Vol.2021-CG-184 No.14
Vol.2021-DCC-29 No.14
Vol.2021-CVIM-227 No.14
2021/11/5

古墳顔料解析のためのKubelka-Munkモデルの妥当性

青山 尚正[1]　知念 響紀[1]　舩冨 卓哉[1]　向川 康博[1]　森本 哲郎[2]　大石 岳史[2]　高松 淳[3]　池内 克史[3]

概要：本研究では，古墳顔料が塗布された層状表面を対象として，そのスペクトルを Kubelka-Munk 理論に基づいて解析することの妥当性を評価する．Kubelka-Munk 理論は，顔料固有の散乱係数と吸収係数によって表されるモデルであり，層状表面のスペクトル解析に利用されてきた．一方で，顔料の散乱が強い場合には，見かけの光路長が長くなることから，その影響を考慮した改訂 Kubelka-Munk 理論も提案されている．本研究では，古墳顔料を対象とする場合には，どちらの理論が妥当であるかを評価するために，実際に古墳顔料の厚みや濃度を一定間隔で変えたサンプルを複数用意し，それぞれの理論に基づいて厚み推定とスペクトル復元を行った．

1. はじめに

装飾古墳の壁画は歴史的価値が高く，描画に用いられている顔料のスペクトル解析は，時代背景や環境変化などの推定に役立つ．また，長期に亘る経時変化に伴って壁画は風化してしまうため，顔料の解析は壁画の保存や再現にも有益である．壁画は石材の上にベンガラや黄土などの天然に産出する土を原料とした顔料が塗布されており，層状の表面構造を持っている．また顔料の厚みによっては分光反射率などが変わる．これは，水彩画や油彩画と同様に，古墳顔料の中でも吸収や散乱が生じることに起因する．非破壊・非接触での解析では，このような顔料中での光の散乱・吸収による反射モデルとして Kubelka-Munk 理論 [1] を基にしたモデルが用いられている．過去にも，[3], [5] において印刷インキ膜の吸収係数，散乱係数の算出が行われている．

しかし，Kubelka-Munk 理論の場合，散乱が支配的な顔料に対しては，散乱によって見かけの光路長が長くなる現象をうまく記述できないため，モデルが現実の反射スペクトルにうまく適合しないことが知られている．これに対し，散乱が支配的な顔料に対しても適用できる改訂 Kubelka-Munk 理論が Yang らによって提案された [2]．水彩画を対象としたシミュレーション実験においてその効果が示されているが，古墳顔料に対する効果は不明である．そこで本研究では，古墳顔料として実際に使われている 6 種類の顔料を用い，顔料解析として従来の Kubelka-Munk 理論と改訂 Kubelka-Munk 理論のどちらを適用するのが妥当であるか検証することを目的とする．

1 奈良先端科学技術大学院大学
2 東京大学
3 Microsoft

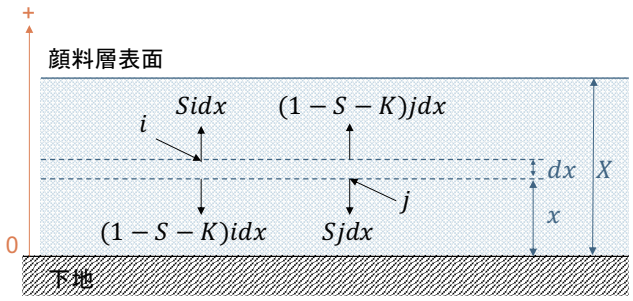


図 1 Kubelka-Munk 理論の模式図．i は反射方向の光強度，j は入射方向の光強度，K は吸収係数，S は散乱係数，X は顔料層の厚み．

2. 層状表面の反射モデル

2.1 Kubelka-Munk 理論 [1]

Kubelka-Munk 理論（以後，KM 理論）は物質中の光の進行として入射方向と反射方向の二光束のみを考慮したモデルである．厚さ X の塗布された顔料が成す層における二光束を**図 1** に示す．ここで，波長ごとの反射方向の光強度を i，入射方向の光強度を j とする．この時，ある微細な厚み dx を通る光束のうち，下地からの厚みを x，後方に散乱される比率を散乱係数 S，吸収される比率を吸収係数 K とすると，光強度 di と dj の変化量は次のようになる．

