

パリティ因子のための二部的カテドラル標準分解

喜多 奈々緒^{1,a)}

概要: グラフの T -ジョインは完全マッチングの一般化に相当する古典的な概念である。一方、マッチング理論においては標準分解と呼ばれる一連の構造定理がその基盤を成す。したがって完全マッチングと T -ジョインのアナロジカルな関係に基づき T -ジョインのための標準分解を与えることによってその理論基盤を構築することが期待できる。本研究ではこのような狙いのもと、 T -ジョインのための二部グラフの標準分解を与える。マッチングのための二部グラフの標準分解としては Dulmage-Mendelsohn 分解が知られており、一方で非二部グラフの標準分解としてはカテドラル分解が知られる。本研究において、二部グラフの T -ジョインはマッチングとは異なる T -ジョイン特有の性質を持ち、Dulmage-Mendelsohn 分解より複雑でありかつカテドラル分解と似て非なる標準分解によって構造を把握されることを明らかにする。

Bipartite Cathedral Canonical Decomposition for Parity Factors

1. はじめに

1.1 最小ジョイン問題

グラフの T -ジョイン [15] はマッチング理論 [14] における古典的な対象であり、これは 1-因子（完全マッチング）の概念を偶奇性の観点で一般化したものに相当する。グラフと点の集合 T が与えられたとき、枝の集合 F が T -ジョインであるとは、 T のいかなる点についても F の枝が奇数本接続しており、 T に含まれない点には F の枝が偶数本接続していることをいう。グラフの T -ジョインは、各連結成分が T の点を偶数個含むとき、かつそのときに限り存在する。この条件を満たすようなグラフ G と点の集合 T の対 (G, T) はグラフト (graft) と呼ばれ、 G の T -ジョインはグラフト (G, T) のジョインとも呼ばれる。本稿では主に後者の記法を用いる。グラフトにおいては、最小ジョイン、すなわち最小の枝数からなるようなジョインが関心の対象となる。グラフ G が特に 1-因子を持つグラフであり T がその点集合であるとき、枝の集合 F が 1-因子であることとジョインであることは同値となる。すなわち、グラフトは 1-因子を持つグラフの一般化であり、最小ジョインは 1-因子の一般化であるといえる。

また、グラフの最小ジョイン問題は無向グラフ上の様々

な経路問題を従えることが知られている。例えば、無向グラフにおける 2 点間の最短経路問題や、中国人配達夫問題 (Chinese Postman Problem) は最小ジョイン問題として定式化される。また、ジョインは Tutte の 4-整数流予想などグラフ理論の古典的未解決問題と関連が深い。

グラフトと最小ジョイン問題はこのように古くから重要な問題として関心を集めており、主にマッチング理論の観点からその解明がなされてきた。しかし 1-因子やその他の種類の古典的な因子と比べ、ジョインは特異な性格を持つことが認識されており、未解明の部分も多い。

1.2 マッチング理論と標準分解

1-マッチングの理論においては総称して標準分解 (canonical decomposition) [14]、と呼ばれる一連の構造定理が理論基盤をなす。標準分解として Gallai-Edmonds 分解や Dulmage-Mendelsohn 分解をはじめいくつかの種類のものが知られているが、いずれも与えられたグラフに対して一意に定まる分割を定め、その分割でグラフが持つ全ての最大 1-マッチングの構造を一括して記述する性格を持つ。このような性格ゆえに標準分解たちは 1-マッチングの理論において算法および構造研究両面から強力かつ汎用的な道具として機能してきた。

既存の標準分解としては、Gallai-Edmonds 分解 [4], [5]、古典的および一般化 Kotzig-Lovász 分解 [6], [7], [10], [11], [12], [13]、Dulmage-Mendelsohn 分解 [1], [2], [3]、カテド

