

実数シフトのレゾルベント2つで構成されたフィルタによる 実対称定値一般固有値問題の下端固有値を持つ固有対の解法

村上 弘^{1,a)}

概要: 実対称定値一般固有値問題の固有対の近似を求めるために用いるフィルタとして、複数のレゾルベントの作用の線形結合の Chebyshev 多項式を用いるものとする。そのような構成のフィルタで優れた特性を持つものを与える一般的な方法を我々は既に導いたが、その方法に従うとフィルタを構成するためのレゾルベントにはシフトが虚数であるものが必ず含まれてしまう。シフトが実数であるレゾルベントだけを複数用いて特性の良いフィルタを実現する一般的な方法を我々はまだ導いていない。そこで今回は、シフトが実数のレゾルベントを2つ用いた場合のフィルタをうまく構成する方法を示し、構成されたフィルタを用いて固有対の近似を求めてみた例をいくつか示す。

キーワード: フィルタ, 対角化法, 固有値問題, レゾルベント, 多項式, 実数シフト, 伝達関数

1. はじめに

いま行列 A と B が実対称で B は正定値の一般固有値問題 $A\mathbf{v} = \lambda B\mathbf{v}$ に対して、その固有対 (λ, \mathbf{v}) で固有値 λ が指定された区間 $[a, b]$ にあるものを近似して求めるとする。そのために用いるフィルタとして本論文で扱うものは、一般的には複数のレゾルベントの線形結合の作用の (実部の) Chebyshev 多項式の作用 $\mathcal{F} = g_s T_n(\mathcal{Y})$ である。ただし \mathcal{Y} はシフトが ρ_i のレゾルベント $\mathcal{R}(\rho_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$ と恒等作用素 I の線形結合の作用 (の実部) である。既に我々は、レゾルベントの数をいくつにする場合でも、シフトとして複素数の使用を許すのであれば、各レゾルベントのシフトと線形結合の係数は数式に数値を入れて計算すれば求められること、レゾルベントの数を増せばそれだけフィルタの伝達関数 $f(\lambda)$ の形状を良くできることを示した。そうしてすべてのシフトが虚数である場合には、区間 $[a, b]$ の位置の設定は自由にできる。

しかし応用上は、固有値が固有値分布の端付近の固有対だけを必要とすることがよくある。そのような場合にレゾルベントのシフトをすべて実数にできると、フィルタを作用させる計算において必要な記憶量や演算量を減らせる可能性がある。

既にこれまで構成が極めて容易である単一のレゾルベントを用いたフィルタを扱ってきた (文献 [9], [10], [11], [12], [21])。しかし単一のレゾルベントから構成されたフィルタ

の伝達関数は形状をあまり良くすることはできない。たとえば伝達関数の通過域での最大最小比を抑えながら遷移域の幅を狭くすることは難しい (しかもシフトを実数にした場合は伝達関数の形状は虚数を用いる場合に比べて良くない)。しかしそのような伝達関数の特性形状の良くないフィルタを用いても、再直交化と組み合わせるフィルタの処理を数回反復すれば不変部分空間の基底の近似が改良されて、近似対の精度が向上することを我々は既に示した (文献 [20], [22], [23], [25])。ここまですら読むと、単一のレゾルベントで構成されたフィルタを用いても問題を満足に扱えるのであれば、敢えて複数のレゾルベントから構成されたフィルタを用いる必要はないと思われるかもしれない。しかし小規模な並列処理システム上で計算を行う場合に、少数のレゾルベントに対応する連立1次方程式の各係数行列の分解結果が主記憶に保持できて、行列分解や分解後の前進後退代入に必要な処理も並列に計算できるのであれば、

- フィルタとして「少数」のレゾルベントの線形結合の作用の Chebyshev 多項式を採用することにより、「単一」のレゾルベントを用いる場合に比べて、使用する Chebyshev 多項式の次数を下げることができれば、フィルタを適用する処理の経過時間を減らせる。
- 伝達関数の遷移域の幅を縮小することができれば、フィルタを適用するベクトルの数を減らせる。
- 「単一」の場合に比べて伝達関数の形状を良くできればフィルタ1回の適用で近似固有対の精度が用途の要求を満たす。

¹ 東京都立大学・数理科学専攻

^{a)} mrkmlhrsh@tmu.ac.jp

などの可能性がある。これらの事情はフィルタとして少数のレゾルベントの線形結合の実部の Chebyshev 多項式を用いた場合（文献 [24], [26], [27], ただしシフトが複素数の場合）と同様である