$$di = (S+K)idx - Sjdx \tag{1}$$

$$dj = -(S+K)jdx + Sidx \tag{2}$$

上記の微分方程式と顔料に塗布されている下地の境界条件から KM 理論に基づく反射モデルが得られる．また散乱係数と吸収係数から，顔料を十分厚く塗られた時の反射ス

ⓒ 2021 Information Processing Society of Japan

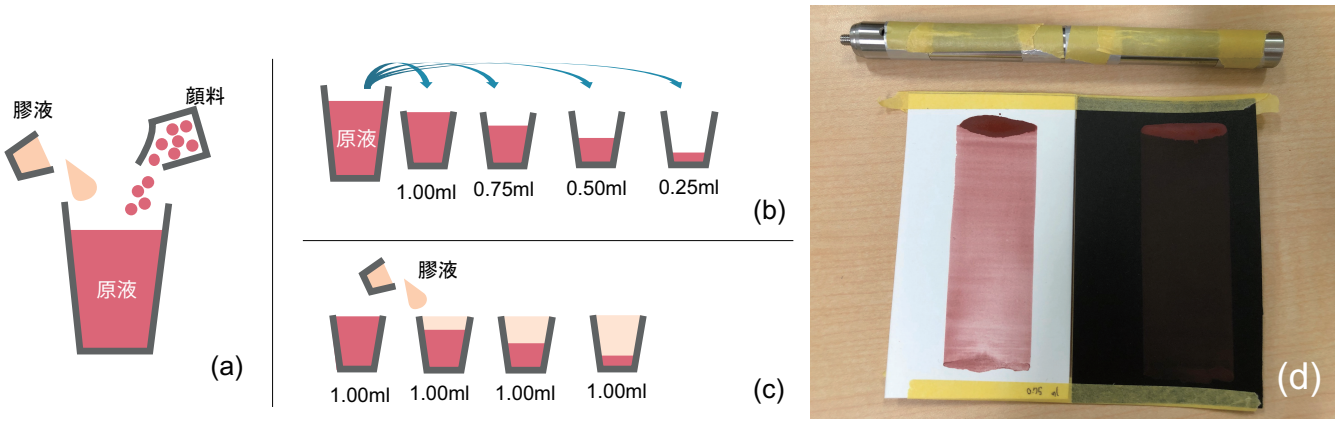


図 2 サンプルの作成手順．(a) 膠液 10 ml あたり 1 g の顔料を加えた原液を作る．(b) 原液を 1.00 ml から 0.25 ml まで 0.25 ml ずつ分量を変えて別容器に分ける．(c) 別容器の溶液が全て 1.00 ml になるように膠液を足す．(d) 白色と黒色の上質紙の上に溶液を 0.05 ml ずつ滴らし，自作器具により下から上へと押し当てながら伸ばす．

ペクトル，つまり下地の影響を受けないスペクトル R_∞ が得られる．

$$R_\infty = 1 + \frac{K}{S} - \sqrt{\left(\frac{K}{S}\right)^2 + 2\frac{K}{S}} \tag{3}$$

R_∞ と下地の反射率 R_b より任意の厚み X に対する反射スペクトル $R_{km}(X)$ は次のようになる．

$$R_{km}(X) = \frac{\frac{1}{R_\infty}(R_b - R_\infty) - R_\infty(R_b - \frac{1}{R_\infty})e^{SX(\frac{1}{R_\infty} - R_\infty)}}{(R_b - R_\infty) - (R_b - \frac{1}{R_\infty})e^{SX(\frac{1}{R_\infty} - R_\infty)}} \tag{4}$$

2.2 改訂 Kubelka-Munk 理論 [2]

KM 理論は下地に垂直入射する光束だけを考えていた．光束は顔料中で散乱がない場合は一直線に進む光路のみを考えれば十分であるが，散乱が大きい場合は光路長が延びる．そこで Yang らは散乱の影響による光路長の増加を考慮した改訂 KM 理論を提案した．改訂 KM 理論では光束が散乱が等方的かつランダムであると仮定したうえで，光路長の変動割合を表す散乱誘起経路変動（SIPV）係数を次のように表現した．

$$\mu = \begin{cases} \sqrt{\frac{2S}{K}} & (2S > K) \\ 1 & (\text{otherwise}) \end{cases} \tag{5}$$

