

円周上の max-min 5-dispersion 問題

角田 倫久¹ 宮田 洋行¹ 中野 眞一^{1,a)}

受付日 2020年8月18日, 採録日 2020年12月1日

概要: 施設の配置候補点の集合が与えられたときに, 指定した個数の施設を互いに離して配置する問題を一般に dispersion 問題という. 本論文では, 与えられた n 個の点の集合が円周上にある場合に 5 個の点を互いに離して配置する問題を解く $O(n)$ 時間アルゴリズムを考える.

キーワード: アルゴリズム, 施設配置問題, dispersion 問題

Max-Min 5-dispersion Problem on a Circle

RIKU TSUNODA¹ HIROYUKI MIYATA¹ SHINICHI NAKANO^{1,a)}

Received: August 18, 2020, Accepted: December 1, 2020

Abstract: Given a set of possible locations for facilities. We wish to find a subset of locations so that a designated cost is maximized. The problem is called the dispersion problem. In this paper we design an $O(n)$ time simple algorithm to solve the problem if all possible locations are on a circle and the size of the subset is 5.

Keywords: algorithm, facility location problem, dispersion problem

1. まえがき

施設の配置候補点の集合が与えられたときに, 指定した個数の施設を互いに離して配置する問題を一般に dispersion 問題という [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [14], [15], [16], [18], [19]. たとえば, 消防署は, 互いに離して配置することが望ましい. dispersion 問題の多くは NP 困難であり [10], [19], 多項式時間のアルゴリズムを設計することは難しいと思われる. この問題を解く指数時間アルゴリズムも知られている [1]. 本論文では, 入力に制約を加えた場合について, この問題を解くアルゴリズムを設計する. 特に, 与えられた点の集合が円周上にある場合の dispersion 問題について考察する.

円周上の n 個の点の集合を $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ とする. これらを施設の配置候補点の集合とする. P 中の 2 点 u から v への円周に沿った時計回りの弧の長さを $d(u, v)$ とする. P と整数 k が与えられたとき, $|S| = k$ となる集合

$S \subset P$, で $cost(S) = \min_{x, y \in S} \{d(x, y)\}$ が最大となるものを円周上の k -dispersion とよび, そのような S を求める問題を円周上の max-min k -dispersion 問題とよぶ. L を円周の長さとしたとき, $cost(S) \leq \frac{L}{k}$ であることが容易に分かる.

円周上の max-min k -dispersion 問題を, path partition 問題に帰着してからこれを解く $O(n)$ 時間の複雑なアルゴリズムがある [18]. このアルゴリズムは, $O(n)$ 時間の matrix search 問題を解くアルゴリズム [13] をサブルーチンとして用いており, 実装は非常に困難である.

一方, 特に, $k = 3$ および 4 のときは, 円周上の max-min k -dispersion 問題を解く $O(n)$ 時間の簡単なアルゴリズムがある [1], [17]. 本論文は, 円周上の max-min 5-dispersion 問題を解く $O(n)$ 時間のアルゴリズムを設計する.

本論文の構成は次のとおりである. 2 章は準備である. 3 章は円周上の max-min 5-dispersion 問題を解くアルゴリズムを提案する. 4 章はまとめである.

¹ 群馬大学

Gunma University, Kiryu, Gunma 376–8515, Japan

^{a)} nakano@cs.gunma-u.ac.jp

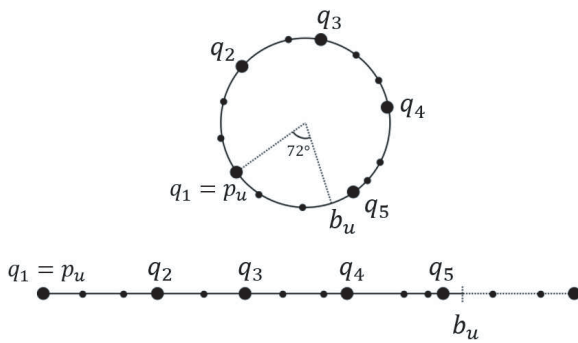


図 1 直線分への変形

Fig. 1 Transformation to a line segment.