そこで固有値が固有値分布の下端付近にある固有対を求めるためのフィルタで伝達関数の形状が良いものを、シフトが実数である少数のレゾルベントの線形結合の Chebyshev 多項式としてうまく構成する方法を導くことにする。

以前の文献 [13] において我々は、フィルタを 2 つのレゾルベントの線形結合の（実部の）Chebyshev 多項式として構成するときに、レゾルベントのシフトを 2 つとも実数にする場合と虚数にする場合（ただし複共役対称性を利用してシフトの虚部は両方とも正）のそれぞれについて考察を行った。その文献 [13] の後に我々は一連の研究（文献 [14], [15], [16], [17], [18], [19], [24], [26], [27]）において、アナログ電気回路のフィルタの設計手法を模倣して、フィルタの伝達関数を最良近似理論に現れる有理関数を用いた関数合成の手法を用いて設計する方法を示した。その方法ではシフトとして複素数を用いる必要があるが、用いるレゾルベントの数がいくつであっても一般的に数値を数式に入れて計算すればフィルタを具体的に決定できる。例として優れた特性のフィルタを少数 3~ 4 個のレゾルベントの作用から構成できることを示し、実際に計算を行って確認した [27]。しかしシフトを実数に制限する場合には別の方法が必要になる。そこで今回はシフトが実数のレゾルベントを 2 つ用いてフィルタを構成してみる。

1.1 フィルタを用いた固有値問題の解法の概要

N 次実対称行列 A と B (B は正定値) の一般固有値問題 $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{v}$ の固有対のフィルタを用いた近似解法の概要は以下ようになる（文献 [1], [2]）。まず、固有値が区間 $[a, b]$ にある固有ベクトルは良く通過させるが、固有値が区間 $[a, b]$ から離れた固有ベクトルは強く阻止する線形作用素をフィルタ \mathcal{F} として用意する。そうしてランダムな N 次ベクトルを m 個作成して、それらを B -正規直交化してベクトルの組 X を作る。これは m 個の N 次ベクトルを各列に並べた $N \times m$ 行列として扱って、 $X^T B X = I$ である。次にベクトルの組 X にフィルタを適用して新たなベクトルの組 $Y \leftarrow \mathcal{F} X$ を作る。これも $N \times m$ 行列である。それから（ベクトルの組である X と Y の情報のほかにフィルタの伝達特性も考慮に入れて） Y に含まれる列ベクトルの線形結合の組をうまく構成することで、「区間 $[a, b]$ の近傍の固有値すべてに対応する不変部分空間」を近似する部分空間の基底 Z を作る。そうして、基底 Z に対して Rayleigh-Ritz 法を適用して得られる Ritz 対を、元の一般固有値問題の近似対とする。

1.2 フィルタの概要

行列 A と B が実対称で B は正定値の一般固有値問題 $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{v}$ の固有対で固有値が区間 $[a, b]$ にあるものを近似して求める、そのために用いるフィルタ \mathcal{F} は線形的作用素で、固有値が $[a, b]$ にある固有ベクトルは良く伝達するが、固有値が $[a, b]$ から離れた固有ベクトルは強く阻止するようにうまく構成する。フィルタ \mathcal{F} をレゾルベントの線形結合やレゾルベントの多項式として構成すると、任意の固有対 (λ, \mathbf{v}) について $\mathcal{F}\mathbf{v} = f(\lambda)\mathbf{v}$ が成立する。ここで $f(\lambda)$ はフィルタ \mathcal{F} の伝達関数で、 λ の有理関数である。

今回のように、求めたい固有対の固有値の区間 $[a, b]$ が固有値分布の下端に位置する（区間の左端 a が最小固有値 λ_0 以下）の場合には、区間 $\lambda \in [a, b]$ を標準区間 $t \in [0, 1]$ に対応させる線形変換 $t = (\lambda - a)/(b - a)$ により固有値 λ に対する正規化座標 t を定義する（図 1, 固有値の存在可能領域を緑色で示している）。そうして正規化座標 t を引数とする伝達関数を $g(t) \equiv f(\lambda)$ により定義する。伝達関数 $g(t)$ の形状の概念図を図 2 に示す。