この式は，顔料の吸収よりも散乱が支配的である場合に光路長の変化がみられるということ，散乱よりも吸収が支配的である場合は従来の KM 理論と同じ結果が得られることを示している．この理論によって，散乱係数は μS，吸収係数は μK と表現される．

2.3 2 種類の下地を用いた反射モデルのパラメータ推定

KM 理論に基づく反射モデルである式 (4) を得るためには，下地のスペクトルと散乱係数と吸収係数が必要である．しかし顔料の散乱係数と吸収係数が未知の場合，計測スペクトルから算出する必要がある．この場合，計測によって顔料のスペクトル R_1 と下地のスペクトル R_b が得られるが，散乱係数 S と吸収係数 K は算出できない．そこで 2 種類の異なる反射率の下地を用いる．その時の下地の反射率を R_b，R'_b，実測可能な顔料のスペクトルはそれぞれ R_1，R'_1 とすると式 (4) より散乱係数と吸収係数が次のように計算できる．[5]

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{bx}\operatorname{arccoth}\frac{1 + R_1R_b - (R_1 + R_b)a}{b(R_1 - R_b)} \\ K &= S(a-1) \\ a &= \frac{(R_1 - R_b)(1 + R'_1R'_b) - (R'_1 - R'_b)(1 + R_1R_b)}{(R_1 - R_b)(R'_1 + R'_b) - (R'_1 - R'_b)(R_1 + R_b)} \\ b &= \sqrt{a^2 - 1} \end{aligned}$$

一方，改訂 KM 理論に基づく反射モデルを観測から得る場合，SIPV 係数を考慮して顔料固有の散乱係数と吸収係数を推定する必要がある．しかし，これは自明ではないため，ここでは上記で求めた係数をそのまま顔料固有の係数 S, K として用い，顔料ごとの SIPV 係数を決定することで疑似的に改訂 KM 理論に基づく反射モデルとした．改訂 KM 理論に基づいた係数推定は今後の課題とする．

3. 実験

本研究では，古墳顔料において 2 章で示した 2 つの理論のどちらがより適しているかを検証するため，いくつかの厚みでサンプルを作成し，それぞれの理論に基づいて算出されたスペクトルとサンプルから直接得られるスペクトルを比較する実験を行った．