2. 準備

$P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ を円周上の点の集合とし、これらは円周上に時計回りにこの順に現れるとする。 $n \geq 5$ とする。 P の 5-dispersion を $S = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\} \subset P$ とする。 $q_1, q_2, \dots$ は円周上に時計回りにこの順で現れるとする。 L は円周の長さとする。

事実 1: $d(q_1, q_2), d(q_2, q_3), d(q_3, q_4), d(q_4, q_5), d(q_5, q_1)$ のいずれかは $\frac{L}{5}$ 以上である。

一般性を失うことなく $d(q_5, q_1) \geq \frac{L}{5}$ とする。 点 $p_u \in P$ から時計回りに $\frac{4L}{5}$ 進んだ円周上の点を b_u とする。 また点 s から t への時計回りの開区間を (s, t) と書く。 これに t を含む区間を $[s, t]$ と書く。 点 s から t への時計回りの閉区間を $[s, t]$ と書く。

事実 2: $q_1 = p_u$ とする。 q_5 は区間 $(p_u = q_1, b_u)$ 中の P の点で、 b_u に一番近い点としてよい。

そうでないときは点 q_5 を、区間 $(p_u = q_1, b_u)$ 中の P の点で b_u に一番近い点に置きかえても、 $cost$ は変わらない。 もし $cost$ が大きくなれば S が P の 5-dispersion であったことに矛盾するからである。

円周の区間 $(b_u, p_u = q_1)$ を削除し、残りの部分を各点の距離を保つように直線分に変形しよう (図 1 参照)。 (このとき、円周上の点集合 P の 5-dispersion $S = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\} \subset P$ は、 $(d(q_5, q_1) \geq \frac{L}{5})$ のので直線上の点集合 $\{p_u = q_1, p_{u+1}, p_{u+2}, \dots, q_5\}$ の 5-dispersion である。

各点 $p_i \in P$ について、 p_i から時計回りに $\frac{4L}{5}$ 進んだ点を b_i とし、円周から区間 (b_i, p_i) を削除した残りの部分の区間 $[p_i, b_i]$ を各点の距離を保つように上のように直線分に変形し、この区間の P の点の集合を P_i とする。 直線上の点集合 P_i の 5-dispersion を求める問題を $P(i)$ としよう。 各 $i = 1, 2, \dots, n$ について、問題 $P(i)$ の 5-dispersion S_i を求め、これらのうち最も $cost(S_i)$ が大きい S_i を選べば、円周上の点集合 P の 5-dispersion となる。

補題 1. $P(i)$ の 5-dispersion は $O(n)$ 時間で計算できる。

Proof. この問題の解を $S = \{p_i, p_a, p_b, p_c, p_j\}$ とする。一

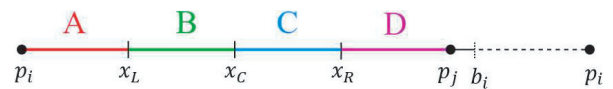


図 2 4つの区間 A, B, C, D

Fig. 2 The four intervals A, B, C, D.

般性を失わず、直線は水平であるとしてよい。 $x(p_i) < x(p_a) < x(p_b) < x(p_c) < x(p_j)$ とする。 p_i と p_j は直線分上の点集合 P_i のうち、最も左にある点と最も右にある点としてよい。 このとき、区間 (p_i, p_j) を 4 等分する点を左から順に x_L, x_C, x_R とする。 これらの点により区間 (p_i, p_j) を 4 つの区間 $A = (p_i, x_L]$, $B = (x_L, x_C]$, $C = (x_C, x_R]$, $D = (x_R, p_j)$ に分割する (図 2 参照)。