¹ 東京理科大学理工学部
〒 278-0022 千葉県野田市山崎 2641

^{a)} kita@rs.tus.ac.jp

ラル分解 [6], [7] が知られている. まず Gallai-Edmonds 分解は, 最大 1-マッチングの欠損部分に注目しグラフ構造を記述するものであり, 本質的に 1-因子を持たないグラフに対する構造定理である. 後に続く標準分解は本質的に 1-因子を持つグラフあるいはその特殊クラスを対象とする. 因子成分は 1-因子を持つグラフの構成単位である. すなわち 1-因子を持つグラフは一般に因子成分とその間をつなぐ枝から構成される. これらの標準分解は因子成分の内部構造や因子成分がどのように全体を構成するかを明らかにすることによって 1-因子の性質を明らかにする. 古典的および一般化 Kotzig-Lovász 分解は点集合の上にある同値関係を入れることによって因子構造を把握する. 古典的 Kotzig-Lovász 分解 [10], [11], [12], [13] は因子連結グラフと呼ばれる 1-因子を持つグラフのうち特殊な条件を満たすクラスを対象とし, 一般化 Kotzig-Lovász 分解 [6], [7] はその 1-因子を持つ一般のグラフに対する一般化である. Dulmage-Mendelsohn 分解はカラークラスの存在を前提として, 因子成分が全体を構成する規則をある半順序で特徴づけることによって二部グラフ特有のマッチング構造を記述する. カテドラル分解は 1-因子を持つ一般のグラフを対象とする総合的な標準分解である. これは因子成分が全体を構成する非二部的な規則を半順序で特徴づけるとともに, 一般化 Kotzig-Lovász 分解を理論の構成要素とする.

1.3 最小ジョイン問題のための標準分解理論

したがって 1-因子と最小ジョインのアナロジカルな関係を踏まえれば, グラフの標準分解を得ることによって最小ジョイン研究の基盤を確立できることが期待できる. グラフは 1-因子を持つグラフの一般化であるから, 1-因子を持つグラフに対する非自明な構造を記述する標準分解をまずグラフに対するものへと一般化する必要がある. したがって, 古典的または一般化 Kotzig-Lovász 標準分解, Dulmage-Mendelsohn 標準分解, カテドラル標準分解のグラフ版を得ることを目指すべきである. そのようなものとしてまず Sebö により古典的 Kotzig-Lovász 標準分解のグラフ版への一般化が提案された. また, Kita [8] は一般化 Kotzig-Lovász 標準分解のグラフ版への一般化を提案した.

1.3.1 Dulmage-Mendelsohn 分解と二部グラフ

また, Kita [9] は二部グラフのための Dulmage-Mendelsohn 分解を与えた. 二部グラフから成るグラフは二部グラフと呼ばれる. また, グラフの構成単位たる因子成分は容易に定義される. ここでは Dulmage-Mendelsohn 分解と同様に因子成分がどのようにグラフ全体を構成しているかを特徴づけるべく, 二部グラフの因子成分の間に, 1-因子の Dulmage-Mendelsohn 分解における半順序の一般化となるある二項関係を定義し, これが半順序であることを示すことによって Dulmage-Mendelsohn 分解の一般化を達成した.

しかし, Kita [9] による二部グラフの Dulmage-Mendelsohn 分解では捉えきれない最小ジョインの性質がある. すなわち, 二部グラフの標準分解が達成すべきこととして, 因子成分による二部グラフの構成的特徴付け, およびマッチング理論において重要である増加道の特徴付けがあるが, これらは Kita [9] によっては捉えきれない. すなわち, 二部グラフの最小ジョインには二部グラフの 1-因子にはない最小ジョイン特有の複雑な性質が示唆される. したがって因子成分を構成単位として二部グラフにおける最小ジョインの構造を把握するためには, Dulmage-Mendelsohn 的關係に比してより広く多様な構造を捉える必要があるといえる.

1.4 本研究: 二部的カテドラル分解

これに対して本研究では二部グラフ特有の性質を捉える新たな標準分解を与える. すなわち, 本研究では因子成分の関係を表現する新たな二項関係を導入し, これが半順序であることを示す. この二項関係は Kita [9] で与えた二項関係を包含するゆえ, 本研究において導出した成果は Kita [9] を含意しており, したがって二部グラフにおける Dulmage-Mendelsohn 的構造を捉えるとともに, 先行研究では捉えきれなかった構造を把握する. すなわち, さらに任意の二部グラフの構造を因子成分から構成的に特徴づけることを可能にする. また, 本研究の成果においては増加道の構造が特徴づけられる.

