多値従属推論を成立せしめる属性集合条件について

竹島卓・国藤進・小林要
富士通・国際情報社会科学研究所

[1] 序言

本論文では，関係データモデルにおける統合性制約のひとつである多値従属性（MVD）の推論構造のもつ性質をMVDの推論を成立せしめる属性集合間の関係式として解析している．我々はこの関係式をMVDの属性集合条件式（ASC-MVD）と呼ぶ．このASC-MVDは，あるMVD文が与えられたMVD文の集合の閉包に属するか否かの判定のための必要十分条件を与えるばかりでなく，MVDの推論構造に関する知見を解析的に与えるものでもある．

我々は関係モデルにおける関係をその内包と外延との両側面から考えることができる．内包とは性質として把握される関係であって，それは可能な外延のもつ性質の共通集合である．一方，ひとつひとつの外延はいわゆる関係の実例としてとらえられる．モデル理論によれば，論理言語の文の解釈において，原子文である述語(文)に対してはある世界でひとつの関係（の外延）を割当てる．このことから可能な関係の集合としての関係の内包はひとつの述語に対応することになる．データベースに対する種々の制約はこのような述語達によって構成される論理的表明としてあらわされることになる．

MVDはこのような論理的表明のごく特殊な例である．その特殊性とは上に述べたようなMVDの論理的表明が1個の関係を解釈の領域とする（等号付の）一階述語論理の表明で表現できることである．（[2]節参照）このことは関数従属性（FD）や相互従属性（MD）などについても同様であって，FDやMDについても同様の議論でASC-FDやASC-MDなどが求められると考えられる．（ただし埋め込み多値従属性（EMVD）はこの限りでない．）

従属性はデータベースにおけるごく特殊な制約条件ではあるが，それが，関係演算・join とprojectionとの二つによる関係の情報無損失分解ができる条件となっている（[3]，[5]，[7]，[9]，[10]）ために，その性質がいろいろと調べられている．Delobel [5] はMVDを用いて関係を次々と分解して，階層構造を構成する方法（FOHD）を提案している．またFagin [9]は関係演算としてunionも考慮した場合の従属性ないし正規形についても言及している．

本論文ではMVDについて従来とは少し異る観点，ASC-MVD を用いてMVDの性質を解析したものである．

[2] 準備

2.1 関係

（属性とドメイン）属性の集合と呼ばれる有限集合 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ があり各々の属性にそのドメインと呼ばれる集合 $D_\alpha = \mathcal{D}om(\alpha)$ for $\alpha \in A$ （$D_\alpha \neq \emptyset$）が与えられているとする．

（タップルと関係）$d_\alpha \in D_\alpha$ のとき $\{\langle \alpha, d_\alpha \rangle \mid \alpha \in A\}$ をA上のタップルという．通常，属性 α と値 d_α との順序的対応が文脈から知られるものとして単に n 組，

$<d_{a_1}, d_{a_2}, \cdots d_{a_n}>$ であらわす。 A上の関係とはA上のタップルの集合のことである。 タップルをn組であらわす記法に従えばA上の関係は $D_{a_1}\times D_{a_2}\times\cdots\times D_{a_n}$ なる直積の部分集合であるといえる。

(タップルの成分と射影) タップル $t=\{<\alpha,\delta> \mid \alpha\in A\}$ に対してそのα成分とは、$<\alpha,\delta>\in t$ となる δ のことでそれを $t.\alpha$ と書く。 また属性集合 X ($\subseteq A$) への t の射影とは $\{<\alpha,\delta> \mid \alpha\in X,\ <\alpha,\delta>\in t\}$ のことでありそれを $t.X$ であらわす。

2.2 多値従属

Rを属性集合A上の関係とする。 Aの任意の部分集合X, Yについてタップルの成分を用いて表明される次の命題をXからYへの多値従属(の表明)といい、$X \twoheadrightarrow Y$ と書く。

$$(\forall\lambda\mu)\Big(\bigwedge_{x\in X}\lambda.x=\mu.x \supset (\exists\nu)\Big(\bigwedge_{y\in X+Y}\nu.y=\lambda.y \ \wedge \bigwedge_{z\in\overline{X+Y}}\nu.z=\mu.z\Big)\Big) \qquad (1)$$

ここに λ,μ はRを走る変数であって、与えられた関係R(の外延)について表明(1)が真であるときRにMVD $X \twoheadrightarrow Y$ があるという，しからざるときMVD $X \twoheadrightarrow Y$ はないという。 記号論理のモデル論に従えば、(1)は(等号付)一階述語論理の文であり、Rは解釈の領域である。 厳密には(1)は、たとえば $\lambda.x \in Dom(x)$ であり $\lambda.x \notin R$ などのために本来は many sorted logic の文と考えるべきであるが、各 $x\in A$ 毎に述語 $x(\lambda,\mu)$ を $\lambda.x=\mu.x$ と定義し、等号に関する次の同値律の公理(i)(ii)(iii)を追加することによって一階論理の文と考えることにする。

(i) $x(\lambda,\lambda)$ (ii) $x(\lambda,\mu) \supset x(\mu,\lambda)$ (iii) $x(\lambda,\mu)\wedge x(\mu,\nu) \supset x(\lambda,\nu)$.