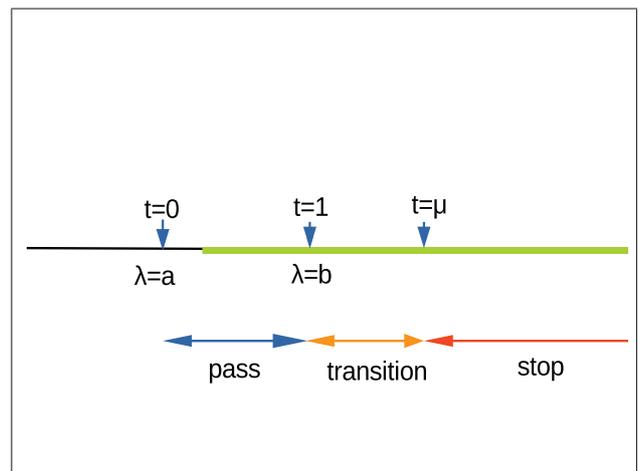


図 1 (下端固有対用) 固有値 λ の区間 $[a, b]$ と正規化座標 t の関係
 通過域 $t \in [0, 1]$; 遷移域 $t \in (1, \mu)$; 阻止域 $t \in [\mu, \infty)$

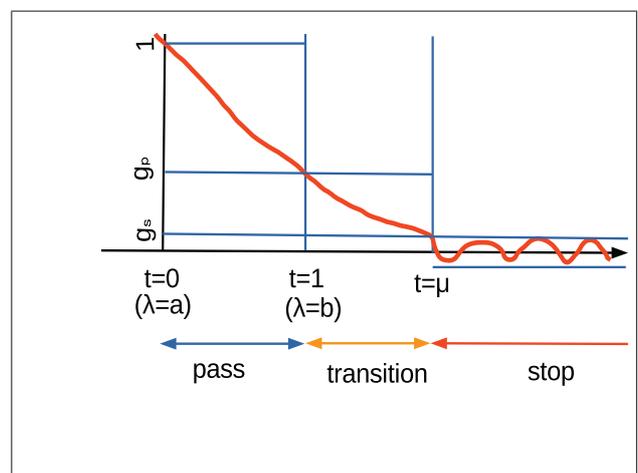


図 2 (下端固有対用) 伝達関数 $g(t)$ の概形

1.3 単一のレゾルベントの多項式によるフィルタ

レゾルベントの作用に対応する連立1次方程式は直接法で解くものとする。複数のレゾルベントの線形結合をフィルタにする場合（文献 [1], [2], [3], [4], [5], [8]）に比べてフィルタを単一のレゾルベントの多項式にする場合（文献 [6], [7], [9], [10], [11]）は、行列分解を行う連立1次方程式の係数行列の数が複数ではなくて1つになることが大きな利点である。（連立1次方程式を直接法ではなくて反復法を用いて解く場合にも、反復法の収束向上のための前処理に係数行列の不完全分解を用いるのであれば、不完全分解を行う行列の数は複数ではなくて1つになる）。ベクトル m 個の組に対してレゾルベントの作用の n 次多項式を適用するには、係数行列は共通だが右辺ベクトルが異なる m 個の連立1次方程式の組を解く処理を逐次に n 回行う必要があるが、その毎回の連立1次方程式の組は最初に1度だけ係数行列の分解を作成して保持していれば、それを利用して前進後退代入により少ない計算量で素早く解ける。

フィルタを単一のレゾルベントの「多項式」で構成する場合には、最小2乗法に類似した方法で（通過域と阻止域の相互で釣り合いをとって）フィルタの伝達特性がなるべく都合の良いものになるように「多項式」をうまく最適化して作ることが望ましい（文献 [6], [7], [9]）。しかし、数値的最適化により得られる「多項式」は係数の数値を列挙した形としてだけ与えられる。そのような数値最適化による調整を必要としない「多項式」として Chebyshev 多項式を採用した「簡易な設計法」（文献 [10]）で得られるフィルタは、阻止域において優れた減衰特性を容易に実現できるが、通過域における伝達率の最大最小比を積極的に抑える機能がない。その最大最小比が大きければ必要な固有対の間で近似精度のばらつきが大きくなる可能性があり、極端な場合には必要な固有対の一部が欠落してしまう可能性もある。それで、単一のレゾルベントの多項式として、簡易設計型の場合の n 次の Chebyshev 多項式から n 次以下の Chebyshev 多項式の線形結合に拡張することで通過域での伝達率の変動を抑えるように最小2乗法の定式化を用いて線形結合の係数を定めることを我々は過去に試みた（文献 [11], [12]）。しかしそのような複数の Chebyshev 多項式の線形結合の形を多項式として採用する手法がどれだけうまく働くかについては、これまでまだ調査しておらず、今後の課題である。