ここで得られた因子成分による二部グラフの構成は, カテドラル標準分解に似て非なる構造を持つ. カテドラル標準分解は 1-因子を持つ一般のグラフにおいて因子成分による全体の構成を因子成分の間のある半順序関係で以って捉える. この構造は非二部グラフ特有の構造であり二部グラフにおいては非自明には現れない構造であるが, 二部性を捉えることができるカテドラル分解のそれに似て非なる半順序関係を見出すことによって二部グラフ特有の構造を特徴づけることができる. したがって本研究で与える二部グラフの標準分解を二部的カテドラル標準分解と呼ぶ. また, 二部的カテドラル標準分解はグラフの一般化 Kotzig-Lovász 分解と独立に与えられるが, 前者の半順序構造と後者による点集合の分割は互に関連することが示される.

二部的カテドラル標準分解を導出するにあたっては, Sebö [16] によるグラフの距離定理を用いることによって, 一般の二部グラフに対する問題をコームとよばれる特殊な二部グラフの問題へと帰着する. グラフとある最小ジョイン F が与えられたとき, 枝重み w_F を $e \in F$ に対しては $w_F(e) = -1$, 一方 $e \notin F$ に対しては $w_F(e) = 1$ と定義し, さらにこの枝重みについて 2 点間の距離を定義することができる. この距離に関する構造定理を Sebö が与えており, これは Sebö の距離定理と呼ばれる. 距離定理に

よって、与えられた任意の二部グラフに対し、カラークラスのアナロジーとなる集合をひとつ固定することによって、一般の二部グラフはコームと呼ばれる特殊な二部グラフの再帰的な一意和として表現される。したがって任意の二部グラフに対して標準分解を与えることはコームに対して標準分解を与えることに帰着される。この観察に基づき、本研究ではコームの標準分解を与えることによって一般の二部グラフの標準分解を与える。

2. グラフトとジョイン

ここではグラフとジョインについての基本的な定義を与える。

定義 1. グラフ G と点の集合 $T \subseteq V(G)$ に対し、枝の集合 $F \subseteq E(G)$ が T -ジョインであるとは、任意の点 $v \in V(G)$ について、 v が T の点ならば F の枝が奇数本接続しており、そうでなければ偶数本接続していることをいう。グラフ G の T -ジョインは対 (G, T) のジョインとも呼ばれる。さらに G の各連結成分が T の点を偶数個持つとき対 (G, T) はグラフと呼ばれる。

観察 1. 対 (G, T) はグラフであるとき、またそのときに限りジョインを持つ。

グラフ (G, T) における最小ジョインに含まれる枝の本数を $\nu(G, T)$ で表す。

定義 2. グラフト (G, T) において最小ジョインに含まれる枝は許容枝と呼ばれる。二点 u, v 間に許容枝のみで構成されるパスが存在するとき u と v は因子連結と呼ばれる。あらゆる2点が因子連結であるようなグラフは因子連結であるという。グラフにおいて極大な因子連結部分グラフは因子成分と呼ばれる。グラフ (G, T) の因子成分の集合を $\mathcal{G}(G, T)$ で表す。

定義 3. グラフト (G, T) について、 G がカラークラス A と B から成る二部グラフであるとき、 (G, T) を二部グラフと呼び、さらに A と B をグラフ (G, T) のカラークラスと呼ぶ。また、 G がカラークラス A と B から成る二部グラフであるようなグラフ (G, T) に対し、 $(G, T; A, B)$ で以ってカラークラスに非対称な順序が付与された二部グラフを表す。

定義 4. グラフト (G, T) と $X \subseteq V(G)$ に対し、 $|T \cap X|$ が奇数であるときグラフ $(G/X, T \setminus X \cup \{x\})$ 、 $|T \cap X|$ が偶数であるときグラフ $(G/X, T \setminus X)$ を、 (G, T) の X による縮約と呼び、 $(G, T)/X$ で表す。また、任意の $H \in \mathcal{G}(G, T)$ に対し $X \cap V(H) \neq \emptyset$ が $V(H) \subseteq X$ を含意するとき、 $(G[X], T \cap X)$ はグラフであり、これを $(G, T)[X]$ で表す。

3. コームおよび準コーム

定義 5. 二部グラフ $(G, T; A, B)$ について、 $B \subseteq T$ かつ $\nu(G, T) = |B|$ が成り立つとき、これをコームと呼ぶ。二

部グラフ $(G, T; A, B)$ について、 $\nu(G, T) = |B \cap T|$ が成り立つときこれを準コームと呼ぶ。コームまたは準コーム $(G, T; A, B)$ に対し、 A を背集合、 B を函集合と呼ぶ。