ただし、変数 λ,μ,ν は全て全称束縛されているものとし、$x\in A$ なる全ての x について(i)(ii)(iii)を追加する。 我々は、次のような略記法も用いる。

$$(\forall\lambda\mu)\Big(\lambda.X=\mu.X \supset (\exists\nu)\Big(\nu.(X+Y)=\lambda.(X+Y) \ \wedge \ \nu.(\overline{X+Y})=\mu.(\overline{X+Y})\Big)\Big), \qquad (2)$$

$$(\forall\lambda\mu)\Big([X](\lambda,\mu) \supset (\exists\nu)\Big([X+Y](\nu,\lambda) \ \wedge \ [\overline{X+Y}](\nu,\mu)\Big)\Big) \qquad (3)$$

(2)は(1)をタップルの射影を用いてあらわしたものであり、(3)は $\lambda.X=\mu.X$ などを $[X](\lambda,\mu)$ と略記したものである。 $[X](\lambda,\mu)=\bigwedge_{x\in X}x(\lambda,\mu)$ である。

2.3 節表現

本論文では属性集合に関する条件の導出には分解証明法を用いるが、そのとき節集合の表現が簡潔になるように上記(3)に対応した略表記を用いる。すなわち

$[X](\alpha,\beta)$ は節集合 $\{x(\alpha,\beta) \mid x\in X\}$ の略記，

$\sim[X](\alpha,\beta)$ は節 $\bigvee_{x\in X}\sim x(\alpha,\beta)$ の略記，

$\sim[X](\alpha,\beta) \vee [Y](\gamma,\delta)$ は節集合 $\{\bigvee_{x\in X}\sim x(\alpha,\beta) \vee y(\gamma,\delta) \mid y\in Y\}$ の略記とする。 定義から $\sim[\phi](\alpha,\beta)$ は空節すなわち恒偽命題をあらわす。

また、我々は集合の和・差・積をそれぞれ $+$, $-$, $\cdot$ であらわし，Xの補集合(Aに関する)を $\overline{X}$ であらわす。 Aを1, ϕ を0とも書く。

[3] 属性集合条件(ASC)

3.1 属性集合条件

MVDに限らず一般に関係R上の表明で属性集合毎に割り当てられた述語のみによって規定される表明を$A_1, A_2, \cdots, A_n$ $(n \geq 0)$とする。 これらから1コの表明A_0が結論できるものとする。 このときこれら$n+1$コの表明に関与している属性集合達が満足している・すべき条件，正確にいうならば推論可能なことと同等な条件を属性集合達について表現したものを属性集合条件(ASC)と呼ぶ。

特に，表明達がすべてMVDの表明であるときのASCをMVD属性集合条件(ASC-MVD)と呼ぶ。 本論文では単にASCといえばASC-MVDのことである。

3.2　基本戦略

ASCを求める場合，推論$A_1, A_2, \cdots, A_n \vdash A_0$は成立すべきものとして与えられている。 このことは，前件部の命題$A_1, \cdots, A_n$と帰結部の否定$\sim A_0$とから構成される節集合に充足不能性が要請されていることを意味する。 我々はMVDの文$A_1, A_2, \cdots, A_n, A_0$の特殊性から，充足不能性を証明するための証明法として，正の超導出(positive hyper resolution refutation, PHR)を採用した。 PHRの一階論理における完全性が証明されているので証明手続きをこれに限定してよい。所与の節集合の充足不能性の仮定からPHRによる空節の演えきが必ず存在する。ゆえにPHRの演えきの各パスで空節を導く可能性のある毎にその条件を求めるとそれらの条件の論理的選言が我々の定義したASCとなる。 一般に空節を導く可能性は無限にあり得るが，この問題の場合には，各可能性における条件の種類は有限個しかなく，演えきのパスに関する自然な順序付けで初めの有限個のパスで全ての条件が求まる。

PHPではresolutionの各stepは電子(陽電子)と呼ばれる正の節(複数可)と核と呼ばれる非正の節(単数)とから成るclashといわれる節集合からunificationの違い毎に唯ひとつの新たな正の節を導くか，あるいは空節を導くかのいずれかに導出が限定されている。 ゆえに，演えきの分岐が一般の場合よりはるかに少なくなっている。

さて，nコのMVDから1コのMVDを導く推論$X_1 \twoheadrightarrow Y_1, X_2 \twoheadrightarrow Y_2, \cdots, X_n \twoheadrightarrow Y_n \vdash X_0 \twoheadrightarrow Y_0$に関する節集合は次の$2(n+1)$コの節から成る。(略記法で)

$$\left.\begin{array}{ll} (i.0) & \sim[X_i](\lambda,\mu) \vee [X_i+Y_i](g_i(\lambda,\mu),\lambda) \\ (i.1) & \sim[X_i](\lambda,\mu) \vee [\overline{X_i+Y_i}](g_i(\lambda,\mu),\mu) \end{array}\right\} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

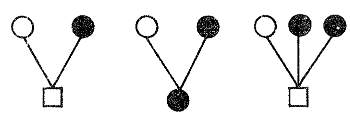
$$(0.0) \quad [X_0](\lambda^0,\mu^0)$$

$$(0.1) \quad \sim[X_0+Y_0](\nu,\lambda^0) \vee \sim[\overline{X_0+Y_0}](\nu,\mu^0)$$