1.4 レゾルベントを2つ用いた多項式によるフィルタ

今回は、固有値が固有値分布の下端付近にある固有対を求めるためのフィルタを、実数をシフトとするレゾルベントを2つ用いた簡易型のもの、つまりそれらレゾルベントの線形結合の Chebyshev 多項式であるとする。シフトが実数のレゾルベントを2つにすることで、1つのもの比べて伝達関数の通過域における最大最小比の低下や遷移域

の幅の縮小を期待する。

我々は今回は、実数をシフトとするレゾルベントの線形結合の多項式であるフィルタの設計法を、レゾルベントの数が2つの場合だけに対して導いた。より多くのレゾルベントを用いる場合（たとえば3つや4つなど）は、今後の課題である。

2. 極が実数2つの伝達関数の簡易型設計法

相異なる実数をシフトに持つ2つのレゾルベントの多項式をフィルタとすると、その伝達関数は相異なる2つの実数だけを（多重の）極として持つ有理関数になる。以下ではその関数形を強く制限した簡易型の設計法を考察する。

これまで Chebyshev 多項式を用いる簡易型設計法では、極が実数1つだけの伝達関数 $g(t)$ を式 (1) の形に制限してきた（極は実数 $-\sigma$ であり n 位である）。

$$g(t) \equiv g_s T_n(y(t)), y(t) \equiv 2x(t) - 1, x(t) \equiv \frac{\mu + \sigma}{t + \sigma}. \quad (1)$$

このような形に制限された伝達関数は、阻止域での伝達率を（ n を増やせば）容易に微小にできるが、伝達率の通過域での最大最小比を小さくすることは（遷移域の幅 $\mu - 1$ を上げないと）できない。そこで簡易型設計法をこの極が実数1つの場合から相異なる実数2つの場合に拡張し、それにより増えた自由度を用いて通過域における伝達率の最大最小比を減らすを試みる。

そのためにまず式 (2) により表される $t = \infty$ では値が零で、極として相異なる負の実数2つだけを持つ実有理関数 $x(t)$ を新しく採用する（ただし $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ とする）。これは非負領域 $[0, \infty)$ では連続であるが、さらに正值性も仮定する。

$$x(t) \equiv \frac{\alpha_1}{t + \sigma_1} - \frac{\alpha_2}{t + \sigma_2}. \quad (2)$$

いま $\mu > 1$ であり、 $x_H > x_L > 1$ であるとして、

- 通過域 $t \in [0, 1]$ が区間 $x \in [x_L, x_H]$ と、
- 遷移域 $t \in (1, \mu)$ が区間 $x \in (1, x_L)$ と、
- 阻止域 $t \in [\mu, \infty)$ が区間 $x \in (0, 1]$ と、

それぞれ対応するものとする。そうして伝達関数は従来と同様に Chebyshev 多項式を用いた簡易型設計で以下の式 (3) で表される $x(t)$ の多項式とする。

$$g(t) \equiv g_s T_n(y(t)), y(t) \equiv 2x(t) - 1. \quad (3)$$

そうして非負領域 $[0, \infty)$ で連続な伝達関数 $g(t)$ はその形状パラメタの3つ組を (μ, g_p, g_s) とするとき（ただし $\mu > 1, 1 > g_p > g_s > 0$ である）、以下の3条件を満たすとする。

- 通過域 $[0, 1]$ において最大値は1で最小値は g_p .
- 遷移域 $(1, \mu)$ において $g_p > g(t) > g_s$.
- 阻止域 $[\mu, \infty)$ において $g_s \geq |g(t)|$.

すると $2x_H - 1 > 2x_L - 1 > 1$ になることおよび、Chebyshev 多項式は引数が1以上で狭義単調増加であることから、式 (4) がなりたつ。

$$\begin{cases} 1 = g_s T_n(2x_H - 1), \\ g_p = g_s T_n(2x_L - 1). \end{cases} \quad (4)$$

この式(4)を(実数 z の恒等式 $\cosh^{-1}(2z^2 - 1) = 2 \cosh^{-1} |z|$ も用いて) 双曲線関数を用いて表せば式(5)が得られる。

$$\begin{cases} x_H = \cosh^2\left(\frac{1}{2n} \cosh^{-1} \frac{1}{g_s}\right), \\ x_L = \cosh^2\left(\frac{1}{2n} \cosh^{-1} \frac{g_p}{g_s}\right). \end{cases} \quad (5)$$

すると3つのパラメタ g_p , g_s , n を与えると、この(5)の各式の右辺をそれぞれ計算することで、通過域 $[0, 1]$ における $x(t)$ の最大値 x_H と最小値 x_L が決まる。