定義 6. 連結な準コーム $(G, T; A, B)$ と $r \in B \setminus T$ が、あらゆる $v \in B \setminus \{r\}$ について $\nu(G, T \Delta \{r, v\}) = \nu(G, T)$ を満たすとき、これを r を起点とする臨界的準コームと呼ぶ。

4. Sebö の距離構造

(G, T) をグラフとし、 F をその最小ジョインとする。パス P に対しその F -重みを $|E(P) \setminus F| - |E(P) \cap F|$ で以って定義する。二点 $x, y \in V(G)$ に対し、 $\lambda(x, y; F; G, T)$ で以って x と y の間の F -重み最小パスの値とし、 x と y の間の F -距離と呼ぶ。

事実 1. F -距離の値は F に依らない。

したがって $\lambda(x, y; F; G, T)$ を $\lambda(x, y; G, T)$ と略記する。

以下は Sebö の距離定理より観察される。

定理 1. 二部グラフ $(G, T; A, B)$ に対し、以下を見たす集合 $X \subseteq A$ が存在する。

- (i) $G - X$ の連結成分の集合を $\mathcal{K}$ とすると、いずれの $K \in \mathcal{K}$ も T の点を奇数個含む。
- (ii) $\mathcal{K} = \{K_1, \dots, K_l\}$ 、ただし $l \geq 1$ とすると、 $(G, T)/K_1/\dots/K_l$ は X を背集合、 $\{k_1, \dots, k_l\}$ を函集合とするコームである。ただし $i \in \{1, \dots, l\}$ について k_i は K_i に対応する縮約点を表す。
- (iii) 各 $K \in \mathcal{K}$ について、 X の近傍であるような点 $r_K \in B \cap V(K)$ が存在し、 $(K, (T \cap K) \Delta \{r_K\})$ は任意の点 $v \in V(K)$ に対し $\lambda(r_K, v; K, (T \cap K) \Delta \{r_K\}) \leq 0$ を満たす。

また逆に、任意のコームと (iii) の条件を満たす二部グラフの集合 $\mathcal{K}$ から上記の操作の逆を辿ることでグラフ (G, T) を構成することができる。

5. グラフトの一般化 Kotzig-Lovász 分解

定義 7. グラフト (G, T) の2点 $u, v \in V(G)$ に対し、 $u = v$ または u と v は同じ因子成分に含まれかつ $\nu(G, T) = \nu(G, T \Delta \{u, v\})$ を満たすとき $u \sim_{(G, T)} v$ であると定義する。

定理 2 (Kita [8]). $\sim_{(G, T)}$ は $V(G)$ 上の同値関係である。

商集合 $V(G)/\sim_{(G, T)}$ を $\mathcal{P}(G, T)$ で表す。また、 $H \in \mathcal{G}(G, T)$ に対し、 $V(H)$ の分割をなす同値類の族を $\mathcal{P}(H; G, T)$ で表す。この商集合は (G, T) の一般化 Kotzig-Lovász 分解と呼ばれる。

6. 二部的カテドラル標準分解

定義 8. $(G, T; A, B)$ をコームグラフとし、 $G_1, G_2 \in \mathcal{G}(G, T)$ とする。このとき $G_1 \preceq G_2$ であるとは、以下を満たすような集合 $X \subseteq V(G)$ が存在することと定義する。

- (i) $V(G_1) \cup V(G_2) \subseteq X$ 。

- (ii) 任意の $H \in \mathcal{G}(G, T)$ について, $V(H) \cap X \neq \emptyset$ は $V(H) \subseteq X$ を含意する.
- (iii) $(G, T; A, B)[X]/G_1$ は $A \setminus V(G_1)$ を背集合, $B \setminus V(G_1) \cup \{g_1\}$ を歯集合とする準コームであり, かつ g_1 を起点として臨界的である. ただしここで g_1 は G_1 に対応する縮約点を指す.

定理 3. 任意のコームグラフ $(G, T; A, B)$ に対し, $(\mathcal{G}(G, T), \preceq)$ は半順序集合である.

半順序集合 $(\mathcal{G}(G, T), \preceq)$ をコーム $(G, T; A, B)$ の二部的カテドラル分解と呼ぶ. さらに次々節で示すように, 二部グラフの再帰構造において登場するコームの特徴付けが二部的カテドラル分解を用いて成されるため, 距離定理と組み合わせることによりこれは一般の二部グラフの標準分解を与える.

