

アフィン・ワイル群に関するゲームの長さについて

安福 智明^{1,a)} 茂木 祐紀^{2,b)} 多田 将人^{2,c)}

概要：Numbers Game のゲームの長さは、アフィン・リー代数の理論を用いて、理論上計算可能であることが知られている．今回我々は、別のアプローチからこのゲームの長さについて考察し、頂点の個数が 3 つの場合の Numbers Game において、ゲームの長さの計算手法を考案した．

キーワード：ナンバーズゲーム，リー代数

On the length of the game which related the Affine Weyl group

TOMOAKI ABUKU^{1,a)} YUKI MOTEGI^{2,b)} MASATO TADA^{2,c)}

Abstract: It is known that the length of the Numbers Game can be computed theoretically using Affine Lie algebra theory. In this study, we considered the length of the game from a different approach and devised a method to calculate the length of the game in the Numbers Game with three vertices.

Keywords: Numbers Game, Lie Algebra

1. はじめに

1.1 Numbers Game

Numbers Game とは、古くから知られている一人遊びのゲームである．

開始局面は、図のように円形に配置した n 個 ($n \geq 3$) の○印の中に数 $a_i \in \mathbb{Z}$ ($i = 0, \dots, n-1$) が書き込まれている状態である（ただし、 $\mathbb{Z}$ は整数全体の集合）．

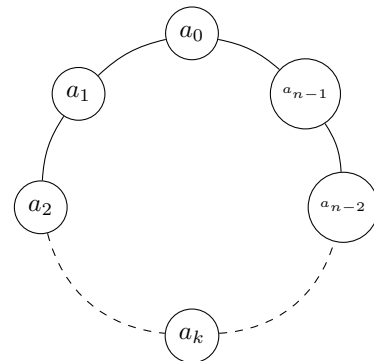
プレイヤーは次の操作を行う．

- 番号 $i \in \{0, \dots, n-1\}$ を一つ選ぶ．
- i にある数 a_i を、 a_i と隣接する 2 つの頂点の数 a_j ($j \equiv i \pm 1 \pmod{n}$) に加える．
- a_i を $-a_i$ に変更する．

すなわち、変更する場所のみを書き出すと、

$$(a_{i-1}, \underline{a_i}, a_{i+1}) \rightarrow (a_{i-1} + a_i, -a_i, a_{i+1} + a_i)$$

である．



Numbers Game について、次の性質が知られている．

定理 1.1 ([2]). Numbers Game において、次が成り立つ．

- (1) 開始局面において、 $\sum_i a_i = k > 0$ のとき、ゲームの操作を有限回繰り返して、すべての i に対して $a_i \geq 0$ となるようにできる．
- (2) (1) において、特に負の数に対してゲームの操作を行う限り、その負の数の選び方に寄らずに常に一定のステップで、すべての i に対して $a_i \geq 0$ となるようにできる．
- (3) すべての i に対して $a_i \geq 0$ となるようにできたとき、その局面は一意である．

¹ 国立情報学研究所
National Institute of Informatics

² 筑波大学
University of Tsukuba

a) buku3416@gmail.com

b) y-motegi@math.tsukuba.ac.jp

c) t-d-masato@math.tsukuba.ac.jp

これらの性質は、Numbers Game の局面の図が $A_{n-1}^{(1)}$ 型のディンキン図形に対応しており、Numbers Game の操作が $A_{n-1}^{(1)}$ 型アフィン・ワイル群の作用に対応しているという事実から導かれる。

例 1.2. 開始局面が $(4, -2, -1)$ の場合.

- (はじめに -2 に手を打ったパターン) $(4, \underline{-2}, -1) \rightarrow (2, 2, \underline{-3}) \rightarrow (\underline{-1}, -1, 3) \rightarrow (1, \underline{-2}, 2) \rightarrow (\underline{-1}, 2, 0) \rightarrow (1, 1, \underline{-1}) \rightarrow (0, 0, 1)$.
- (はじめに -1 に手を打ったパターン) $(4, -2, \underline{-1}) \rightarrow (3, \underline{-3}, 1) \rightarrow (0, 3, \underline{-2}) \rightarrow (\underline{-2}, 1, 2) \rightarrow (2, \underline{-1}, 0) \rightarrow (1, 1, \underline{-1}) \rightarrow (0, 0, 1)$.

