4R-02

# 強相関論理に基づく前向き推論を用いた自動定理発見法の項書き換え処理による改善

高島　望†　　後藤　祐一‡

埼玉大学†　　理工学研究科数理電子情報系専攻‡

## 1. はじめに

自動定理発見問題は自動定理発見の一般的な方法を求めるという問題である[6]. 自動定理発見問題を解決するために強相関論理に基づく前向き推論を用いた自動定理発見法が提案された[2].

提案手法に基づき, 公理的集合論の一種である NBG 集合論による自動定理発見の試行が行われ, いくつかの既知の定理を再発見することができた[3]. 再発見とは提案手法で既知の定理が導出されることである. 一方, 提案手法で再発見できていない既知の定理があり, それらの既知の定理を再発見するために提案手法を改善する必要がある.

本研究では項の書き換え処理を自動定理発見手法に追加した. そして新たに既知の定理の再発見を行うことができた.

## 2. 前向き推論を用いた自動定理発見法

自動定理発見問題を解決するために, 強相関論理に基づく前向き推論を用いた自動定理発見法が提案され, 研究されている[3].

強相関論理とは古典論理で生じるパラドクスを持たない論理体系であり, 推論を行うことに適した論理体系である[1]. 前向き推論とは, 与えられた前提(既知の事実あるいは仮定) に推論規則を適応して未知の新しい結論を導出する仮定のことである.

前向き推論を用いた自動定理発見法は, 論理定理の準備, 経験前提の準備, 前向き推論, 抽象化, 定理候補の抽出の 5 個のフェーズから構成されている[5]. 前向き推論を用いた自動定理発見法の流れを図 1 に示す.

初めに論理定理の準備のフェーズで初めに実行者が自動定理発見の論理的基礎である強相関論理を論理定理として選択する.

次に経験前提のフェーズで対象分野における定理と公理を収集し, 収集された経験前提を使用して自動定理発見を実行するための計画を立てる.

その後前向き推論のフェーズで前向き推論エンジン FreeEnCal[2] を使用して, 経験前提に前向き推論を行う. 前向き推論エンジンとは推論規則, 前提となる論理式の集合, 処理の終了条件を入力として受け取り, 終了条件を満たすまで, 前提及び, 前提から導出される論理式に推論規則を繰り返し適用し続けるプログラムである.

最後に, 抽象化のフェーズで経験定理を抽象化し, 定理候補のフェーズで経験定理から新しくない定理, 面白くない定理を削除し, 残りの定理を新しく面白い定理として提供する. 新しく面白い定理が発見された場合, 自動定理発見は成功で, 発見されなかった場合, 論理定理と経験前提を変更し, 自動定理発見を続ける[5].

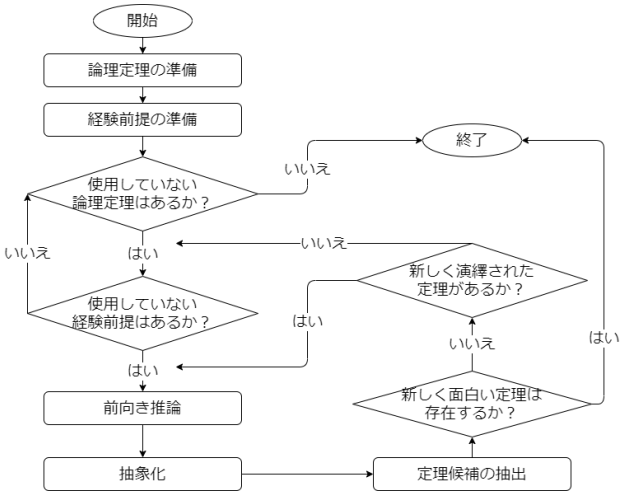


図 1：前向き推論を用いた自動定理発見法の流れ

## 3. 現在の自動定理発見法の問題点

NGB 集合論の既知の定理 429 個は、論理式中に登場する連言, 含意, 否定の 3 種類の論理結

Improvement of automated theorem finding with forward reasoning based on strong relevant logics by term rewriting process

†Nozomu Takashima and Yuichi GOTO, Saitama University



Copyright ©2021 Information Processing Society of Japan.
All Rights Reserved.

合子の組み合わせに注目すると 11 種類に分類することができる[4]. 論理結合子による既知の定理の形式と各形式の個数を表 1 に示す. 現在の自動定理発見法では, $\alpha$ と $\beta$ を論理式とするとき, $\alpha$ と $\alpha \Rightarrow \beta$ から $\beta$ を導出する推論規則モーダス・ポネンスを用いて定理を導出している. そのため論理結合子を含まない形式 A の既知の定理を導出する場合, 他の既知の定理, 経験前提の部分論理式に形式 A の既知の定理が含まれていなければならない.