2.1 2通りの方式の伝達関数の決定法

今回の実験に用いた2通りの方式(「方式1」と「方式2」)による伝達関数を決定するための手順は記述が長いので、付録の章A.1と章A.2に移した。

各方式の手順はどちらも、伝達関数の形状パラメタ3つとChebyshev多項式の次数 n を併せた4つ組 (μ, g_p, g_s, n) を数値で指定すると、式(2)と式(3)の形で表せる伝達関数 $g(t)$ で指定を満たすものが存在するかを判定して、存在する場合には $x(t)$ を決める4つの実数の組 $(\sigma_1, \alpha_1, \sigma_2, \alpha_2)$ の値を(ただし $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$) 具体的に算出する。しかもどちらの方式の場合にも得られる $x(t)$ が非負領域 $[0, \infty)$ において正值であることがその構成の結果から満たされる。これにより「方式1」と「方式2」に対しては、フィルタの伝達関数 $g(t)$ を具体的に構成する問題は完全に解決される。

2.1.1 パラメタ4つのうちの3つだけを指定するやり方

フィルタを実現可能なパラメタの4つ組 (μ, g_p, g_s, n) を直接指定する以外の方法として、たとえば以下に述べるように、パラメタ4つのうちの3つだけを指定して(それら指定されたパラメタを持つフィルタが実現可能であれば) 指定しなかったパラメタの値は、フィルタがなるべく望ましい特性を持つように探索により決めることもできる。

次数 n を最小にする場合

実用性の観点から探索する次数の上限 n_{\max} をあらかじめ設定し(たとえば50とする) 次数 n を1から始めて n_{\max} まで1つずつ増してフィルタを実現可能にする最初のもの(n が最小のもの)を探し。探しても無ければ指定した3つのパラメタを持つフィルタは(n が上限 n_{\max} 以下では) 実現不可能である。

g_p を最大にする場合

まず定義から $1 > g_p > g_s$ である。 g_p の最大値はたとえば2分法で精密に決めることもできるが、簡易には本当の最大値ではなくてきりの良い値、たとえば単調に減少する 0.5^j の形に制限してその指数 j を1つずつ増やして($g_p > g_s$ の範囲で) フィルタを実現可能にする最初のもの(g_p が大きいもの)を探し。探しても無ければ指定した3つのパラメタを持つフィルタの構成を諦める。

g_s を最小にする場合

まず定義から $g_p > g_s > 0$ である。 g_s の最小値はたとえば2分法で精密に決めることもできるが、簡易にはきりの良い値、たとえば単調に減少する 0.5^j の形に制限して、 $g_p > g_s$ を満たしてさらに現実的な考慮からたとえば丸め誤差の単位を ϵ_{MAC} とするとき $g_s > \epsilon_{\text{MAC}}$ の範囲で j の値を1つずつ増やして、フィルタを実現可能にする最後のもの(g_s が小さいもの)を探し。探しても無ければ指定した3つのパラメタを持つフィルタの構成を諦める。

μ を最小にする場合

まず定義から $\mu > 1$ である。 μ の最小値はたとえば2分法で精密に決めることもできるが、簡易にはきりの良い値に制限して、たとえば単調に増加する $1 + 0.05 * j$ の形とし、整数 j を1から始めて1つずつ増して探索することができる。ただし実用性を考えて μ の値にはある上限を設けて(たとえば $\mu \leq 2$) それ以下の範囲でだけ探索をするなどとする。そうしてフィルタを実現可能にする最初のもの(μ が小さいもの)を探し。探しても無ければ指定した3つのパラメタを持つフィルタの構成を諦める。

2.2 伝達関数からのフィルタの構成

伝達関数の極が実数2つだけであるフィルタは、シフトが実数のレゾルベントを2つ用いて構成できる。我々の用いる簡易型の伝達関数 $g(t)$ は以下の式で表される。

$$\begin{cases} g(t) \equiv g_s T_n(y(t)), \\ y(t) \equiv 2x(t) - 1, \\ x(t) \equiv \frac{\alpha_1}{t + \sigma_1} - \frac{\alpha_2}{t + \sigma_2}. \end{cases} \quad (6)$$

求めたい固有対の固有値は固有値分布の下端付近のものであるとして、固有値の座標 λ とその正規化座標 t の間の線形対応関係 $t = (\lambda - a)/(b - a)$ により、 $y(t)$ を λ を用いて表すと式(7)になる。

$$y(t) = \frac{2\gamma_1}{\lambda - \rho_1} - \frac{2\gamma_2}{\lambda - \rho_2} - 1. \quad (7)$$