このとき 3 点 p_a, p_b, p_c を、区間 A, B, C, D のどこに配置するかによって次の 3 つの場合を考えよう。

場合 1 1 つの区間に 3 点を配置した場合

場合 2 2 つの区間に 3 点を配置した場合

場合 3 3 つの区間に 3 点を配置した場合

S は場合 1, 2, 3 のいずれかである。 それぞれの場合についてコスト $cost(S)$ が最大になる $S = \{p_i, p_a, p_b, p_c, p_j\}$ を計算しよう。

場合 1 さらに 4 つの場合に分けて考える。

場合 1 (a) B, C, D が空のとき：

p_c は x_L に最も近い A 上の点としてよい。 $\{p_i, p_a, p_b, p_c\}$ は区間 $[p_i, p_c]$ の 4-dispersion である。 この 4-dispersion S' を次のようにして計算しよう。 S' は両端の 2 点 p_i, p_c を含むとしてよいので残りの p_a, p_b を計算しよう。 区間 (p_i, p_c) を 3 等分する 2 点を左から順に x'_L, x'_R としよう。 2 点 p_a と p_b は 3 つの区間 $(p_i, x'_L]$, $(x'_L, x'_R]$, (x'_R, p_c) のいずれかに配置する。 すなわち少なくとも 1 つの区間には、 p_a, p_b のいずれも配置しない。 3 つの場合に分けて考えよう。

(1) $(p_i, x'_L]$ 以外の 2 つの区間に配置する場合。

p_a は区間 (x'_L, p_c) 中の一番左の点としてよい。 p_b は p_a と p_c の中点に最も近い P の点である。

(2) $(x'_L, x'_R]$ 以外の 2 つの区間に配置する場合。

p_a は区間 $(p_i, x'_L]$ 中の一番右の P の点である。 p_b は区間 (x'_R, p_j) 中の一番左の P の点である。

(3) (x'_R, p_j) 以外の 2 つの区間に配置する場合。

(1) と同様。

場合 1 (b) A, C, D が空のとき：

p_c は x_C に最も近い B 上の点である (ただし、 p_a は x_L に最も近い B 上の点である)。 $\{p_i, p_a, p_b, p_c\}$ は区間 $[p_i, p_c]$ の 4-dispersion である。 場合 1(a) と同様。

場合 1 (c) A, B, D が空のとき：場合 1(b) と同様。

場合 1 (d) A, B, C が空のとき：場合 1(a) と同様。

場合 2 さらに 6 つの場合に分けて考える。

場合 2 (a) C, D が空のとき：

p_c は x_C に最も近い B 上の点である。 $\{p_i, p_a, p_b, p_c\}$ は区間 $[p_i, p_c]$ の 4-dispersion である。 場合 1(a) と同様。

場合 2 (b) B, D が空のとき：

(1) A に p_a と p_b , C に p_c を配置する場合と (2) A に p_a , C に p_b と p_c を配置する場合がある. (1) の場合は p_b は x_L に最も近い A 上の点である. p_a は p_i と p_b の中点に最も近い A 上の点である. p_c は C 上の任意の点である. (2) の場合は p_a は x_L に最も近い A 上の点である. p_b は x_C に最も近い C 上の点である. p_c は x_R に最も近い C 上の点である.

場合 2 (c) B, C が空のとき：

(1) A に p_a と p_b , D に p_c を配置する場合と (2) A に p_a , D に p_b と p_c を配置する場合がある. (1) の場合, p_b は x_L に最も近い A 上の点である. p_a は p_i と p_b の中点に最も近い A 上の点である. p_c は x_R に最も近い D 上の点である. (2) の場合も同様である.

場合 2 (d) A, D が空のとき：

p_a は x_L に最も近い B 上の点である. p_c は x_R に最も近い C 上の点である. p_b は p_a と p_c の中点に最も近い $B \cup C$ の点である.

場合 2 (e) A, C が空のとき：場合 2(b) と同様.

場合 2 (f) A, B が空のとき：場合 2(a) と同様.

場合 3 さらに 4 つの場合に分けて考える.

場合 3 (a) D が空のとき：

p_c は x_R に最も近い C 上の点である. $\{p_i, p_a, p_b, p_c\}$ は区間 $[p_i, p_c]$ の 4-dispersion である. 場合 1 と同様.