2. 主結果

Numbers Game において、開始局面 $(a_0, \dots, a_{n-1})$ の数の合計値 $\sum_i a_i = k$ は正であるとし、常にいずれかの負の数 $a_i < 0$ に対して操作を行い、すべての i に対して $a_i \geq 0$ となるようにする。このとき、得られるゲーム木の深さを“ゲームの長さ”と呼ぶ。

Numbers Game の局面 G に対し、その局面を開始局面としたときのゲームの長さを $\ell(G)$ とおく。

Numbers Game のゲームの長さは、アフィン・リー代数の理論を用いて（開始局面に対応するウェイトとのペアリングの値が負となる正ルートの個数を数え上げることで）、理論上計算可能であることが知られている。

今回我々は、別のアプローチからこのゲームの長さについて考察し、 $n = 3$ の場合の Numbers Game（すなわち $A_2^{(1)}$ 型のディンキン図形の場合）において、ゲームの長さを得ることができた。

まず、 $n = 3$ の場合の Numbers Game において、一般に成り立つ性質について述べる。

$G = (a, b, c)$ を各頂点の成分が $a, b, c \in \mathbb{Z}$ である Numbers Game の局面とする。ここで、 $k := a + b + c > 0$ と定める。 $A_2^{(1)}$ 型のとき、図形は 3 頂点となるため、局面 $G = (a, b, c)$ はその各頂点の成分を入れ替えたものと自然に同一視できる。すなわち、集合 $\{a, b, c\}$ 上の対称群の任意の元 σ （すなわち置換）に対し、 $(a, b, c) = (\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c))$ としてよい。

補題 2.1. 局面 (a, b, c) に対し、 $b + c < 0$ かつ $c < 0$ であるとする。このとき、 $\ell(a, b, c) = \ell(a - k, b, c + k) + 2$ が成り立つ。

Proof. $c < 0$ に手を打った後、 $b + c < 0$ に手を打つと、

$$\begin{aligned} (a, b, \underline{c}) &\rightarrow (a + c, \underline{b + c}, -c) \rightarrow (a + b + 2c, -b - c, b) \\ &= (c + k, a - k, b) \\ &= (a - k, b, c + k) \end{aligned}$$

したがって、 $\ell(a, b, c) = \ell(a - k, b, c + k) + 2$ である。□

定理 2.2. $t > 0$ とする。局面 $(k + t, 0, -t)$ に対し、 $t - 1$ を k で割った商を q とする。このとき、 $\ell(k + t, 0, -t) = 2q + 2$ が成り立つ。

Proof. 仮定より、 $(q + 1)k > t - 1 \geq qk$ が成り立つ。この不等式を変形して、 $(q + 1)k - t + 1 > 0 \geq qk - t + 1$ から、 $(q + 1)k - t \geq 0 > qk - t$ を得る。よって、補題 2.1 を繰り返し適用して、

$$\ell(k + t, 0, -t) = \ell(k + t - qk, 0, -t + qk) + 2q$$

を得る。

さらに、これに補題 2.1 を適用して、

$$\begin{aligned} &\ell(k + t - qk, 0, -t + qk) + 2q \\ &= \ell(t - qk, 0, -t + (q + 1)k) + 2q + 2 \end{aligned}$$

を得る。

ここで、 $t - qk > 0$ 、 $-t + (q + 1)k \geq 0$ であるから、 $(t - qk, 0, -t + (q + 1)k)$ は終了局面であり、 $\ell(t - qk, 0, -t + (q + 1)k) = 0$ 。したがって、 $\ell(k + t, 0, -t) = 2q + 2$ が成り立つ。□

定理 2.2 において、 $q = \lceil \frac{t}{k} \rceil - 1$ であるから、 $\ell(k + t, 0, -t) = 2\lceil \frac{t}{k} \rceil$ とも書ける。

次に、主定理を述べるために“短局面”と“長局面”の概念を導入する。

定義 2.3. 局面 P が $P = (a, b, c)$ ($a, b > 0$, $c < 0$) と表せるとする。

(a, b, c) が次の条件 (S) を満たすとき、 P は短局面であるという；

(S) $a + m$ が k の倍数となるような $m \in \mathbb{Z}$ ($0 \leq m < k$) に対して、 $b - 1, b - 2, \dots, b - m$ がすべて k の倍数でない。