3.1 サンプル作成手順

サンプルを作成するにあたり，一般的な画材では顔料を塗る厚みを正確に制御することが困難である．KM 理論に

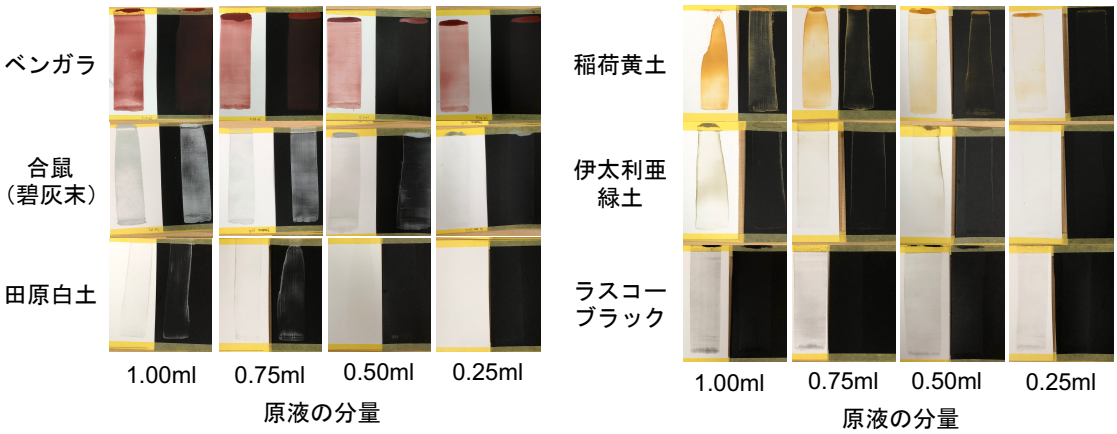


図 3　作成したサンプル．6 種類の顔料を濃度を変化させて白下地と黒下地に塗布している．

おける厚みのパラメータ X が光路長であることを考え，本研究ではサンプルに塗る顔料の濃度を変えて下地に塗ることで，光学的な厚みを変化させたサンプルを作成する．

サンプル作成手順を**図 2** に示す．まず，膠液 10 ml あたり 1 g の顔料を加えた溶液を作り，これを原液とする．次に，原液を 1.00 ml から 0.25 ml まで 0.25 ml ずつ分量を変えて別容器に分け，分けた溶液が全て 1.00 ml になるように膠液を足すことで，濃度を変化させた 4 種類の溶液を作る．こうして作製した溶液を 0.05 ml ずつ白色と黒色の上質紙に塗ることで厚みを変化させたサンプルを作成する．このとき，それぞれの上質紙に塗る溶液の物理的な厚みを均一にする必要がある．そこで，図 2(d) に示す直径 12 mm の金属棒の両端に厚さ 0.08 mm のマスキングテープを巻きつけた器具を用意し，上質紙に滴らした溶液を器具によって下から上へと伸ばすように押し当てることで，顔料を均一に塗布した．

サンプルで利用する顔料として，実際に装飾古墳で用いられている顔料 [4] である，ベンガラ，稲荷黄土，田原白土，ラスコーブラック，伊太利亜緑土，合鼠（碧灰末）の 6 種類を選択した．最終的にこのサンプル作成手順によって，**図 3** に示す 6 種類の顔料がそれぞれ 4 種類の異なる厚みで 2 種類の下地の上に塗られた計 48 種類のサンプルを作成した．

3.2　計測方法

計測で用いたシステムの概要を**図 4** に示す．キセノン光源と分光器を光ファイバによって接続した反射積分球を 10 mm の厚さを持つ穴の空いた板の上に設置し，その下にサンプルを配置している．キセノン光源，分光器，反射積分球は，それぞれ Ocean Insight 社製 HPX–2000, MAYA2000PRO，ISP–50–8–I を用いた．この計測システムによって，作成した 48 種類のサンプルの反射光のスペクトルを各 10 点ずつ計測して平均することでそれぞれのスペクトルデータを取得した．

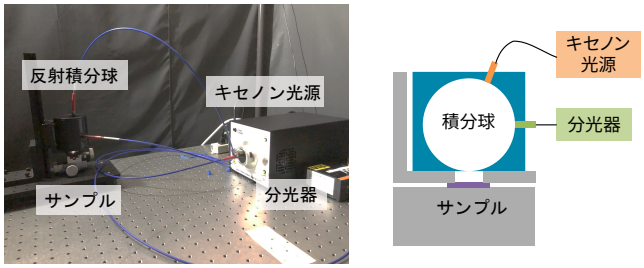


図 4　計測システムの概要

3.3　計測結果

作成した 48 種類のサンプルおよび 2 種類の下地の反射光スペクトルを計測した結果を**図 5** に示す．このスペクトルデータをもとに 2 章で示した方法を用いて散乱係数および吸収係数の推定を行い，KM 理論に基づく反射モデルを用いてスペクトルの復元を行う．

KM 理論に基づく推定結果

48 種類のサンプルから，それぞれの顔料の散乱係数と吸収係数の推定結果を**図 6** に示す．古墳顔料として用いられる 6 種類のうち碧灰末を除く 5 種類は散乱よりも吸収の割合が大きいことが示されている．

改訂 KM 理論に基づく推定結果

散乱が支配的な顔料として，式 (5) に示された $2S > K$ が成立する碧灰末を対象とし，改訂 KM 理論を適用した．**図 7** に碧灰末での散乱係数 μS と吸収係数 μK の推定結果を示す．

4.　結果と考察

本章では KM 理論に基づいたモデルと改訂 KM に基づいたモデルの比較を行う．実験に使用した古墳顔料のうち，3 章では散乱が支配的な顔料として碧灰末を挙げた．その中でも原液の使用量が 0.25 ml と 0.50 ml のものは，散乱係数は吸収係数よりも低い値を示した．これは顔料特有の問題であり，下地の影響を強く受けてしまったことによる．このため比較を行う顔料は碧灰末の原液使用量 0.75 ml(以

