多い．本論

文では，実アプリケーションで現れる行列を良く模倣する行列を式 (2) の A として採用する．

3. LSMR 法

3.1 LSMR 法の概要

LSMR 法は, the least square minimum-residual method の略語であり，近年，注目を集めている反復解法である．線形方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の左辺の行列 A と右辺のベクトル $\boldsymbol{b}$ に小さなノイズが含まれている場合には，正規方程式

$$A^\top A\boldsymbol{x}=A^\top\boldsymbol{b} \tag{3}$$

を考えることで，データとノイズを分離する．LSMR 法は，正規方程式 (3) を MINRES 法によって解くことを背景に持つ解法である．両者の違いは，MINRES 法は 3 重対角行列を経由し解に至るのに対して，LSMR は 2 重対角行列を経由する．

3.2 LSMR 法の詳細

LSMR 法では，線形方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ のクリロフ部分空間 $\mathcal{S}_k=\mathrm{span}\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_k\}$ に対して，最小 2 乗問題 $\min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{S}_k}||A^T(A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})||_2^2=\min_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{S}_k}||A^\top A\boldsymbol{x}-A^\top\boldsymbol{b}||_2^2$ を解く．LSMR 法は，次の 3 つの部分で構成されている．

(1) Golub–Kahan–Lanczos 過程による行列二重対角化

(2) 2 回の QR 分解

上の演算は，停止条件が満たされるまで繰り返される．LSMR 法では，それぞれの k において，以下の下 2 重対角行列 B_k が生成される．

$$\begin{cases} AV_k=U_kB_k \\ A^\top U_k=V_kB_k^\top+\beta v_{k+1}\boldsymbol{e}_k^\top \end{cases}, \tag{4}$$

$$B_k=\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \beta_k & \alpha_k \\ 0 & \cdots & 0 & \beta_{k+1} \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(k+1)\times k}, \tag{5}$$

$$\beta_j\neq 0 \quad (j=1,\ldots,k+1). \tag{6}$$

この方法は，係数行列として 2 重対角行列の小さいサイズの最小 2 乗問題

$$\min_{\boldsymbol{y}_k\in\mathbb{R}^k}\left|\left|\begin{pmatrix} B_k^\top B_k \\ \alpha_{k+1}\beta_{k+1}\boldsymbol{e}_k^\top \end{pmatrix}\boldsymbol{y}_k-\alpha_1\beta_1\boldsymbol{e}_1\right|\right|^2 \tag{7}$$

を連続的に解くことによって，近似解の列を生成する．式 (7) の解 $\boldsymbol{y}_k$ を利用することで，元の問題の最小 2 乗解 $\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}_0+V_k\boldsymbol{y}_k$ を計算できる．行列 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ に対する LSMR 法のアルゴリズムを Algorithm 1 に記載する．