二項関係 $\preceq$ は Kita [9] で与えられた Dulmage-Mendelsohn 的半順序を含む. したがって定理 3 は Kita [9] の主結果を含む.

7. 上界のカテドラル構造

因子成分 $H \in \mathcal{G}(G, T)$ に対し, $\preceq$ に関する H の狭義上界の集合を $\mathcal{U}(H)$ で表す. $\mathcal{U}(H)$ に含まれる点の集合を $U(H)$ と表す. グラフの二部的カテドラル分解と一般化 Kotzig-Lovász 分解は独立に定義および導出されるが, 以下のような非自明な相互関係がある.

定理 4. $(G, T; A, B)$ をコームとする. $H \in \mathcal{G}(G, T)$ とする. $G[U(H)]$ の各連結成分 K に対し, $S \in \mathcal{P}(H; G, T)$ かつ $S \subseteq V(H) \cap B$ である同値類 S が存在して, K の H に対する近傍は全て S に含まれる.

8. 再帰構造となるコームの特徴付け

定理 5. コームグラフ $(G, T; A, B)$ について以下は同値である.

- (i) ある $r \in A$ が存在して全ての $x \in V(G)$ に対し $x \in A$ ならば $\lambda(x, r; G, T) = 0$ であり $x \in B$ ならば $\lambda(x, r; G, T) = -1$ が成り立つ.
- (ii) 半順序集合 $(\mathcal{G}(G, T), \preceq)$ には最小元 H が存在し, $r \in V(H) \cap A$ が成り立つ.

この定理と距離定理および定理 3 によって任意の二部グラフ標準分解が与えられる.

謝辞 本研究は JSPS 科研費 18K13451 によって補助を受けた.

参考文献

- [1] Dulmage, A.L., Mendelsohn, N.S.: Coverings of bipartite graphs. *Canadian Journal of Mathematics* 10, 517–534 (1958)
- [2] Dulmage, A.L., Mendelsohn, N.S.: A structure theory of bipartite graphs of finite exterior dimension. *Transactions of the Royal Society of Canada, Section III* 53,

- 1–13 (1959)
- [3] Dulmage, A.L., Mendelsohn, N.S.: Two algorithms for bipartite graphs. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics* 11(1), 183–194 (1963)
- [4] Edmonds, J.: Paths, trees and flowers. *Canadian Journal of Mathematics* 17, 449–467 (1965)
- [5] Gallai, T.: Maximale systeme unabhängiger kanten. *A Magyar Tudományos Akadémia: Intézetének Közleményei* 8, 401–413 (1964)
- [6] Kita, N.: A new canonical decomposition in matching theory, under review
- [7] Kita, N.: A partially ordered structure and a generalization of the canonical partition for general graphs with perfect matchings. In: Chao, K.M., Hsu, T.s., Lee, D.T. (eds.) 23rd Int. Symp. Algorithms Comput. ISAAC 2012. *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 7676, pp. 85–94. Springer (2012)
- [8] Kita, N.: Parity factors I: General Kotzig-Lovász decomposition for grafts. *arXiv preprint arXiv:1712.01920* (2017)
- [9] Kita, N.: Bipartite graft I: Dulmage-Mendelsohn decomposition for combs. *arXiv preprint arXiv:2007.12943* (2020)
- [10] Kotzig, A.: Z teórie konečných grafov s lineárnym faktorom. I (*in slovak*). *Mathematica Slovaca* 9(2), 73–91 (1959)
- [11] Kotzig, A.: Z teórie konečných grafov s lineárnym faktorom. II (*in slovak*). *Mathematica Slovaca* 9(3), 136–159 (1959)
- [12] Kotzig, A.: Z teórie konečných grafov s lineárnym faktorom. III (*in slovak*). *Mathematica Slovaca* 10(4), 205–215 (1960)
- [13] Lovász, L.: On the structure of factorizable graphs. *Acta Mathematica Hungarica* 23(1–2), 179–195 (1972)
- [14] Lovász, L., Plummer, M.D.: *Matching Theory*. AMS Chelsea Publishing (2009)
- [15] Schrijver, A.: *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency*. Springer-Verlag (2003)
- [16] Sebő, A.: Undirected distances and the postman-structure of graphs. *J. Comb. Theory, Ser. B* 49(1), 10–39 (1990)