しかし形式 A の既知の定理 186 個のうち, 156 個の既知の定理が他の既知の定理と経験前提の部分論理式として含まれていなかった.

表 1：各形式の既知の定理の個数

| 既知の定理の形式 | 個数 | 出現率 |
|---|---|---|
| $A$ | 186 | 43% |
| $A \Rightarrow B$ | 108 | 25% |
| $(A \wedge B) \Rightarrow \mathrm{C}$ | 54 | 13% |
| $\neg(\neg A \wedge \neg B)$ | 26 | 6% |
| $A \Rightarrow \neg(\neg B \wedge \neg C)$ | 17 | 4% |
| $\neg A$ | 14 | 3% |
| $\neg(A \wedge B)$ | 10 | 2% |
| $((A \wedge B) \wedge C) \Rightarrow D$ | 6 | 1% |
| $\neg((\neg A \wedge \neg B) \wedge \neg C)$ | 5 | 1% |
| $(((A \wedge B) \wedge C) \wedge D) \Rightarrow E$ | 2 | <1% |
| $\neg((A \wedge B) \wedge C)$ | 1 | <1% |

## 4. 項の書き換え処理による自動定理発見法の改善

現在の自動定理発見法の前向き推論のフェーズで使用されている推論規則は, 式を対象としている為, 項を対象とした処理を行うことができない. そのため論理式内の述語, 関数が一致していても変数の名称, 順番等が一致しなければ新しい論理式を導出することができない. したがって, 形式 A の既知の定理を再発見するために自動定理発見法に項の書き換え処理を追加する必要がある.

そこで前向き推論を用いた自動定理発見法に項の書き換えフェーズを追加した.

このフェーズでは前向き推論フェーズで導出された論理式を入力として受け取り, 受け取った論理式に対し項の書き換え処理を行う. その後, 書き換えた論理式を入力として前向き推論, 抽象化を行う, 新しい論理式が導出された場合は, 再び, 項の書き換え処理から前向き推論までの作業をおこなう.

本研究では以下の 3 種類の項の書き換え処理を追加した.

- 変数の単純化
  $\forall x \forall y F(x,y) \vdash \forall x F(x,x)$ [$y$ に $x$ を代入]
- 定数の代入
  $\forall x \forall y F(x,y) \vdash \forall x F(x,0)$ [$y$ に 0 を代入]
- 変数の並び替え
  $\forall x \forall y F(x,y) \vdash \forall x \forall y F(y,x)$
  [対称律を満たす場合, $y$と$x$を並び替え]

項の書き換え処理を追加した自動定理発見の試行を行った, 試行の結果, 変数の単純化によって新たに 2 個既知の定理を再発見することができた. これにより項の書き換え処理の有用性を示すことができた.

## 5. おわりに

前向き推論を用いた自動定理発見法に項の書き換え処理を追加し, 新たに既知の定理を再発見することができた. 一方, 全ての既知の定理を再発見できていないため, さらに自動定理発見法を改善する必要がある.

また, 項の書き換え処理により前向き推論フェーズで導出される論理式が増加した. 増加した論理式を扱うために FreeEnCal の性能を上げる必要がある.

## 参考文献

[1] J. Cheng: A Relevant Logic Approach to Automated Theorem Finding, Proc. Workshop on Automated Theorem Proving attached to International Symposium on Fifth Generation Computer Systems 1994, pp.8-15, Tokyo, Japan, 1994.
[2] J. Cheng: FreeEnCal: A Forward Reasoning Engine with General-Purpose, LNAI, Vol. 4693, pp.444-452, Springer-Verlag, 2007.
[3] H. Gao et al.: A Systematic Methodology for Automated Theorem Finding, Theoretical Computer Science (554), pp.2-21, Elsevier B.V., 2014.
[4] H. Gao et al.: Measuring Interestingness of Theorems in Automated Theorem Finding by Forward Reasoning Based on Strong Relevant Logic, Proc.ICEI 2019, pp.356-361, Nanjing, 2019.
[5] Y. Goto et al.: A Predicate Suggestion Algorithm for Automated Theorem Finding with Forward Reasoning, LNAI, Vol.(10192), pp.125-134, Springer, 2017.
[6] L.Wos: Aotomated Reasoning 33 Basic Reseach Problem, 1988.



Copyright ©2021 Information Processing Society of Japan.
All Rights Reserved.