場合 3 (b) C が空のとき：

p_c は x_R に最も近い D 上の点である. p_b は x_C に最も近い B 上の点である. p_a は p_i と p_b の中点に最も近い A 上の点である.

場合 3 (c) B が空のとき：場合 3(b) と同様.

場合 3 (d) A が空のとき：場合 3(a) と同様. $\square$

次の補題がいえる.

補題 2. 場合 2(b)(1) の条件を満たす $P(i)$ の 5 点 $S = \{q_1 = p_i, q_2, \dots, q_5\}$ で $cost(S)$ が最大のものがあたえられたとき, 場合 2(b)(1) の条件を満たす $P(i+1)$ の 5 点があるならば, そのような 5 点 $S' = \{q'_1 = p_{i+1}, q'_2, \dots, q'_5\}$ で $cost(S')$ が最大なものは, $O(\Delta Q)$ 時間で計算できる. ここで, ΔQ は, 次のように定義される. $j = 1, 2, \dots, 5$ について Δq_j を区間 $[q_j, q'_j]$ に含まれる P の点の個数とし, $\Delta Q = \sum_{j=1}^5 \Delta q_j$ とする.

Proof. 区間 $[q_1 = p_i, b_i]$ と区間 $[q'_1 = p_{i+1}, b_{i+1}]$ を, 対応する P の点が重なるように重ねた区間を考えよう. 座標の原点を p_i とする.

q'_5 は区間 $[p_{i+1}, b_{i+1}]$ 中の最も右にある点である. $x(q_5) \leq x(q'_5)$ であるので, $x(q_5)$ から時計回りに点を順にチェックし, $x(b_{i+1})$ を超えない最後の点を q'_5 として選べばよい. これは $\Delta q_5 + 1$ 回のチェックで計算することができる.

また, $x(p_i) < x(p_{i+1})$ であるから $x(b_i) < x(b_{i+1})$ である. よって, $P(i)$ における x_L を x_L^i とし, $P(i+1)$ における

x_L を x_L^{i+1} とすると, $x(x_L^i) < x(x_L^{i+1})$ である. $q'_3 = p_b$ は区間 $[p_{i+1}, x_L^{i+1}]$ 中の最も右にある点である. $x(q_3) \leq x(q'_3)$ であるので, $x(q_3)$ から時計回りに点を順にチェックし, $x(x_L^{i+1})$ を超えない最後の点を q'_3 として選べばよい. これは, $\Delta q_3 + 1$ 回のチェックで計算することができる.

また, $x(p_i) < x(p_{i+1})$ かつ $x(q_3) \leq x(q'_3)$ であり, かつ, q_2 は区間 $[p_i, q_3]$ の中点に最も近い P の点, q'_2 は区間 $[p_{i+1}, q'_3]$ の中点に最も近い P の点, であるので $x(q_2) \leq x(q'_2)$ である. $x(p_2)$ から時計回りに点を順にチェックし, 区間 $[p_{i+1}, q'_3]$ の中点をはじめて超えた点とその直前の点のうち, 中点に近いほうの点を q'_2 として選べばよい. これは, $\Delta q_2 + 2$ 回のチェックで計算することができる.

また q'_4 は区間 C の任意の点を選べばよいのでこれも q_4 から時計回りに点を順にチェックすることにより, $\Delta q_4 + 1$ 回のチェックで計算することができる.

すなわち, $P(i)$ の S があたえられたとき, $P(i+1)$ の S' は $O(\Delta Q)$ 時間で計算できる. $\square$

もし場合 2(b)(1) の条件を満たす $P(i+1)$ の 5 点がないときは, これをスキップし, そのような 5 点がある最小の $i' > i$ なる $P(i')$ の 5 点 $S' = \{q'_1 = p_{i'}, q'_2, \dots, q'_5\}$ で $cost(S')$ が最大なものを, 同様に $O(\Delta Q)$ 時間で計算できる.