ここに，λ^0, μ^0は定数記号，$g_i(\lambda,\mu)$はi番目のスコーレム関数である。

節集合を観察することにより，$(i.0)$と$(i.1)$とは共に非正非負の核候補，(0.0)はここで唯一の(陽)電子，(0.1)は負の核候補であり，空節をresolventとするclashの核は(0.1)以外にはないことなどがわかる。 また，これらの節はいずれもHorn節と呼ばれる特殊な節であることが特徴である。

多少の考察によりPHRの各stepは図1の3種の形しかないことがわかる。 図の○は核，●は陽電子，□は空節をあらわす。図1.aは，clashが●$=(0.0)$，○$=(0.1)$の場合のみに適用される。 図1.bは一般に已に得られているresolventを陽電子とし，第i番目の核$(i.0)$や$(i.1)$とのclashを構成する場合である。



(a)　(b)　(c)

図1.　PHRのclashの型

図1.cは第i番目のある適当なresolvent 2個を陽電子とし(0.1)を核とする空節を導く場合である．この段階に至るPHRのパスについてiコの前提が全て用いられるMVDの推論についてのASCの一条件が求まることになる．以下の節でこの戦略に従ったASCの導出を例示しよう．

[4] 基本的な場合のASCの導出

ここでは $\{E_1, E_2, \cdots, E_g : N\}$ でPHRのclashをあらわす．ここに，$E_1, E_2, \cdots, E_g$ は陽電子，Nは核である．

4.1 0前提の場合

与推論は $\vdash X_0 \twoheadrightarrow Y_0$．すなわち次の節集合が充足不能集合である．

(0.0) $[X_0](\lambda^0, \mu^0)$　　(0.1) $\sim[X_0+Y_0](\nu, \lambda^0) \vee \sim[\overline{X_0+Y_0}](\nu, \mu^0)$．

与えられた節は，正の節{(0.0)}，負の節{(0.1)}のみなのでclashを構成するのは{(0.0):(0.1)}の組合せのみである．しかもこのresolventは空節でなければならない．一方unifierは二通りあって，一方は $\nu := \mu^0$，他方は $\nu := \lambda^0$ である．各々について空節であるべき節が形式的に次のように求まる．

(00-0) $\sim[(X_0+Y_0)-X_0](\mu^0, \lambda^0)$　　(00-1) $\sim[(\overline{X_0+Y_0})-X_0](\lambda^0, \mu^0)$．

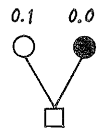


図2.
0前提の反ばく木

これらのそれぞれが空節であるべき必要十分条件は，それぞれの属性集合が ϕ であることである．(2.3 参照) したがって，

$\overline{X_0}Y_0 = 0$ ---- (4)　　$\overline{X_0}\,\overline{Y_0} = 0$ ---- (5)

0前提の場合これら以外にPHRが存在しないので求めるASCは(4)と(5)との選言として求まる．すなわち，

$\overline{X_0}Y_0 = 0$ or $\overline{X_0}\,\overline{Y_0} = 0$．　--- (7)

4.2 1前提の場合

次の節が充足不能集合である．

(0.0) $[X_0](\lambda^0, \mu^0)$，(0.1) $\sim[X_0+Y_0](\nu, \lambda^0) \vee \sim[\overline{X_0+Y_0}](\nu, \mu^0)$，
(1.0) $\sim[X_1](\lambda, \mu) \vee [X_1+Y_1](g_1(\lambda, \mu), \lambda)$，
(1.1) $\sim[$ 〃 $]($〃, 〃$) \vee [\overline{X_1+Y_1}]($ 〃 $, \mu)$．

第1段でclashの候補は，{(0.0):(0.1)}，{(0.0):(1.0)}，{(0.0):(1.1)}の3通り。これらのうち最初のものは0前提の場合に帰着する．第2，第3のものは新たな陽電子を1対ずつ生成するがその条件は共通に、

$X_1 - X_0 = 0$ --- (8)

である．unifier毎に次の陽電子の対を得る．

(0-0) $[X_1+Y_1](g_1(\mu^0, \lambda^0), \mu^0)$　for $\langle\lambda, \mu\rangle := \langle\mu^0, \lambda^0\rangle$
(0-1) $[X_1+Y_1](g_1(\lambda^0, \mu^0), \lambda^0)$　$\langle\lambda, \mu\rangle := \langle\lambda^0, \mu^0\rangle$
(1-0) $[\overline{X_1+Y_1}](g_1(\mu^0, \lambda^0), \lambda^0)$　$\langle\lambda, \mu\rangle := \langle\mu^0, \lambda^0\rangle$
(1-1) $[\overline{X_1+Y_1}](g_1(\lambda^0, \mu^0), \mu^0)$　$\langle\lambda, \mu\rangle := \langle\lambda^0, \mu^0\rangle$

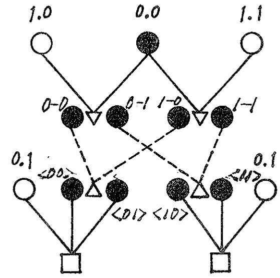


図3.
1前提の反ばく木

ここで式の識別子(w-u)のwはclashの核の区別であって $w=0$ は(1.0)を $w=1$ は(1.1)を核とすることを意味し，u は unifier の区別で，$u=0$ は $\langle\lambda, \mu\rangle := \langle\mu^0, \lambda^0\rangle$，$u=1$ は $\langle\lambda, \mu\rangle := \langle\lambda^0, \mu^0\rangle$ であることを意味する．

これらに等号の性質(2.2の同値律)を適用す

ると次の4個の陽電子を得る．

(<00>) $[(X_1+Y_1)X_0](g_1(\mu^0,\lambda^0),\lambda^0)$,　(<11>) $[(X_1+Y_1)X_0](g_1(\lambda^0,\mu^0),\mu^0)$,

(<01>) $[(\overline{X_1+Y_1})X_0](g_1(\mu^0,\lambda^0),\mu^0)$,　(<10>) $[(\overline{X_1+Y_1})X_0](g_1(\lambda^0,\mu^0),\lambda^0)$.