局面 P が短局面でないとき、 P は長局面であるという。

なお、 $\{a + m \mid 0 \leq m < k\}$ の中に k の倍数がただ 1 つ存在することに注意しておく。

補題 2.4. 定義 2.9 は well-defined である。すなわち、 $a, b > 0$, $c < 0$ に対して、 (a, b, c) が条件 (S) を満たすことと (b, a, c) が条件 (S) を満たすことは同値である。

Proof. (a, b, c) が条件 (S) を満たすとする. このとき, 条件 (S) から $a+m$ が k の倍数となるような $m \in \mathbb{Z}$ ($0 \leq m < k$) に対して, $b-1, b-2, \dots, b-m$ はすべて k の倍数でない. ここで, $n \in \mathbb{Z}$ を $0 \leq n < k$ かつ $b-n$ が k の倍数となるような整数とする. $b-1, b-2, \dots, b-m$ がすべて k の倍数でないことから, n は 0 か m より大きい整数である. $n=0$ のとき, b は k の倍数なので, (b, a, c) は条件 (S) を満たすことがすぐにわかる. $n > m$ のとき, $a-(k-m)$ と $b+k-n$ もまた k の倍数である. また, $a+m > a-(k-m) > a-(k-n)$ から $a-1, a-2, \dots, a-(k-n)$ はすべて k の倍数でない整数である. よって, (b, a, c) は条件 (S) を満たす. 逆についても同様に示される. $\square$

ここで, $f: \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}^3$ を $f(a, b, c) = (a+1, b-1, c)$ と定める. 定義から, a が k の倍数であるとき, (a, b, c) は短局面である. また, b が k の倍数であるとき, ある $n \in \mathbb{Z}$ ($0 \leq n < k$) に対して $a+n$ が k の倍数であるとする. このとき, $f^n(a, b, c) = (a+n, b-n, c)$ であり, $b-1, b-2, \dots, b-n$ はすべて k の倍数でないことから, $f^m(a, b, c)$ ($0 \leq m \leq n$) はすべて短局面となる.

補題 2.5. 局面 P が $P = (a, b, c)$ ($a, b > 0, c < 0$) と表せるとする. このとき, (a, b, c) が次の条件 (L) を満たすときかつそのときに限り, P は長局面である;

(L) $b-m$ が k の倍数となるような $m \in \mathbb{Z}$ ($0 < m \leq k$) に対して, $a, a+1, \dots, a+m-1$ がすべて k の倍数でない.

Proof. (a, b, c) が条件 (L) を満たすとする. また, ある $n \in \mathbb{Z}$ ($0 \leq n < k$) に対して $a+n$ が k の倍数であるとする. このとき, $a, a+1, \dots, a+m-1$ がすべて k の倍数でないことから, $0 \leq m-1 < n$ を満たす. よって, $b-m$ は $b-1, b-2, \dots, b-n$ に含まれるので, (a, b, c) は条件 (S) を満たさない.

(a, b, c) が長局面であるとする. このとき, $a+m$ が k の倍数となるような $m \in \mathbb{Z}$ ($0 \leq m < k$) に対して, $b-1, b-2, \dots, b-m$ の中に k の倍数が存在する. 今, $b-n$ ($0 < n \leq m$) が k の倍数であるとする. このとき, $0 < n \leq k$ であり, かつ $a, a+1, \dots, a+m-1$ がすべて k の倍数でない. よって, (a, b, c) は条件 (L) を満たす. $\square$

例 2.6. $a, b > 0, c = -14, k = 4$ とする. このとき, 局面 (a, b, c) が短局面か長局面かについて, 以下ようになる.