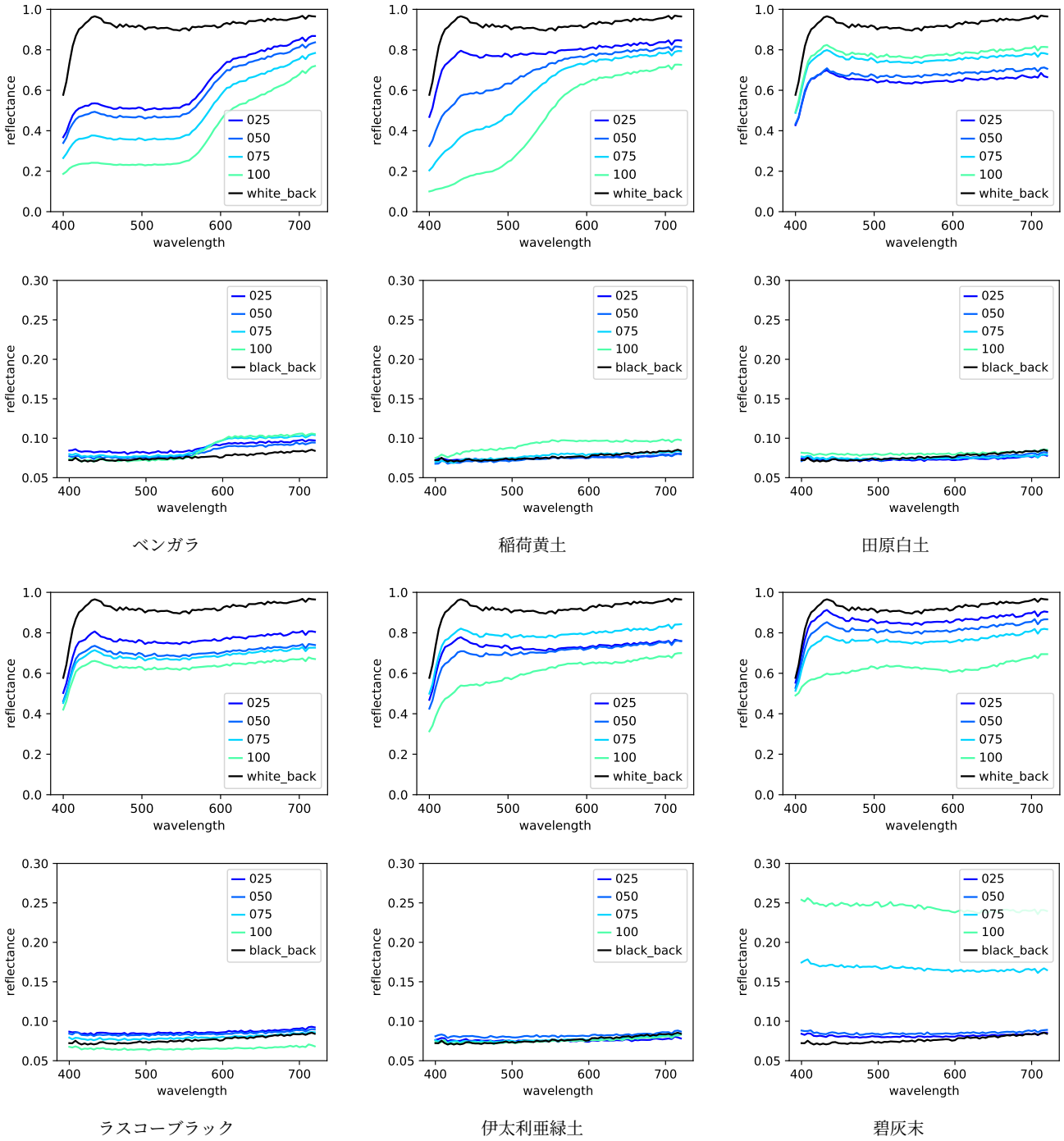


図 5 各サンプルにおける反射光スペクトルの計測結果．それぞれ白下地（上），黒下地（下）に対して 4 種類の異なる厚みで塗布したものを計測した．025，050，075，100 はそれぞれ原液の分量を示す．

後サンプル A とする) と 1.00 ml(以後サンプル B とする) を使用する．

厚み推定における比較

本節では厚みが異なるサンプル A とサンプル B の観測を用い，両モデルの比較と検証を行う．具体的には，サンプル A から推定された散乱係数・吸収係数を基に様々な厚みでのスペクトルを算出し，これをサンプル B の観測スペクトルと比較することによって，サンプル A に対する相対的な厚みを推定する．サンプル A とサンプル B はそれぞれ原液を 0.75 ml と 1.00 ml としていたため，サンプル A の厚みを $X = 1.00$ としたときサンプル B の厚みは $X = 1.33$ になるのが理想的である．推定された相対的な厚みを基準として両モデルの妥当性を検証する．