Algorithm 1 LSMR method

Initial Setup
$\beta_1\boldsymbol{u}_1:=\boldsymbol{b},\alpha_1\boldsymbol{v}_1:=A^\top\boldsymbol{u}_1,\overline{\alpha}_1:=\alpha_1,\overline{\zeta}_1:=\alpha_1\beta_1,\rho_0:=1,$
$\overline{\rho}_0:=1,\overline{c}_0:=1,\overline{s}_0:=0,\boldsymbol{h}_1:=\boldsymbol{v}_1,\overline{\boldsymbol{h}}_0:=0,$
$\boldsymbol{x}_0:=\boldsymbol{0}\in\mathbb{R}^n,k:=0$
Compute procedure
while $k<kmax$ **do**
  $k:=k+1$
  Golub-Kahan-Lanczos procedure
  $\beta_{k+1}\boldsymbol{u}_{k+1}:=A\boldsymbol{v}_k-\alpha_k\boldsymbol{u}_k$
  $\alpha_{k+1}\boldsymbol{v}_{k+1}:=A^\top\boldsymbol{u}_{k+1}-\beta_{k+1}\boldsymbol{v}_k$
  QR–decomposition(1)
  $\rho_k:=\sqrt{\overline{\rho}_k^2+\beta_{k+1}^2}$
  $c_k:=\frac{\overline{\alpha}_k}{\rho_k}$
  $s_k:=\frac{\beta_{k+1}}{\rho_k}$
  $\theta_{k+1}:=s_k\alpha_{k+1}$
  $\overline{\alpha}_{k+1}:=c_k\alpha_{k+1}$
  QR–decomposition(2)
  $\overline{\theta}_k:=\overline{s}_{k-1}\rho_k$
  $\overline{\rho}_k:=\sqrt{(\overline{c}_{k-1}\rho_k)^2+\theta_{k+1}^2}$
  $\overline{c}_k:=\frac{\overline{c}_{k-1}\rho_k}{\overline{\rho}_k}$
  $\overline{s}_k:=\frac{\theta_{k+1}}{\overline{\rho}_k}$
  $\zeta_k:=\overline{c}_k\overline{\zeta}_k$
  $\overline{\zeta}_{k+1}:=-\overline{s}_k\overline{\zeta}_k$
  Update for $\overline{\boldsymbol{h}}_k,\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{h}_{k+1}$
  $\overline{\boldsymbol{h}}_k:=\boldsymbol{h}_k-\frac{\overline{\theta}_k\rho_k}{\rho_{k-1}\overline{\rho}_{k-1}}\overline{\boldsymbol{h}}_{k-1}$
  $\boldsymbol{x}_k:=\boldsymbol{x}_{k-1}+\frac{\zeta_k}{\rho_k\overline{\rho}_k}\boldsymbol{h}_k$
  $\boldsymbol{h}_{k+1}:=\boldsymbol{v}_{k+1}-\frac{\theta_{k+1}}{\rho_k}\boldsymbol{h}_k$
end while

4. 特異値を計算するための 2 分法

行列乗算は条件数を増加させるため，$B_k^\top B_k$ に 2 分法を適用することは推奨されていない．そこで，行列 B_k の特異値を計算するために次の行列 P_k に 2 分法を適用する．

$$P_k=\begin{pmatrix} 0 & \rho_1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \rho_1 & \ddots & \theta_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \theta_2 & \ddots & \rho_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \rho_2 & \ddots & \theta_3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \theta_3 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \theta_k & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \theta_k & \ddots & \rho_k \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \rho_k & 0 \end{pmatrix},$$

ここで，$\rho_j(j=1,\ldots,k)$ と $\theta_j(j=2,\ldots,k)$ は，6.1 節の $\hat{B}_k^{(0)}$ より与えられる．行列 P_k の固有値 $\lambda_j(P_k)$ は，行列 B_k の特異値 $\sigma_j(B_k)$ に等しいため，式 $\lambda_j(P_k)=\pm\sigma_j(B_k)\quad\text{for}\quad j=1,\ldots,k$ が成立する．

Vol.2022-MPS-139 No.3
2022/7/26

Algorithm 2 DQDS method

Set $d_1 := q_1 - s$;
for $j := 1, 2, \ldots, k-1$ **do**
  Set $\hat{q}_j := d_j + e_j$;
  if SAFMIN $\times \hat{q}_j < q_{j+1}$ and SAFMIN $\times q_{j+1} < \hat{q}_j$ **then**
    Set $\hat{e}_j := (q_{j+1}/\hat{q}_j)\, e_j$;
    Set $d_{j+1} := (q_{j+1}/\hat{q}_j)\, d_j - s$;
  else
    Set $\hat{e}_j := (e_j/\hat{q}_j)\, q_{j+1}$;
    Set $d_{j+1} := (d_j/\hat{q}_j)\, q_{j+1} - s$;
  end if
end for
Set $\hat{q}_k := d_k$;

5. 特異値を計算するための DQDS 法

5.1 DQDS 法の概要

$k \times k$ の上 2 重対角行列 B を考える:

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{q_1} & \sqrt{e_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{q_2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \sqrt{e_{k-1}} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \sqrt{q_k} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

ここで，$\sqrt{q_j} = \rho_j (j = 1, \ldots, k)$ と $\sqrt{e_j} = \theta_{j+1} (j = 1, \ldots, k-1)$ は，Sec.6.1 において与えられる．$\rho_j (j = 1, \ldots, k)$ と $\theta_{j+1} (j = 1, \ldots, k-1)$ は，非負の値である．DQDS 法を用いることで，上 2 重対角行列 B は次の $k \times k$ の上 2 重対角 $\hat{B}$ に変換される．