ここで係数 γ_k とシフト ρ_k ($k = 1, 2$) は式(8)になる(今回の場合には $\rho_1 < \rho_2 < a$, $\gamma_1 > \gamma_2$ である)。

$$\gamma_k \equiv (b - a) \alpha_k, \quad \rho_k \equiv a - (b - a) \sigma_k \quad (8)$$

すると、 $1/(\lambda - \rho_k)$ にはレゾルベント $\mathcal{R}(\rho_k)$ が対応し、定数1には恒等作用素 I が対応するので、 $y(t)$ に対応する線形作用素 \mathcal{Y} は式(9)で与えられる。

$$\mathcal{Y} \equiv 2\gamma_1 \mathcal{R}(\rho_1) - 2\gamma_2 \mathcal{R}(\rho_2) - I \quad (9)$$

そうして伝達関数 $f(\lambda)$ ($= g(t)$) に対応するフィルタ \mathcal{F} は、作用素 \mathcal{Y} の多項式として式(10)になる。

$$\mathcal{F} = g_s T_n(\mathcal{Y}) \quad (10)$$

この形のフィルタ \mathcal{F} を任意のベクトルの組 V に作用させ

るには, Chebyshev 多項式の 3 項漸化式 (11) を利用する.

$$\begin{cases} T_0(z) = 1, T_1(z) = z, \\ T_j(z) = 2zT_{j-1}(z) - T_{j-2}(z) \quad (\text{for } j \geq 2). \end{cases} \quad (11)$$

具体的には, 作用素 \mathcal{Y} の j 次 Chebyshev 多項式 $T_j(\mathcal{Y})$ を V に作用させて得られるベクトルの組 $V^{(j)} \equiv T_j(\mathcal{Y})V$ を漸化式 (12) を用いて計算する.

$$\begin{cases} V^{(0)} = V, V^{(1)} = \mathcal{Y}V, \\ V^{(j)} = 2\mathcal{Y}V^{(j-1)} - V^{(j-2)} \quad (\text{for } j \geq 2). \end{cases} \quad (12)$$

これにより V から $V^{(n)}$ を計算すれば, V にフィルタ \mathcal{F} を作用させた結果は $\mathcal{F}V = g_s V^{(n)}$ により与えられる.

3. 実験について

3.1 例題の一般固有値問題

実験の例題として用いた実対称定値一般固有値問題 $A\mathbf{v} = \lambda B\mathbf{v}$ は, 1 辺の長さが π の 3 次元立方体を解析する領域とし, その表面で零固定境界条件を課したときの (符号が逆の) 3 次元ラプラシアン $-\Delta$ の固有値問題を有限要素法 (FEM) で離散化近似して得られるものである.

FEM の要素分割は立方体領域の各辺方向をそれぞれ $N_1 + 1, N_2 + 1, N_3 + 1$ の等間隔の小区間に分割する. 要素内での展開基底には各辺方向の 3 重線形関数を用いた. この離散化で得られる行列 A と B の次数は $N = N_1 N_2 N_3$ であり, ($N_1 \leq N_2 \leq N_3$ であるとして) 行列の帯幅が小さくなるよう適切に基底関数に番号を付けると, 各行列の下帯幅を $w_L = 1 + N_1 + N_1 N_2$ にできる.

そうしてフィルタを利用して固有値が区間 $[a, b]$ に含まれる固有対の近似を求めて, 各近似固有対 (λ, \mathbf{v}) の精度は式 (13) で定義される相対残差 Θ を用いて評価する (ベクトルのノルム $\|\cdot\|$ にはユークリッド・ノルムを用いた).

$$\Theta \equiv \frac{\|A\mathbf{v} - \lambda B\mathbf{v}\|}{\|\lambda B\mathbf{v}\|}. \quad (13)$$

3.2 直交化付きフィルタ反復の概要

フィルタを B を計量とする直交化と組み合わせると反復すれば, フィルタの特性の悪さを補って不変部分空間を張る基底の近似を改善できる [18], [25].

まず最初に m 個のランダムなベクトルの組を乱数で生成し, それらを B -正規直交化して m 個のベクトルの組 X を作る. X は $N \times m$ 行列とみなせる. そうして固有値の区間 $[a, b]$ を通過域とするフィルタを X に作用させて m 個のベクトルの組 $Y \leftarrow \mathcal{F}X$ を作る.