これらに引数が同じものはまとめるという略記法を適用すれば新しい陽電子として次の4個を得る．

(<0.0>) $[(\overline{X_1+Y_1})+X_0](g_1(\mu^0,\lambda^0),\lambda^0)$,　(<01>) $[(X_1+Y_1)+X_0](g_1(\mu^0,\lambda^0),\mu^0)$,

(<1.0>) $[(X_1+Y_1)+X_0](g_1(\lambda^0,\mu^0),\lambda^0)$,　(<11>) $[(\overline{X_1+Y_1})+X_0](g_1(\lambda^0,\mu^0),\mu^0)$.

ここで式の識別子<uv>のuはunifierの別を示し，vは式の第2引数の区別をする． $v=0$ は，第2引数がλ^0，$v=1$ はμ^0であることを示す。

この段階でclashの候補は{<0.0>,<01>:(0.1)} {<10>,<11>:(0.1)}, {<00>:(1.0)},{<0.0>:(1.1)},{<01>:(1.0)},{<01>:(1.1)},{<10>:(1.0)},{<10>:(1.1)},{<11>:(1.0)},{<11>:(1.1)} の10通りである． 前2者のresolventは空節になるべきものであり，それぞれunifierは $\nu_i=g_1(\mu^0,\lambda^0)$，$\nu_i=g_1(\lambda^0,\mu^0)$ であって，結果が空節になるべき必要十分条件は，それぞれ

$$(X_0+Y_0)-(\overline{X_1+Y_1}+X_0)=0 \ \& \ (\overline{X_0+Y_0})-(X_1+Y_1+X_0)=0, \qquad (9)$$

$$(X_0+Y_0)-(X_1+Y_1+X_0)=0 \ \& \ (\overline{X_0+Y_0})-(\overline{X_1+Y_1}+X_0)=0 \qquad (10)$$

となる。一方後者8clashからは16コの陽電子を得るがこれらはどれも $[X_1+Y_1](g_1(\alpha,\beta),\alpha)$ あるいは $[\overline{X_1+Y_1}](g_1(\alpha,\beta),\beta)$ の形でありα,βの一方は$g_1(\lambda^0,\mu^0)$か$g_1(\mu^0,\lambda^0)$，他方はλ^0かμ^0の形である．これらの節に等号の条件を適用しても $[X_1+Y_1+X_0](g_1(\alpha,\beta),\gamma)$ あるいは $[\overline{X_1+Y}+X_0](g_1(\alpha,\beta),\delta)$ （γ,δはλ^0かμ^0）の形であって，これらから空節が得られるための条件は，已に求めたものに含まれている．同様にこれらの節と(1.0),(1.1)とのclashをとることを繰返しても得られる条件は已に得られたものに含まれている．このため，ASCとして必要十分な条件は(8),(9),(10) として已に得られていることがわかる．（図3）

以上により1前提の場合のASCは (7) or((8) &((9) or (10))) となりこれを整理すると次のようになる。

$\overline{X_0}Y_0=0$ or $\overline{X_0}\,\overline{Y_0}=0$ or

$\overline{X_0}(X_1+(Y_0\oplus\overline{Y_1}))=0$ or $\overline{X_0}(X_1+(Y_0\oplus Y_1))=0$ (11),(12)

この選言のうち，前2者は0前提の場合に固有のものであり，後2者が1前提の場合に固有の条件である．

[5] n前提($n\geq1$)のASC

5.1 演えきのパスと漸化式

4.2の1前提の場合を$n(\geq1)$前提の場合に拡張して(11)や(12)に相当する式を得るためには各clashでの陽電子の生成関係を調べればよい．若干の考察によりn段のresolution stepと1段のrefutation stepとから成る任意の演えきのパスは図4の反ばく木のようにあらわされる．図4について少し説明する．まず核○に付された識別子(i.0)や(i.1)は，その核が3.2項(p3)の節集合中の同じ識別子をもつ節であることを示している．また，最上位にある電子●に付された識別子(0.0)も同項の節集合中の節(0.0)であることを示している．△印の両側の電子にはそれがどの演えきのパス上にあるかを識別するための添字列Q_iと$\bar{Q}_i$とが付される．その添字列を次のように定めよう．

$u_1, v_1, u_2, v_2, \cdots, u_i, v_i \cdots$ は0又は1のいずれかの値であるとする。

$Q_0 = \langle\,\rangle$ （空列）　$Q_i = \langle u_1, v_1, \cdots, u_i, v_i \rangle$ $(i \geq 1)$ で添字列を定めたとき、この添字列が付された電子は一般に次の形となる。

$E_{Q_i} = [S_{Q_i}](f_{Q_i}, \tau)$，ただし $\tau = \lambda^0$ if $l(Q_i)=0$, μ^0 if $l(Q_i)=1$.
ここに $l(Q_i)$ は列 Q_i の最後の要素（もしあれば）である。