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} \sqrt{\hat{q}_1} & \sqrt{\hat{e}_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\hat{q}_2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \sqrt{\hat{e}_{k-1}} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \sqrt{\hat{q}_k} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

ここで，$\sqrt{\hat{q}_j}$ と $\sqrt{\hat{e}_j}$ は，DQDS 法によって得られる値である．Algorithm 2 により，DQDS 法を提示する．ここで，値 s はシフト量を表し，SAFMIN は 1/SAFMIN がオーバーフローしない安全な最小の値を表す．$\Sigma = (\Sigma_{ij})$ を特異値が降順に並ぶ対角行列とする．DQDS 法において上の操作を繰り返すと，$\hat{B}$ は対角行列 $D = (D_{ij})$ に収束する．そのとき，$\Sigma_{jj} = \sqrt{D_{jj}^2 + S}\ (j = 1, \ldots, k)$ の関係が成立する．ここで，S はシフト量 s の値の総和を表す．

DQDS 法において，すべての値は非負の値であり，d_j は $d_j > 0\ \ (j = 1, \ldots, k-1)$ を満たす．いま，$d_j = 0$ であれば，$s > 0$ であるため $d_{j+1} < 0$ となり DQDS 法の反復は失敗する．しかし，$\hat{q}_k = d_k = 0$ の場合には，DQDS 法の１反復は問題なく終了できたことになる．ゆえに，シフト量 s は，行列 $B^\top B$ の最小固有値 $\lambda_{\min}\left(B^\top B\right)$ より小さいか等しい値に設定しなければならない．

6. Condition L-curve

これ以降，行列 X の最大特異値を $\sigma_{\max}(X)$ で表し，最小特異値を $\sigma_{\min}(X)$ で表す．行列 B_k の条件数 $\kappa(B_k)$ を次に定義する．$\kappa(B_k) = \sigma_{\max}(B_k)/\sigma_{\min}(B_k)$．condition L-curve [2][8] は，xy 平面上に $x = \frac{\kappa(B_k)}{\alpha}$ と $y = \frac{||A^\top(A\boldsymbol{x_k} - \boldsymbol{b})||}{||A^\top \boldsymbol{b}||} = \frac{|\bar{\zeta}_{k+1}|}{||A^\top \boldsymbol{b}||}$ の点を連結してできる曲線として得られる．y は，相対残差ノルムを表す．condition L-curve はコーナーを持ち，不良条件問題においては L 型となる．LSMR 法によって生成されるクリロフ部分空間は，相対残差ノルムの値を小さくすることに貢献する．$\kappa(B_k)$ は，単調に増加する．ゆえに，コーナーに到達するまでは，A と $\boldsymbol{b}$ の情報を利用して，相対残差ノルムの値を小さくする過程にあるが，コーナー到達後は，A と $\boldsymbol{b}$ のノイズを拾い出す状態へと移行する．そのため，コーナーとなっている点がノイズの効果を低減する意味で最良の停止位置となる．condition L-curve の最良の停止位置 k_0 は次の式 (10) により計算される．

$$k_0 \equiv \arg\min_k \sqrt{F_k^2 + G_k^2}, \tag{10}$$

$$F_k = \frac{||A^\top(A\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{b})||}{||A^\top \boldsymbol{b}||} = \frac{|\bar{\zeta}_{k+1}|}{||A^\top \boldsymbol{b}||}, G_k = \frac{\kappa(B_k)}{\alpha}. \tag{11}$$

ここで，α は過学習の許容度を制御し本論文では固定する．本論文では，DQDS を用いた条件数 $\kappa(B_k)$ の高速な計算法を提案する．

6.1 条件数の高速計算

DQDS 法は，原点シフトによって収束を加速し，高速な特異値計算を達成できる方法である．計算途中で行列 B_k の分割が起きなければ，DQDS 法は行列 B_k の特異値を降順で計算できる．ゆえに，途中で計算を打ち切れば行列 B_k の最小特異値のみを計算可能である．最小特異値を得る過程を式 (12)(13) により示す．

$$B_k \overset{\text{QR 分解}}{=} Q\hat{B}_k^{(0)}, \quad \hat{B}_k^{(0)} \overset{\text{DQDS 法}}{\Longrightarrow} \hat{B}_k^{(M)}, \tag{12}$$

$$\hat{B}_k^{(0)} = \begin{pmatrix} \rho_1 & \theta_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \theta_{k-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \rho_{k-1} & \theta_k \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \rho_k \end{pmatrix}. \tag{13}$$