シミュレーションデータの作成方法について述べる．KM 理論に基づく反射モデルは式 (4) から導出されるが，R_∞ と R_b，S は計測から算出が可能なことから X だけが変数となる．そこでサンプル A の厚みを $X = 1$ とするこ

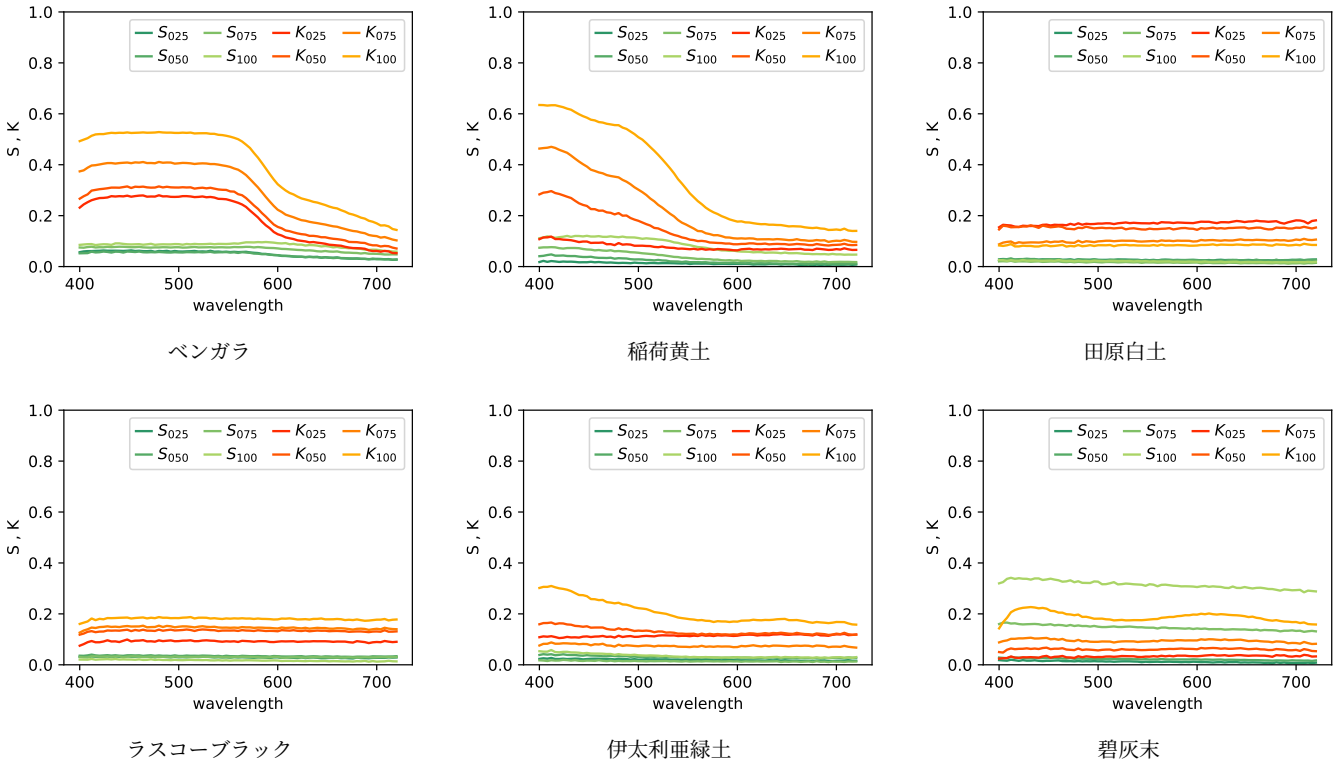


図 6 KM 理論に基づいた散乱係数 (緑) と吸収係数 (赤) の推定結果.