(17, 1, -14)	長局面
(16, 2, -14)	短局面
(15, 3, -14)	短局面
(14, 4, -14)	短局面
(13, 5, -14)	長局面
(12, 6, -14)	短局面
(11, 7, -14)	短局面
(10, 8, -14)	短局面
(9, 9, -14)	長局面
(8, 10, -14)	短局面
(7, 11, -14)	短局面
(6, 12, -14)	短局面
(5, 13, -14)	長局面
(4, 14, -14)	短局面
(3, 15, -14)	短局面
(2, 16, -14)	短局面
(1, 17, -14)	長局面

系 2.7. 局面 $P = (a, b, c)$ に対して, $a, b > 0$ かつ $c < 0$ であるとする. このとき, $-c-1$ が k の倍数ならば, 局面 $P = (a, b, c)$ は短局面である.

Proof. 仮定より, $-c-1+k = a+b-1$ は k の倍数である. ここから, $a+m$ が k の倍数となるような $m \in \mathbb{Z}$ ($0 \leq m < k$) に対して, $b-m-1$ もまた k の倍数である. このとき, $b-m-1+k \geq b$ を満たすので, $b-1, b-2, \dots, b-m$ がすべて k の倍数でない. よって, 局面 $P = (a, b, c)$ は条件 (S) を満たすので, 短局面である. $\square$

定理 2.8. 局面 $P = (a, b, c)$ に対して, $a, b > 0$ かつ $c < 0$ であるとする. $-c-1$ を k で割った商を q とする. このとき,

- (1) P が短局面ならば, $\ell(P) = 2q+1$ である.
- (2) P が長局面ならば, $\ell(P) = 2q+2$ である.

Proof. (1),(2) をともに q に関する帰納法で示す. $-(q+1)k \leq c < -kq$ が成り立つことに注意する.

(1) $P = (a, b, c)$ を短局面とする.

$q=0$ のとき, $-k \leq c < 0$ が成り立つ. $P = (a, b, c)$ が短局面より, $a+m$ が k の倍数となるような $m \in \mathbb{Z}$ ($0 \leq m < k$) に対して, $b-1, b-2, \dots, b-m$ はすべて k の倍数でなく, 特に 0 ではない. よって, $(a', b', c) = f^m(a, b, c)$ とすると, a' は k の倍数であり, $b' > 0$ が成り立つ. このとき, $-k \leq c = k-a'-b'$ から $0 < a'+b' \leq 2k$ が成り立つ. ここで $b' > 0$ より, $a' = k$ であり, $b' = -c$ を得る. ここから,

$b + c = b' + m + c = m \geq 0$ が成り立つ。 $P = (b, a, c)$ と置き換えて同様の議論を行うことで、 $a + c \geq 0$ が成り立つ。 ここで、 $P = (a, b, c) \rightarrow (a + c, b + c, -c)$ であり、 $a + c, b + c \geq 0$ 、 $-c > 0$ を満たす。 よって $\ell(a + c, b + c, -c) = 0$ なので、 $\ell(a, b, c) = 1$ である。

$q = q'$ のときに $\ell(P) = 2q' + 1$ を満たすことを仮定して、 $q = q' + 1$ の場合について示す。 このとき、 $-(q' + 2)k \leq c < -(q' + 1)k$ が成り立つ。 ここで、 $a + b + 2c = k + c < -q'k \leq 0$ を満たすので、 $a + c < 0$ または $b + c < 0$ が成り立つ。 $b + c < 0$ を仮定する。 このとき、補題 2.1 より、 $\ell(a, b, c) = \ell(a - k, b, c + k) + 2$ を満たす。 $a - k > 0$ であることに注意する。 $(a - k, b, c + k)$ が短局面であるとすると、 $-(q' + 1)k \leq c + k < -q'k$ より帰納法の仮定を用いることができる。 よって、 $\ell(a, b, c) = \ell(a - k, b, c + k) + 2 = 2q' + 3 = 2(q' + 1) + 1$ が成り立つ。

以下、 $(a - k, b, c + k)$ が短局面であることを示す。 $P = (a, b, c)$ が短局面より、 $a + m$ が k の倍数となるような $m \in \mathbb{Z}$ ($0 \leq m < k$) に対して、 $b - 1, b - 2, \dots, b - m$ はすべて k の倍数でない。 このとき、 $a - k + m$ も k の倍数である。 よって、 $(a - k, b, c + k)$ は条件 (S) を満たすので、短局面である。