Q_i $(i \geq 1)$ の意味はつぎのとおり。すなわち、Q_i が添えられた電子 E_{Q_i} を導くパス上のある j $(1 \leq j \leq i)$ 段において、$\langle \lambda, \mu \rangle := \langle t, \lambda^0 \rangle$ （tは適当なterm）なるunifierを用いたとき $u_j=0$，$\langle \lambda, \mu \rangle := \langle t, \mu^0 \rangle$ を用いたとき $u_j=1$。また各 v_j は等号の性質を用いて節をまとめたとき $[S](t, \lambda^0)$ （Sは適当な属性集合）と書かれるとき $v_j=0$，$[S](t, \mu^0)$ と書かれるとき $v_j=1$ とする。▽印の両側の電子は等号の性質を用いる前のもので互に0,1について相補的なunifierをもつことをあらわす。

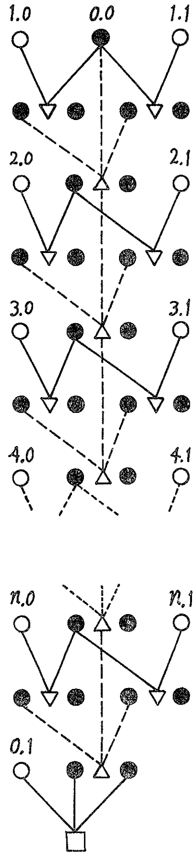


図4. n前提の反ばく木

一般に2値列 $Q = \langle g_1, g_2, \cdots, g_m \rangle$ $(m \geq 1)$ と0,1値 g について列の最後尾に働く演算を3種用意する。すなわち、

(i) $Q \cdot g = \langle g_1, g_2, \cdots, g_m, g \rangle$ （最後への追加），

(ii) $Q \oplus g = \langle g_1, g_2, \cdots, g_{m-1}, g_m \oplus g \rangle$ （最後へ$\oplus g$する），

(iii) $\overline{Q} = \langle g_1, g_2, \cdots, \overline{g}_m \rangle$ （最後の要素の反転），

とする。また、集合Sについて $S^g = S$ if $g=0$, $\overline{S}$ if $g=1$ と定義する。これらの演算を用いて先に定義した S_{Q_i} についての漸化式を得ることができる。（図5参照）

$$S_{Q_{m-1} u_m 0} = (\overline{X_m + Y_m})^{u_m} + S_{Q_{m-1}} + X_0 S_{\overline{Q}_{m-1}}, \qquad (13)$$

$$S_{Q_{m-1} u_m 1} = (\overline{X_m + Y_m})^{\overline{u}_m} S_{\overline{Q}_{m-1}} + X_0 S_{Q_{m-1}} + X_0 (\overline{X_m + Y_m})^{u_m}, \qquad (14)$$

ただし $m \geq 2$。また、第1段目のclashから次を得る。

$$S_{\langle u_1, 0 \rangle} = (\overline{X_1 + Y_1})^{u_1} + X_0, \quad S_{\langle u_1, 1 \rangle} = (\overline{X_1 + Y_1})^{\overline{u}_1} + X_0. \qquad (15),(16)$$

この漸化式から、任意の Q_n $(m \geq 1)$ に対して次が成立つ。

$$S_{Q_n} + S_{\overline{Q}_n} = 1, \quad S_{Q_n} \cdot S_{\overline{Q}_n} = X_0. \qquad (17),(18)$$

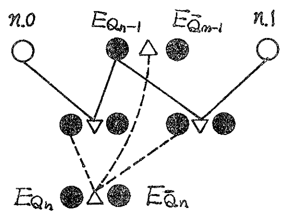


図5 第n段のresolution

これらの関係式を用いて S_{Q_n} の一般形が次のように求まる。

$$S_{Q_n} = X_0 + T_{Q_n}, \quad S_{\overline{Q}_n} = X_0 + \overline{T}_{Q_n} \quad (m \geq 1) \qquad (19),(20)$$

$$T_{Q_n} = Z_m^{p_m} \ll r_m \gg Z_{m-1}^{p_{m-1}} \ll r_{m-1} \gg \cdots \ll r_2 \gg Z_1^{p_1} \quad (m \geq 2) \qquad (21)$$

$$T_{\langle u_1 v_1 \rangle} = Z_1^{u_1 \oplus v_1} \qquad (22)$$

$Z_i = \overline{X_i + Y_i}$ $(1 \leq i \leq m)$,

$p_i = u_i \oplus v_i \oplus v_{i+1} \oplus \cdots \oplus v_m$, $r_i = v_i \oplus v_{i+1} \oplus \cdots \oplus v_m$,

$\ll r \gg$ はrの値によって定まる演算子で、$\ll 0 \gg$ は $+$，$\ll 1 \gg$ は $\cdot$ をあらわす。また、式(21)においては、演算子の優先順位はなく、右の方から先に結合するものと約束する。