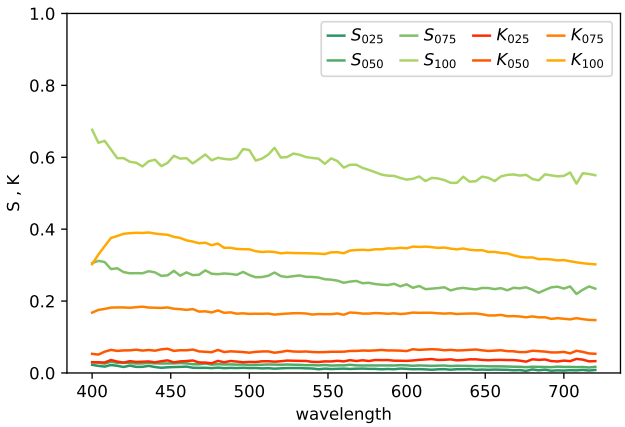


図 7 改訂 KM に基づいた碧灰末の散乱係数と吸収係数の推定結果.

とで，サンプル A の厚みの相対値を算出することができる．これを $0 \leq X \leq 5$ の範囲で変化させる．これより X が 0 に近づけば下地のスペクトル R_b に漸近し，X が大きくなれば R_∞ に漸近することが分かる．

次に，各シミュレーションデータからサンプル B のスペクトルデータと最も近いものを推定し，その時の X の値をサンプル A に対するサンプル B の相対的な厚みが算出できる．本稿では最小二乗法により最も近いものを推定する．

白下地の場合

図 8(a) には KM 理論に基づく反射モデルでのシミュレーション結果を示す．この結果より，サンプル A の厚み $X = 1.00$ に対するサンプル B の厚みは，$X = 2.22$ と推定された．図 8(b) には改訂 KM 理論に基づく反射モデルでのシミュレーション結果を示す．この結果より，サンプル A の厚み $X = 1.00$ に対するサンプル B の厚みは $X = 1.26$ と推定された．これより，改訂 KM 理論に基づいた反射モデルのほうが妥当であるといえる．