(2) $P = (a, b, c)$ を長局面とする。

$q = 0$ のとき、 $-k \leq c < 0$ が成り立つ。 $P = (a, b, c)$ が長局面より、 $b - m$ が k の倍数となるような $m \in \mathbb{Z}$ ($0 < m \leq k$) に対して、 $a, a + 1, \dots, a + m - 1$ はすべて k の倍数ではない。 よって、 $(a', b', c) = f^m(a, b, c)$ とすると、 b' は k の倍数である。 このとき、 $-k \leq c = k - a - b$ から $0 < a + b \leq 2k$ が成り立つ。 ここで $0 \leq b' < b \leq 2k$ より、 $b' = k$ または $b' = 0$ のいずれかである。

$b' = k$ であると仮定する。 このとき、 $a' + c = 0$ であり、ここから $a + c < 0$ を得る。 よって、補題 2.1 より、 $\ell(a, b, c) = \ell(a, b - k, c + k) + 2$ を満たす。 ここで、 $b > b' = k$ より $b - k > 0$ でありかつ $c + k \geq 0$ なので、 $\ell(a, b - k, c + k) = 0$ である。 よって、 $\ell(a, b, c) = 2$ である。

$b' = 0$ であると仮定する。 このとき、 $a + m = a' > a' + c = k$ であり、 $a, a + 1, \dots, a + m - 1$ がすべて k の倍数ではないことから、 $a > k$ を得る。 ここから、 $k - b - c > k$ であり、 $b + c < 0$ を満たす。 よって、補題 2.1 より、 $\ell(a, b, c) = \ell(a - k, b, c + k) + 2$ を満たす。 ここで、 $a - k > 0$ でありかつ $c + k \geq 0$ なので、 $\ell(a, b - k, c + k) = 0$ である。 よって、 $\ell(a, b, c) = 2$ である。

以上より、どちらの場合でも $\ell(a, b, c) = 2$ となることが示された。

$q = q'$ のときに $\ell(P) = 2q' + 2$ を満たすことを仮定して、 $q = q' + 1$ の場合について示す。 このとき、 $-(q' + 2)k \leq c < -(q' + 1)k$ が成り立つ。 ここで、

$a + b + 2c = k + c < -q'k \leq 0$ を満たすので、 $a + c < 0$ または $b + c < 0$ が成り立つ。 $b + c < 0$ を仮定する。 このとき、補題 2.1 より、 $\ell(a, b, c) = \ell(a - k, b, c + k) + 2$ を満たす。 $a - k > 0$ であることに注意する。 $(a - k, b, c + k)$ が長局面であるとすると、 $-(q' + 1)k \leq c + k < -q'k$ より帰納法の仮定を用いることができる。 よって、 $\ell(a, b, c) = \ell(a - k, b, c + k) + 2 = 2q' + 4 = 2(q' + 1) + 2$ が成り立つ。

以下、 $(a - k, b, c + k)$ が長局面であることを示す。 $P = (a, b, c)$ が長局面より、 $b - m$ が k の倍数となるような $m \in \mathbb{Z}$ ($0 < m \leq k$) に対して、 $a, a + 1, \dots, a + m - 1$ はすべて k の倍数ではない。 このとき、 $a - k, a + 1 - k, \dots, a + m - 1 - k$ もすべて k の倍数ではない。 よって、 $(a - k, b, c + k)$ は条件 (L) を満たすので、長局面である。 $\square$

局面 (a, b, c) ($a > 0, b, c < 0$) についても同様の議論を行うことができる。以下、証明などは割愛する。

定義 2.9. 局面 Q が $Q = (a, b, c)$ ($a > 0, b, c < 0$) と表せるとする。

(a, b, c) が次の条件 (S') を満たすとき、 Q は短局面であるという；

(S') $c - m$ が k の倍数となるような $m \in \mathbb{Z}$ ($0 \leq m < k$) に対して、 $b + 1, b + 2, \dots, b + m$ がすべて k の倍数でない。

局面 Q が短局面でないとき、 Q は長局面であるという。

なお、 $\{c - m \mid 0 \leq m < k\}$ の中に k の倍数がただ 1 つ存在することに注意しておく。

補題 2.10. 定義 2.9 は well-defined である。すなわち、 $a > 0, b, c < 0$ に対して、 (a, b, c) が条件 (S') を満たすことと (a, c, b) が条件 (S') を満たすことは同値である。