この X と Y をもとにして, 使用したフィルタの伝達特性も考慮に入れて, 元の一般固有値問題のある「不変部分空間」を近似する空間の基底を Y の列の適切な線形結合として構成する [2]. その「不変部分空間」は, 区間 $[a, b]$ のある適切な近傍に入る固有値を持つ固有ベクトルの全体

で張られるものである. その「不変部分空間」の近似空間の基底に Rayleigh-Ritz 法を適用して, 得られた Ritz 対を元の一般固有値問題の近似固有対として採用する. 得られた近似固有対は (近似固有対に改良を加える場合はその後) に, 近似固有値を検査して指定された区間 $[a, b]$ にはないものは棄却することができる.

フィルタを合計 2 回適用する場合は, 上記のベクトルの組 Y を再び (適切な閾値による切断を入れて) B -正規直交化することで (m' 個のベクトルの組) X' とし, その X' に再度フィルタ \mathcal{F} を適用して新たな Y' を作る. そうして X' と Y' をもとにして不変部分空間を近似する空間の基底を Y' の列の適切な線形結合として構成する.

フィルタを合計 3 回適用する場合は, 上記のベクトルの組 Y' を再び (適切な閾値による切断を入れて) B -正規直交化することで (m'' 個のベクトルの組) X'' とし, その X'' に再度フィルタ \mathcal{F} を適用して新たな Y'' を作る. そうして X'' と Y'' をもとにして不変部分空間を近似する空間の基底を Y'' の列の適切な線形結合として構成する.

4. 実験

以下の各例では有限要素法 (FEM) で用いる立方体への要素分割を $N_1 = 40, N_2 = 50, N_3 = 60$ とした. すると一般固有値問題の係数の帯行列 A と B の次数は $N = 120,000$, 下帯幅は $w_L = 2,041$ である. いま扱っている問題の最小固有値は, 変分原理から要素分割に依らず必ず 3 よりも大きいので, 求めるべき固有対の固有値を含む区間を $[a, b] = [3, 30]$ に設定した. いまの場合その区間に固有値が含まれる固有対の数は 54 である. フィルタに最初に与えるランダムなベクトルの数 m は, フィルタの遷移域の端の位置を与えるパラメタが $\mu = 2.0$ の場合には $m = 200$, $\mu = 1.5$ の場合には $m = 125$, $\mu = 1.25$ の場合には $m = 100$ とした (伝達関数 $g(t)$ の通過域 $[0, 1]$ と遷移域 $(1, \mu)$ を併せた区間 $t \in [0, \mu]$ に対応する固有値の区間 $\lambda \in [a, b']$ は, それぞれ $\mu = 2.0$ の場合は $[3, 57)$, $\mu = 1.5$ の場合は $[3, 43.5)$, $\mu = 1.25$ の場合は $[3, 36.75)$ であり, そうして区間 $[a, b']$ に固有値が入る固有対の数はそれぞれ 163 個, 105 個, 78 個である). 求めた近似固有対で固有値が $[a, b]$ に含まれるものに対して式 (13) で定義される「相対残差」を求めた.

計算機は東京大学情報基盤センターの Oakbridge-CX の 1 ノード (Dual Intel Xeon 8280(2.7GHz,28cores), メモリ 192GiB, 倍精度ピーク演算性能 4.8TFLOPS) である.

4.1 「方式 1」のフィルタによる実験

指定したパラメタの 4 つ組 μ, g_p, g_s, n を実現する「方式 1」の伝達関数 $g(t)$ を決定し, それに対応するフィルタを用いて固有値問題の近似固有対を求めてみた. 以下に 6 通りの例を示す.

4.1.1 「方式 1」の例 1

パラメタの 4 つ組を $\mu = 2.0$, $g_p = 1E-2$, $g_s = 1E-9$, $n = 25$ と指定したときの, 正規化座標 t による $x(t)$ の (符号が逆の) 極とその係数は $\sigma_1 = 4.0906841137859269$, $\alpha_1 = 9.6814736896337070$, $\sigma_2 = 2.0252807667674917$, $\alpha_2 = 2.3731219592317347$, である. 正規化座標 t を横軸に, 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の常用対数を縦軸にとってプロットしたグラフを図 3 に示す. 直交化付きでフィルタを 3 回まで反復したときの, 各近似固有対の固有値を横軸にとり, 相対残差の常用対数を縦軸にとってプロットしたグラフを図 4 に示す.