ここで，$\hat{B}_k^{(0)}$ は DQDS 法の入力行列である．ε を計算機イプシロンとすると，最小特異値はつぎの 2 つの条件のどちらかが満たされた場合に $\sqrt{\sum_{i=0}^{M-1}\left(s^{(i)}\right) + q_k^{(M)}}$ は最小特異値を与える．

6.2 収束判定条件 (I)

(1) $e_j^{(M)} \neq 0 \quad \text{for} \quad j = 1, \ldots, k-1$

(2) $e_{k-1}^{(M)} \leq (100\varepsilon)^2 \left(\sum_{i=0}^{M-1} s^{(i)}\right)$

(3) $\sqrt{\sum_{i=0}^{M-1} s^{(i)}} = \sqrt{\sum_{i=0}^{M-1} \left(s^{(i)}\right) + q_k^{(M)}}$

6.3 収束判定条件 (II)

(1) $e_j^{(M)} \neq 0 \quad \text{for} \quad j = 1, \ldots, k-1$

(2) $e_{k-1}^{(M)} \leq (100\varepsilon)^2 \left(\sum_{i=0}^{M-1} s^{(i)}\right)$

(3) $q_k^{(M)} \leq \left(\sigma_{\min}\left(\hat{B}_k^{(M)}(1:k-1, 1:k-1)\right) \text{の下界}\right)^2$

ここで，$\hat{B}_k^{(M)}(1:k-1, 1:k-1)$ は $\hat{B}_k^{(M)}$ より第 k 行と第 k 列を除いた行列である．

6.4 最大特異値の計算を最小特異値の計算に帰着させる方法

行列 $\hat{B}_k^{(0)}$ の最大特異値 u_k の上界 τ_k を準備する．本論文では，$\hat{B}_k^{(0)}\left(\hat{B}_k^{(0)}\right)^\top$ に対して，τ_k^2 の計算をするためにグルシュゴリンの定理 [5] を利用する．τ_k^2 から平方根を用いて τ_k を容易に計算できる．行列 $\hat{B}_k^{(0)}$ の特異値計算は，すべての固有値が非正の $-\hat{B}_k^{(0)}\left(\hat{B}_k^{(0)}\right)^\top$ の固有値計算とも解釈できる．τ_k は既に得ているため，すべての固有値が非負である $W_k = -\hat{B}_k^{(0)}\left(\hat{B}_k^{(0)}\right)^\top + \tau_k^2 I$ を考えることができる．通常のコレスキー分解は，すべての対角成分が正になることを要求するが，Algorithm 3 の ζ_1 は 0 以上を許容するように修正する．それは，t_1 に対する条件でもある．ここでは，非負の固有値を持つ 3 重対角行列 W_k に対する分解 $C_k^{(0)}\left(C_k^{(0)}\right)^\top = W_k$ を修正されたコレスキー分解と呼ぶことにする．ただし，$C_k^{(0)}$ の定義は，次のようになる．

$$C_k^{(0)} = \begin{pmatrix} \zeta_1 & \eta_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \eta_k \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \zeta_k \end{pmatrix}. \tag{14}$$

以上の議論より，行列 $\hat{B}_k^{(0)}$ の最大特異値 u_k の計算を $C_k^{(0)}$ の最小特異値 ℓ_k の計算に帰着できる．DQDS 法により，行列 $C_k^{(0)}$ の ℓ_k を得る．u_k は, 次の式 $u_k = \sqrt{\tau_k + \ell_k}\sqrt{\tau_k - \ell_k}$ により得られる．Algorithm 3 は，修正されたコレスキー分解を示す．