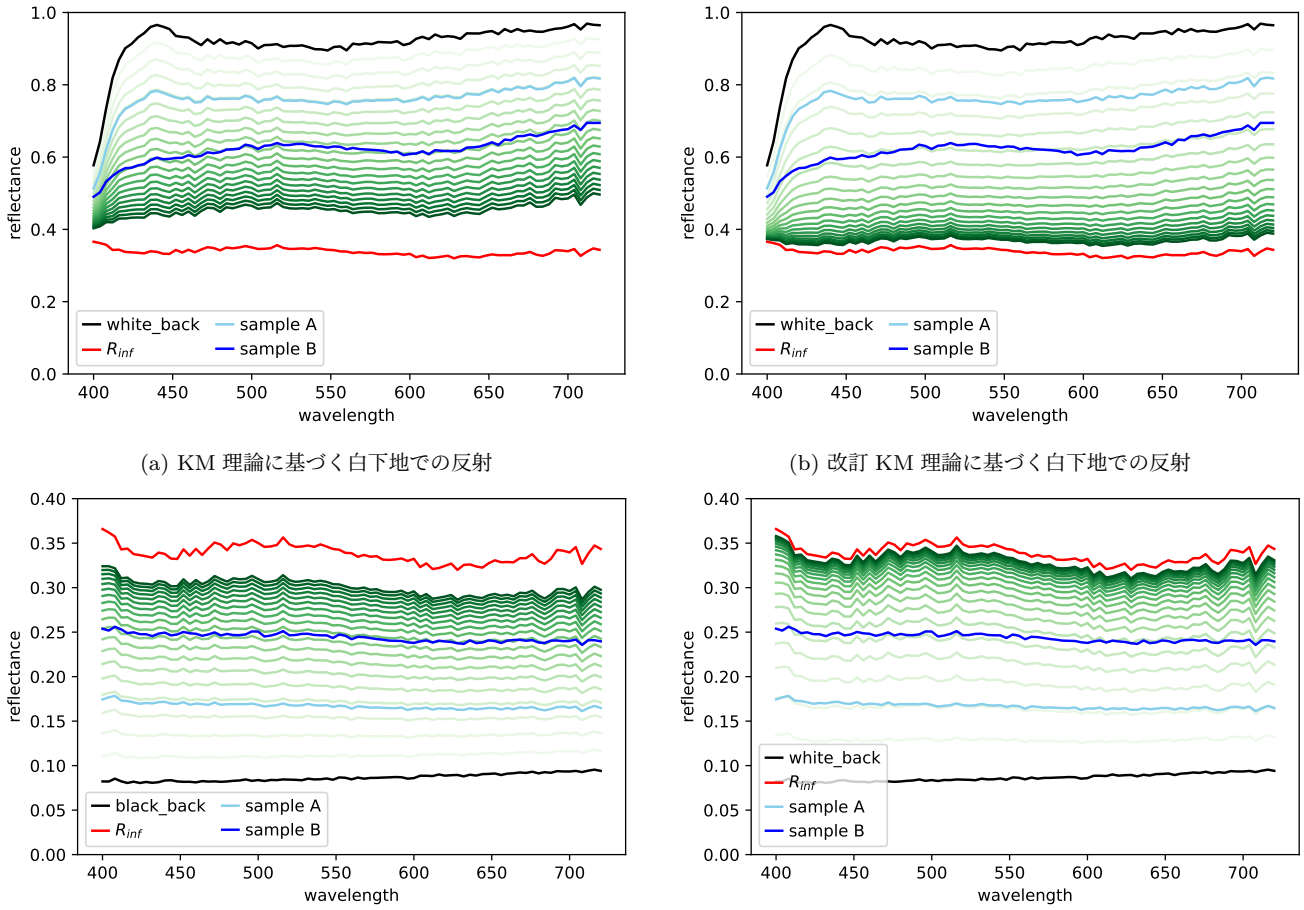
黒下地の場合

図 8(c) には KM 理論に基づく反射モデルでのシミュレーション結果を示す．この結果より，サンプル A の厚み $X = 1.00$ に対するサンプル B の厚みは，$X = 2.24$ と推定された．図 8(d) には改訂 KM 理論に基づく反射モデルでのシミュレーション結果を示す．この結果より，サンプル A の厚み $X = 1.00$ に対するサンプル B の厚みは $X = 1.36$ と推定された．これも同様に原液の使用比率から考えたとき，改訂 KM 理論に基づいた反射モデルのほうが妥当であるといえる．

5. まとめ

本研究では，古墳顔料が塗布された層状表面を対象としたスペクトル解析において，従来の Kubelka-Munk 理論と改訂 Kubelka-Munk 理論の比較を行った．改訂 Kubelka-Munk 理論は散乱による光路長の増加を考慮したモデルとなっており，散乱が強い顔料を対象とした反射モデルとして有効であると見込まれ，これを実験によって検証した．古墳顔料として実際に使われている 6 種類の顔料を対象として，光学的厚みを一定間隔で変えたサンプルを複数用意して計測し，散乱係数や吸収係数を推定した．その結果，5

ⓒ 2021 Information Processing Society of Japan



(a) KM 理論に基づく白下地での反射

(b) 改訂 KM 理論に基づく白下地での反射

(c) KM 理論に基づく黒下地での反射

(d) 改訂 KM 理論に基づく黒下地での反射

図 8 各反射モデルでのシミュレーション結果．黒線は下地の反射率を示す．緑線はシミュレーションデータで，$0 \leq X \leq 5$ の範囲を満たす X を等間隔で 0.25 刻みで表示させている．

種類は散乱の度合いが低く，従来の KM モデルと差がないことが分かった．一方，碧灰末は散乱が支配的な顔料であり，改訂 KM 理論に基づいた反射モデルの方が妥当であることを，サンプルの計測結果と反射モデルに基づくシミュレーション結果の比較によって示した．

参考文献

[1] Kubelka, P. and Munk, F.: An article on optics of paint layers (1931).
[2] Yang, L. and Kruse, B.: Revised Kubelka–Munk theory. I. Theory and application, *JOSA A*, Vol. 21, No. 10, pp. 1933–1941 (2004).
[3] 品田登：Kubelka-Munk 理論とその応用，色材協会誌，Vol. 42, No. 10, pp. 470–476 (1969).
[4] 文化庁：装飾古墳ワーキンググループ（第 12 回）議事次第，`https://www.bunka.go.jp/seisaku/bunkashingikai/kondankaito/takamatsu_kitora/wg_01/wg_12/index.html`(Accessed on 10/14/2021) (2014).
[5] 野中通敬ほか：Kubelka-Munk 理論とその印刷インキ膜への応用，東京工芸大学工学部紀要， Vol. 10, No. 1, pp. 48–54.