T_{Q_n}については次のような漸化関係と性質が成立つ．

$$T_{Q_m} = T_{Q_{n-1}u_m v_m} = Z_n^{u_m \oplus v_m} \langle\langle v_m \rangle\rangle\, T_{Q_{m-1} \oplus v_m} \tag{23}$$

$$T_{\bar{Q}_n} = \bar{T}_{Q_n} \quad . \tag{24}$$

5.2　ASCの一般形

n段目のresolvent E_{Q_n}や$E_{\bar{Q}_n}$がとれる条件を$C_{Q_n}=0$，$C_{\bar{Q}_n}=0$とすると，

$$C_{Q_m} = C_{\bar{Q}_n} = X_m - S_{Q_{n-1} \oplus u_n} = X_n \cdot \bar{S}_{Q_{n-1} \oplus u_m} \quad (n \geq 2), \tag{25}$$

$$C_{Q_1} = C_{\bar{Q}_1} = X_1 - X_0 = X_1 \bar{X}_0 \ . \tag{26}$$

第1段からn段までを合わせると，

$$\Gamma_n \triangleq C_{Q_1} + \sum_{i=2}^{n} C_{Q_i} \quad \text{とおいて} \quad \Gamma_n = 0 \tag{27}$$

が条件となる．　これと，$n+1$番目で空節が導かれる場合に対する全条件は，

(i) $\Gamma_n = 0$　(ii) $\bar{Z}_0 - S_{Q_{n-1}u_n0} = 0$　(iii) $Z_0 - S_{Q_{n-1}u_m1} = 0$

の連言である．(i)，(ii)，(iii)をまとめると次を得る．

$$\bar{X}_0 \left(X_1 + \sum_{i=2}^{n} X_i \bar{T}_{Q_{i-1} \oplus u_i} + (\bar{Z}_0 \oplus T_{Q_{n-1}u_n0}) \right) = 0 \quad (n \geq 1) \tag{28}$$

あるいは，

$$\bar{X}_0 \left(X_1 + \sum_{i=2}^{n} X_i \bar{T}_{Q_{i-1} \oplus u_i} + (Y_0 \oplus T_{Q_{n-1}u_m0}) \right) = 0 \ . \quad (n \geq 1) \tag{29}$$

n前提の場合に固有のASCは，$Q_{n-1}u_n$がすべての長さ$2n-1$の0,1上の順列にわたる(29)式の選言をとり，さらに$X_1, Y_1, \cdots X_n, Y_n$の添字を1～n上のすべての順列にわたらせたものの連についての同様の選言を追加したものである．

[6] 検討

6.1　ASCの意味

0前提，1前提，2前提の各場合に固有の式の意味を考える．
0前提に固有の式　$\bar{X}_0 Y_0 = 0$　は　$X_0 \supseteq Y_0$　と同じであり，これはいわゆるMVDの射影則を意味している．　もうひとつの式　$\bar{X}_0 \bar{Y}_0 = 0$　は　$X_0 \supseteq \bar{Y}_0$　であり，これは，Y_0の補元についての射影則であるとみなせる．　またこれは$X_0 \supseteq \overline{X_0 + Y_0}$とも解釈でき，これはいわゆるMVDの直交性を射影則について適用したものである．　ここで強調しておきたいことは，MVDの射影則や，その補元についての法則がad hocな証明ではなく，組織的に調べられた結果の一例として得られているという点である．　すなわち，ASCの定義によれば，前提無しで成立つMVDは必ず上記のいずれかの式を満足せねばならないし，また少くとも一方を満足すればそれは無前提で成立つ。

表－1　2前提のASCの各条件

$\bar{X}_0(X_1 + X_2\bar{Y}_1 + \bar{Y}_0 \oplus \bar{Y}_1 Y_2)$	(31)
$\bar{X}_0($ 〃 + 〃 $+ Y_0 \oplus \bar{Y}_1 Y_2)$	(32)
$\bar{X}_0($ 〃 + 〃 $+ \bar{Y}_0 \oplus \bar{Y}_1 \bar{Y}_2)$	(33)
$\bar{X}_0($ 〃 + 〃 $+ Y_0 \oplus \bar{Y}_1 \bar{Y}_2)$	(34)
$\bar{X}_0(X_1 + X_2 Y_1 + \bar{Y}_0 \oplus Y_1 Y_2)$	(35)
$\bar{X}_0($ 〃 + 〃 $+ Y_0 \oplus Y_1 Y_2)$	(36)
$\bar{X}_0($ 〃 + 〃 $+ \bar{Y}_0 \oplus Y_1 \bar{Y}_2)$	(37)
$\bar{X}_0($ 〃 + 〃 $+ Y_0 \oplus Y_1 \bar{Y}_2)$	(38)

1前提で成立つ式は，やはり2つあった。

そのうちのひとつ，$\overline{X_0}(X_1+Y_0\oplus\overline{Y_1})=0$ は $X_0=X_1$，$Y_0=\overline{Y_1}$ で成立するから補元則（ふつうよりゆるい）を含んでいる。 この補元則には X_1，Y_1 について何ら制約がついていないことに注意していただきたい。（表2 の補元則参照） また、$X_0=X_1$，$Y_0=\overline{X_1+Y_1}$ でも成立する。 通常はこちらの方を補元則といっている。つぎに $\overline{X_0}(X_1+Y_0\oplus Y_1)$ は $X_0\supseteq X_1$，$Y_0=Y_1$ で成立するから，これはMVDの左辺へのaugmentation則を含んでいる。（右辺へのaugmentation則も含んでいる。）