ここで、 $g : \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{Z}^3$ を $g(a, b, c) = (a, b + 1, c - 1)$ と定める。定義から、 c が k の倍数であるとき、 (a, b, c) は短局面である。また、 b が k の倍数であるとき、ある $n \in \mathbb{Z}$ ($0 \leq n < k$) に対して $c - n$ が k の倍数であるとする。このとき、 $g^n(a, b, c) = (a, b + n, c - n)$ であり、 $b + 1, b + 2, \dots, b + n$ はすべて k の倍数でないことから、 $g^m(a, b, c)$ ($0 \leq m \leq n$) はすべて短局面となる。

補題 2.11. 局面 Q が $Q = (a, b, c)$ ($a > 0, b, c < 0$) と表せるとする。このとき、 (a, b, c) が次の条件 (L') を満たすときかつそのときに限り、 Q は長局面である；

(L') $b + m$ が k の倍数となるような $m \in \mathbb{Z}$ ($0 < m \leq k$) に対して、 $c, c - 1, \dots, c - m + 1$ がすべて k の倍数でない。

例 2.12. $a = 20, b, c < 0, k = 3$ とする。このとき、局面

(a, b, c) が短局面か長局面かについて、以下ようになる。

$(20, -1, -16)$	長局面
$(20, -2, -15)$	短局面
$(20, -3, -14)$	短局面
$(20, -4, -13)$	長局面
$(20, -5, -12)$	短局面
$(20, -6, -11)$	短局面
$(20, -7, -10)$	長局面
$(20, -8, -9)$	短局面
$(20, -9, -8)$	短局面
$(20, -10, -7)$	長局面
$(20, -11, -6)$	短局面
$(20, -12, -5)$	短局面
$(20, -13, -4)$	長局面
$(20, -14, -3)$	短局面
$(20, -15, -2)$	短局面
$(20, -16, -1)$	長局面

参考文献

- [1] Grundy, P. M., “Mathematics and games, Eureka”, Vol. 2, pp. 6–9 (1939).
- [2] Shahar M., “Reflection Processes on Graphs and Weyl Groups” Journal of Combinatorial Theory, Series A 53, 128–142 (1990).
- [3] Siegel, A. N., “Combinatorial Game Theory”, American Mathematical Society, 2013.
- [4] Sprague, R. P., “Über mathematische Kampfspiele”, “Tôhoku Math. J., Vol. 41, pp. 438–444 (1935–36).
- [5] 上野健爾, 砂田利一, 新井仁之, “数学のたのしみ (表現論の素顔)”, 日本評論社, 2006.
- [6] 坂井公, “パズルの国のアリス (美しくも難解な数学パズルの物語)”, 日経サイエンス社, 2014.
- [7] 野海正俊, “パニルヴェ方程式-対称性からの入門-”, 朝倉書店, 2000.

系 2.13. 局面 $Q = (a, b, c)$ に対して, $a > 0$ かつ $b, c < 0$ であるとする. このとき, $a - 1$ が k の倍数ならば, 局面 $Q = (a, b, c)$ は短局面である.

定理 2.14. 局面 $Q = (a, b, c)$ に対して, $a > 0$ かつ $b, c < 0$ であるとする. $a - 1$ を k で割った商を q とする. このとき,
 (1) Q が短局面ならば, $\ell(Q) = 2q$ である.
 (2) Q が長局面ならば, $\ell(Q) = 2q + 1$ である.

したがって, 定理 2.2, 定理 2.8, 定理 2.14 より, $n = 3$ の場合の Numbers Game において, ゲームの長さを計算することができる.

3. まとめと今後の課題

今回我々は $n = 3$ の場合において, ゲームの長さを計算することができた. 引き続き $n \geq 4$ の場合について考察したい. しかし, $n \geq 4$ の場合においては局面の対称性が失われるため, 証明が複雑になることが予想される.

また, ディンキン図形には他の型も存在するため, 他の“型”の Numbers Game のゲームの長さについても考察したい.

4. 謝辞

本稿の執筆に際し, ご助言をいただいた筑波大学アソシエイトの坂井公先生と, 本研究の計算プログラムに関し, ご助言をいただいた国立情報学研究所特任研究員の栗田和宏氏に深謝する.