場合 2(b)(1) の条件を満たす $P(1)$ の 5 点は $O(n)$ 時間で計算できるので, 上の補題を $i = 1, 2, 3, \dots$ について (必要によりスキップをいれながら) 繰り返し適用することにより, 次がいえる. $i = 1, 2, 3, \dots$ について ΔQ を合計すると $O(n)$ であることに注意しよう.

補題 3. 問題 $P(1), P(2), \dots, P(n)$ の解のうち, 場合 2(b)(1) の条件を満たし, $cost$ が最大なものは $O(n)$ 時間で計算できる.

同様のことが, 場合 2(b)(1) に限らず, それぞれの場合についていえる.

3. 提案するアルゴリズム

円周上の 5-dispersion 問題を解くアルゴリズムを提案する.

このアルゴリズムは, 2 章のそれぞれの場合に $cost$ が最大となる解 5-dispersion を計算し, これらの中で最大の $cost$ を持つものを出力する.

もし, 問題 $P(i)$ のそれぞれの場合の, 5-dispersion S を各 i について, “独立” に計算すると, それぞれ $O(n)$ 時間かかり, アルゴリズム全体で $O(n^2)$ 時間となる. しかし補題 3 に示したように, 各 $i = 1, 2, \dots$ について, 直前の問題 $P(i)$ の解を利用して問題 $P(i+1)$ の解を求めることにより, 特定の場合ごとに 5-dispersion を合計 $O(n)$ 時間で計算できる. 場合の個数は定数個なので, アルゴリズム全体でも計算時間は $O(n)$ となる. 次の定理がいえる.

Algorithm 1 Find-5-dispersion-on-circle $(P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\})$ $cost := 0$ $Ans := \phi$ **for** 2 章のそれぞれの場合について **do** $cost$ が最大の 5-dispersion S を (補題 2 の手法で効率的に) 計算する**if** $cost(S) > cost$ **then** $cost := cost(S)$ $Ans := S$ **end if****end for**Output Ans

定理 1. 円周上の max-min 5-dispersion 問題の解は $O(n)$ 時間で計算できる.

4. むすび

P が円周上の点集合のとき, P の 5-dispersion を $O(n)$ 時間で計算する簡単なアルゴリズムを設計した. ここで, n は P 中の点の個数である.

文献 [1] の円周上の max-min 3-dispersion 問題を解く $O(n)$ 時間のアルゴリズムにおいても, 各 p_i を含む 3-dispersion を利用して, p_{i+1} を含む 3-dispersion を計算している. このとき, 円周を 3 つの領域に等分し, これらの領域の境に最も近い候補点のみが解の候補になることを利用して場合分けをしている. これに対し, 文献 [17] の, 円周上の max-min 4-dispersion 問題を解く $O(n)$ 時間のアルゴリズムにおいては, 同様に円周を 4 等分した領域の境に最も近い候補点に加えて, それらの中点に近い候補点も解の候補になることを考え, 場合分けをしている.

本論文では, 各 $p_i \in P$ に対し, まず, 長さ $\frac{L}{5}$ の弧を削除し, 直線分上の 5-dispersion 問題 $P(i)$ を定義し, これらの解のうち最大のコストを持つものを計算することにより, 円周上の 5-dispersion を求めている. 長さ $\frac{L}{5}$ の弧の削除により, 場合分けの個数を大幅に削減している. 6-dispersion 問題の計算も膨大な場合分けを用いれば可能であると思われるが, 場合分けの個数を大幅に削減する新たなアイデアを考察したい.

より一般的な max-min k -dispersion 問題を $O(n)$ 時間で解くアルゴリズムを設計したい.