このようにASCは既存のMVDの性質を包含していることが期待される（定義から明らか）がそのことを組織的に確認するために，既存のMVDの公理といわれるものについて，その前提と帰結部にある属性集合達の関係を求めておく必要がある。 この関係を右辺＝0 の形の標準形にした上での左辺の式のことをG式と呼ぼう。 これに対して，ASC の選言の各要素の式の左辺をF式と呼ぼう。するとと公理が正しいことと「(∃F式)(公理のG式=0 ⊃ F式=0)」とは同等である。この考えに従って公理とG式，F式との対応を(表2)に示した。（表1は2前提のASC）

表2　公理とそれを確認するG式とF式

出典	名称	公理式	上段 G式 下段 F式
2	reflex.	$Y\subseteq X \vdash X\twoheadrightarrow Y$	$\overline{X_0}Y_0$ $\overline{X_0}Y_0$
〃	complement	$A=X+Y+Z,\ YZ\subseteq X$ $X\twoheadrightarrow Y \vdash X\twoheadrightarrow Z$	$(X_0\oplus X_1)+\overline{X_0}(Y_0\oplus\overline{Y_1})$ $\overline{X_0}(X_1+Y_0\oplus\overline{Y_1})$
〃	augment.	$Z\subseteq W$; $X\twoheadrightarrow Y \vdash X+W\twoheadrightarrow Y+Z$	$\overline{X_0}X_1+\overline{X_0}Y_0\overline{Y_1}+\overline{Y_0}Y_1$ $\overline{X_0}(X_1+Y_0\oplus Y_1)$
〃	transitive	$X\twoheadrightarrow Y,\ Y\twoheadrightarrow Z$ $\vdash X\twoheadrightarrow Z-Y$	$(X_0\oplus X_1)+(Y_1\oplus X_2)+(Y_0\oplus\overline{Y_1}Y_2)$ $\overline{X_0}(X_1+X_2\overline{Y_1}+Y_0\oplus\overline{Y_1}Y_2)$
〃	pseudo-transitive	$X\twoheadrightarrow Y,\ Y+W\twoheadrightarrow Z$ $\vdash X+W\twoheadrightarrow Z-(Y+W)$	$\overline{X_0}(X_1+X_2\overline{Y_1}+\overline{Y_0}\overline{Y_1}Y_2)+X_0(\overline{X_1}\overline{X_2}+\overline{X_1}Y_0)+\overline{Y_0}\overline{X_2}Y_2+Y_0(X_2+\overline{Y_2})+\overline{X_2}Y_1$ $\overline{X_0}(X_1+X_2Y_1+Y_0\oplus\overline{Y_1}Y_2)$
〃	union	$X\twoheadrightarrow Y,\ X\twoheadrightarrow Z$ $\vdash X\twoheadrightarrow Y+Z$	$(X_1\oplus X_2)+(X_2\oplus X_0)+(\overline{Y_0}\oplus\overline{Y_1}\overline{Y_2})$ $\overline{X_0}(X_1+X_2\overline{Y_1}+\overline{Y_0}\oplus\overline{Y_1}\overline{Y_2})$
〃	decompose -1	〃 $\vdash X\twoheadrightarrow Y-Z$	$(X_1\oplus X_2)+(X_2\oplus X_0)+(Y_0\oplus Y_1\overline{Y_2})$ $\overline{X_0}(X_1+X_2Y_1+Y_0\oplus Y_1\overline{Y_2})$
〃	〃 -2	〃 $\vdash X\twoheadrightarrow YZ$	$(X_1\oplus X_2)+(X_2\oplus X_0)+(Y_0\oplus Y_1Y_2)$ $\overline{X_0}(X_1+X_2Y_1+Y_0\oplus Y_1Y_2)$
〃	〃 -3	〃 $\vdash X\twoheadrightarrow Z-Y$	$(X_1\oplus X_2)+(X_2\oplus X_0)+Y_0\oplus\overline{Y_1}Y_2)$ $\overline{X_0}(X_1+X_2Y_1+Y_0\oplus\overline{Y_1}Y_2)$
7		$\vdash X\twoheadrightarrow 0$	Y_0 $\overline{X_0}Y_0$
〃		$X\twoheadrightarrow Y \vdash X\twoheadrightarrow\overline{X+Y}$	$(X_0\oplus X_1)+(Y_0\oplus\overline{X_0}\overline{Y_1})$ $\overline{X_0}(X_1+Y_0\oplus\overline{Y_1})$
〃		$YU=0$, $X\twoheadrightarrow Y,\ U\twoheadrightarrow V \vdash X\twoheadrightarrow YV$	$(X_0\oplus X_1)+X_2Y_1+(Y_0\oplus Y_1Y_2)$ $\overline{X_0}(X_1+X_2Y_1+Y_0\oplus Y_1Y_2)$

6.2　ASCの特徴

ASCは属性集合であらわし得る表明ついての演えきを可能ならしめる属性間の関係と定義した。この限りではMVDのみならずFDやMDあるいは、join dependency（Fagin [9]）についてもそれらに特有のASCが求まる可能性がある。MVDの場合（FDの場合も）有用な結論を導くための演えきを保証しているものは、所与の充足不能集合のHorn性に基づいているようである。このことについては、より簡明なASCの演えきを求めるためにも現在研究中である。

さてNicholasの導入したMD [10] は、我々の流儀で書けば、

$$(\forall\lambda\mu)([X](\lambda,\mu)\supset[(\exists\nu)([Y](\nu,\lambda)\wedge[Z](\nu,\mu)\supset(\exists\xi)([X+Y](\xi,\lambda)\wedge[\overline{X+Y}](\xi,\mu))])$$