7. 分離定理による DQDS 法と 2 分法の高速化

行列 $\hat{B}_k^{(0)}$ に対して分離定理 [6] を導入する．

$$0 < \sigma_{\min}(\hat{B}_k^{(0)}) < \sigma_{\min}(\hat{B}_{k-1}^{(0)}), \tag{15}$$

$$\sigma_{\max}(\hat{B}_{k-1}^{(0)}) < \sigma_{\max}(\hat{B}_k^{(0)}) \leq \tau_k. \tag{16}$$

Algorithm 3 The modified Cholesky decomposition

Set $\omega := 1$;
for $j := k, k-1, \ldots, 2$ **do**
  Set $t_j := \tau_k \times \omega - \rho_j$;
  Set $\zeta_j := \sqrt{t_j} \times \sqrt{\tau_k \times \omega + \rho_j}$;
  Set $\xi := \theta_j / \zeta_j$;
  Set $\eta_j := \rho_j \times \xi$;
  Set $s_j := 1 - \omega \times \xi$;
  Set $\omega := \sqrt{s_j} \times \sqrt{1 + \omega \times \xi}$;
end for
Set $t_1 := \tau_k \times \omega - \rho_1$;
Set $\zeta_1 := \sqrt{t_1} \times \sqrt{\tau_k \times \omega + \rho_1}$;

上の定理を利用して最大特異値と最小特異値の探索範囲を制限し，行列 P_k に対する 2 分法を高速化する．$\tau_k = \sigma_{\max}(\hat{B}_{k-1}^{(0)})$ を採用する修正されたコレスキー分解において，$t_j\ (j = 1, \ldots, k)$ と $s_j\ (j = 2, \ldots, k)$ が非負の値であれば，$\tau_k = \sigma_{\max}(\hat{B}_{k-1}^{(0)})$ を $\sigma_{\max}(\hat{B}_k^{(0)})$ と見做すことができる．以上のことは，数学的には成立しないが数値計算の終盤では成立する．その場合には，DQDS 法と 2 分法の両方を高速化できる．

7.1 最大特異値の他の上界

$\tau_k = \sigma_{\max}(\hat{B}_{k-1}^{(0)})$ において Algorithm 3 を実行したとき，修正されたコレスキー分解の中の変数 $t_j\ (j = 2, \ldots, k)$ と $s_j\ (j = 2, \ldots, k)$ が非負の値で，t_1 が負の値であるならば，行列 $\hat{B}_k^{(0)}$ の最大特異値 u_k の他の上界を次のように計算できる．

$$\hat{\tau}_k = \sqrt{(\tau_k)^2 + \left(\sqrt{-t_1} \times \sqrt{\tau_k \times \omega + \rho_1}\right)^2}. \tag{17}$$

式 (17) は，LAPACK [7] の関数 `DLARTG` により実装される．

参考文献

[1] K. Aishima, T. Matsuo, and K. Murota. *Rigorous proof of cubic convergence for the dqds algorithm for singular values.* Japan J. Indust. Appl. Math. , Vol.25, pp.63–81, 2008.

[2] D. Calvetti, B. Lewis, and L. Reichel. *GMRES, L-Curves, and Discrete Ill-Posed Problems*, BIT Numerical Mathematics, Vol.42, No.1, pp. 44–65, 2002.

[3] K. V. Fernando and B. N. Parlett. *Accurate singular values and differential qd algorithms.* Numer. Math., Vol.67, pp.191–229, 1994.

[4] D.C.-L. Fong and M.A. Saunders. *LSMR: An iterative algorithm for sparse least-squares problems.* SIAM J. Sci. Comput. 33:5, pp.2950–2971, 2011.

[5] S. Gerschgorin. *Über die Abgrenzung der Eigenwerteeiner Matrix.* Izv. Akad.Nauk. USSR Otd. Fiz.-Mat. Nauk, Vol. 7, pp. 749–754, 1931.

[6] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix Analysis.* Cambridge University Press, 1985.

[7] LAPACK-Linear Algebra PACKage [online]. `http://www.netlib.org/lapack/`

[8] L. Reichel and G. Rodriguez, *Old and new parameter choice rules for Discrete ill-posed problems*, Number.Algorithms, Vol.63, No.1, pp. 65–87, 2013.