参考文献

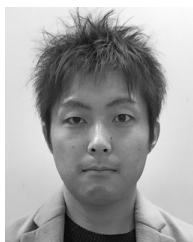
- [1] Akagi, T., Araki, T., Horiyama, T., Nakano, S., Okamoto, Y., Otachi, Y., Saitoh, T., Uehara, R., Uno, T. and Wasa, K.: Exact Algorithms for the Max-Min Dispersion Problem, *Proc. FAW 2018*, LNCS 10823, pp.263–272 (2018).
- [2] Akagi, T., Araki, T. and Nakano, S.: Efficient Algorithms for the Partial Sum Dispersion Problem, *IEICE Trans. Fundamentals*, Accepted.
- [3] Amano, K. and Nakano, S.: An Approximation Algo-

- rithm for the 2-dispersion Problem, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, E103-D, pp.506–508 (2020).
- [4] Araki, T. and Nakano, S.: The max-min dispersion on a line, *Proc. COCOA 2018*, LNCS 11346, pp.672–678 (2018).
- [5] Baur, C. and Fekete, S.P.: Approximation of geometric dispersion problems, *Proc. APPROX 1998*, pp.63–75 (1998).
- [6] Birnbaum, B. and Goldman, K.J.: An improved analysis for a greedy remote-clique algorithm using factor-revealing LPs, *Algorithmica*, Vol.50, pp.42–59 (2009).
- [7] Cevallos, A., Eisenbrand, F. and Zenklusen, R.: Max-sum diversity via convex programming, *Proc. SoCG 2016*, pp.26:1–26:14 (2016).
- [8] Cevallos, A., Eisenbrand, F. and Zenklusen, R.: Local search for max-sum diversification, *Proc. SODA 2017*, pp.130–142 (2017).
- [9] Chandra, B. and Halldorsson, M.M.: Approximation algorithms for dispersion problems, *J. Algorithms*, Vol.38, pp.438–465 (2001).
- [10] Erkut, E.: The discrete p -dispersion problem, *European Journal of Operational Research*, Vol.46, pp.48–60 (1990).
- [11] Erkut, E., Ulkusal, Y. and Yenicerioglu, O.: A Comparison of p -dispersion heuristics, *Computers & Operational Research*, Vol.21, pp.1103–1113 (1994).
- [12] Fekete, S.P. and Meijer, H.: Maximum dispersion and geometric maximum weight cliques, *Algorithmica*, Vol.38, pp.501–511 (2004).
- [13] Frederickson, G.: Optimal algorithms for tree partitioning, *Proc. SODA 1991*, pp.168–177 (1991).
- [14] Hassin, R., Rubinstein, S. and Tamir, A.: Approximation algorithms for maximum dispersion, *Operation Research Letters*, Vol.21, pp.133–137 (1997).
- [15] Horiyama, T., Nakano, S., Saitoh, T., Suetsugu, K., Suzuki, A., Uehara, R., Uno, T. and Wasa, K.: Max-min 3-dispersion problems, *Proc. COCOON 2019*, LNCS 11653, pp.291–300 (2019).
- [16] Ravi, S.S., Rosenkrantz, D.J. and Tayi, G.K.: Heuristic and special case algorithms for dispersion problems, *Operations Research*, Vol.42, pp.299–310 (1994).
- [17] 四家, 佐藤, 宮田, 中野: 円周上の max-min 4-dispersion 問題, 電子情報通信学会論文誌 D, J102D, No.10, pp.670–673 (2019).
- [18] Tsai, K.H. and Wang, D.W.: Optimal algorithms for circle partitioning, *Proc. COCOON 1997*, LNCS 1276, pp.304–310 (1997).
- [19] Wang, D.W. and Kuo, Y.S.: A study on two geometric location problems, *Information Processing Letters*, Vol.28, pp.281–286 (1988).

角田 倫久

令和 2 年群馬大学理工学部電子情報理工学科卒業. グラフアルゴリズムに興味を持つ.





宮田 洋行

平成 24 年東京大学大学院情報理工学系研究科博士課程修了，東北大助教を経て，現在，群馬大学助教．組合せ論の研究に従事．



中野 眞一 （正会員）

昭和 62 年東北大学大学院工学研究科博士前期課程修了．セイコーエプソン（株），東北大学助手，同助教授，群馬大学助教授を経て，現在，群馬大学教授．グラフアルゴリズムの研究に従事．