となり、これを節形式にすればやはりHorn節になる。そこでMDについても効果的にASC-MDが計算できる可能性があり、2値関数ではおそらく扱いきれないといわれるMDについて組織的な調査ができると考えられる。このことは、従属性をASCで解析することのひとつの長所といえよう。

6.3　課題

我々のアプローチにより求めた、ASCが実際にMVDの推論の組織的な分類、解析に役立つことの一部は己にみた。我々はこれを詳細に検討することによって、より効果的なMVDの取扱いを目標としている。

FDやMVDが命題論理あるいはブール代数によって取扱えると便利であろうことは疑いない。FDについてはDelobel等[4]、Fagin [8]、竹島 [12] らがそのような取扱い法を示している。最近のDelobel等 [6] によればMVDと命題論理との間にもFDの場合を拡張した形の対応がつくが、MDについては困難であることが示されている。しかしながらMVDに対するDelobel等の対応付けは全く表層的であって、たとえばFDについて竹島が示したような指標集合あるいは述語のモデルといった対応を裏付ける機構が存在せず、その証明もMVDの公理系の完全性の仮定によった形式的なものである点に不満が残る。今FDとMVDとの中間にある表明 $(\forall\lambda\mu)([X](\lambda,\mu)\supset([X+Y](\lambda,\mu)\vee[\overline{X+Y}](\lambda,\mu)))$ を考えるとこれは、$P_X \triangleq \{\langle\lambda,\mu\rangle \mid [X](\lambda,\mu)\}$ なるモデル集合への対応によって、$\overline{P_X}+P_Y+P_{\overline{X+Y}}=1$ なるブール算となる。この表明はMVDにごく近いがMVDそのものではなく、この対応はそのままではMVDに拡張できない。我々はASCを求めることによりMVDの推論構造を詳しく解析する道具を得ているが、これをブール代数との対応の機構を解明するために用いるべく目下研究中である。

[7]　結言

我々は関係データモデルにおける多値従属性の推論構造を等号付一階述語論理とその上での分解証明法の一種である正の超導出法によって解析した。その結果MVDの推論を成立せしめる必要にして十分な属性間の関係を得た。

この関係のことを我々は多値従属の属性集合条件（ASC－MVD）と名付けた。このASC-MVDによって従来の公理といわれるものが正しいことが再確認できたばかりでなく、よりゆるい条件でもそれらの式が成立つ場合もあることや、公理同士の関連が相当明確になったことは大きな収穫である。

さらに、MVDとブール代数との対応の解明への応用や、MDについての同様の手法の適用が考えられる。

謝辞

研究上有益な討論と数多くのコメントをいただきました産業能率大の小林功武教授，横浜国大の有沢博助手をはじめデータベース理論委員会の方々に感謝いたします．　またDelobelの論文を紹介していただきました電総研の植村俊亮室長，筑波大穂鷹良介教授にお礼申し上げます．　日頃御指導いただき、また研究上のコメントをいただきました当研究所の北川敏男所長にもお礼申し上げます．

文献

[1] Armstrong, W.W. : "Dependency structures of data base relationships". Information Processing 74, pp.580-583, 1974.

[2] Beeri, C., Fagin, R. & Howard, J.H. : "A complete axiomatization for functional and multivalued dependencies in database relations". IBM Tech. Rept. RJ1977, San Jose, CA, 1977 (also Proc. ACM SIGMOD Conf., Toronto, August 1977, pp.47-61).

[3] Codd, E.F. : "Extending the data base relational model to capture more meaning". Proc. ACM SIGMOD 1979 International Conference on Management of Data, pp.161-169, May 1979.

[4] Delobel, C. & Casey, R.G. : "Decomposition of a database and the theory of boolean switching functions". IBM J. Res. Develop. vol.17,no.5, pp.374-386, Sept. 1973.

[5] Delobel, C. & Leonard,M. : "The decomposition process in a relational model". Data Structure Models for Information Systems, pp.57-80, 1975. (Proc. International Workshop held in Namur, Belgium, May 27-30, 1974).

[6] Delobel, C. & Parker, D.S. : "Functional and multi-valued dependencies in a relational database and the theory of boolean switching functions". RR No 142, Novembre 1978.

[7] Fagin, R. : "Multivalued dependencies and a new normal form for relational databases". ACM TODS, vol.2, no.3, pp.262-278, Sept. 1977.

[8] Fagin, R. : "Functional dependencies in a relational database and propositional logic". IBM J. Res. Develop., vol.21, no.6, pp.534-544, Nov. 1977.

[9] Fagin, R. : "Normal forms and relational database operators". Proc. ACM SIGMOD 1979 International Conference on Management of Data, pp.153-160, May 1979.

[10] Nicolas, J.M. : "Mutual dependencies and some results on undecomposable relations". Proc. 4-th VLDB Conference, Berlin, Sept. 1978, pp.360-367.

[11] Takeshima, T., Kunifuji, S. & Kobayashi, K. : "On the isomorphism between functional/multivalued dependency and propositional logic". (in Japanese) Proc. AL79-45 The Institute of Electronics and Communication Engineers of Japan, pp.31-38, Sept. 1979.

[12] Takeshima, T. : "On the treatment of functional dependencies in a relational database schema using boolean equations". (in Japanese) Proc. DBMS6-2 Information Processing Society of Japan, March 1978.