4.1.2 「方式 1」の例 2

パラメタの 4 つ組を $\mu = 2.0$, $g_p = 1E-2$, $g_s = 1E-10$, $n = 35$ と指定したときの, 正規化座標 t による $x(t)$ の (符号が逆の) 極とその係数は $\sigma_1 = 5.1965507817653922$, $\alpha_1 = 15.259180301857066$, $\sigma_2 = 3.2157696254853008$, $\alpha_2 = 5.8434685487092821$, である. 正規化座標 t を横軸に, 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の常用対数を縦軸にとってプロットしたグラフを図 5 に示す. 直交化付きでフィルタを 3 回まで反復したときの, 各近似固有対の固有値を横軸にとり, 相対残差の常用対数を縦軸にとってプロットしたグラフを図 6 に示す.

4.1.3 「方式 1」の例 3

パラメタの 4 つ組を $\mu = 2.0$, $g_p = 1E-3$, $g_s = 1E-12$, $n = 25$ と指定したときの, 正規化座標 t による $x(t)$ の (符号が逆の) 極とその係数は $\sigma_1 = 2.2275526153982339$, $\alpha_1 = 10.702086703510560$, $\sigma_2 = 1.5985075775766164$, $\alpha_2 = 5.5111460688835390$, である. 正規化座標 t を横軸に, 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の常用対数を縦軸にとってプロットしたグラフを図 7 に示す. 直交化付きでフィルタを 3 回まで反復したときの, 各近似固有対の固有値を横軸にとり, 相対残差の常用対数を縦軸にとってプロットしたグラフを図 8 に示す.

4.1.4 「方式 1」の例 4

パラメタの 4 つ組を $\mu = 2.0$, $g_p = 1E-3$, $g_s = 1E-13$, $n = 32$ と指定したときの, 正規化座標 t による $x(t)$ の (符号が逆の) 極とその係数は $\sigma_1 = 3.3258023062731463$, $\alpha_1 = 8.9897304258558748$, $\sigma_2 = 1.7914609244008806$, $\alpha_2 = 2.6083657440398911$, である. 正規化座標 t を横軸に, 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の常用対数を縦軸にとってプロットしたグラフを図 9 に示す. 直交化付きでフィルタを 3 回まで反復したときの, 各近似固有対の固有値を横軸にとり, 相対残差の常用対数を縦軸にとってプロットしたグラフを図 10 に示す.

4.1.5 「方式 1」の例 5

パラメタの 4 つ組を $\mu = 2.0$, $g_p = 1E-3$, $g_s = 1E-14$, $n = 40$ と指定したときの, 正規化座標 t による $x(t)$ の (符号が逆の) 極とその係数は $\sigma_1 = 3.9913737417646526$,

$\alpha_1 = 11.752509871903449$, $\sigma_2 = 2.3928928457856955$, $\alpha_2 = 4.2240819519014279$, である. 正規化座標 t を横軸に, 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の常用対数を縦軸にとってプロットしたグラフを図 11 に示す. 直交化付きでフィルタを 3 回まで反復したときの, 各近似固有対の固有値を横軸にとり, 相対残差の常用対数を縦軸にとってプロットしたグラフを図 12 に示す.

4.1.6 「方式 1」の例 6

パラメタの 4 つ組を $\mu = 1.5$, $g_p = 1E-4$, $g_s = 1E-11$, $n = 30$ と指定したときの, 正規化座標 t による $x(t)$ の (符号が逆の) 極とその係数は $\sigma_1 = 2.6911750089593030$, $\alpha_1 = 8.9374560356093244$, $\sigma_2 = 1.7186135211283302$, $\alpha_2 = 3.6449072765500801$, である. 正規化座標 t を横軸に, 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の常用対数を縦軸にとってプロットしたグラフを図 13 に示す. 直交化付きでフィルタを 3 回まで反復したときの, 各近似固有対の固有値を横軸にとり, 相対残差の常用対数を縦軸にとってプロットしたグラフを図 14 に示す.

4.2 「方式 2」のフィルタによる実験

指定したパラメタの 4 つ組 μ , g_p , g_s , n を実現する「方式 2」の伝達関数 $g(t)$ を決定し, それに対応するフィルタを用いて固有値問題の近似固有対を求めてみた. 以下に 6 通りの例を示す.

4.2.1 「方式 2」の例 1

パラメタの 4 つ組を $\mu = 2.0$, $g_p = 1E-2$, $g_s = 1E-13$, $n = 30$ と指定したときの (符号が逆の) 極と係数はそれぞれ $\sigma_1 = 1.6793335315466178$, $\alpha_1 = 12.847121836324346$, $\sigma_2 = 1.2589893885437400$, $\alpha_2 = 8.1204176097421801$ である. 正規化座標 t を横軸に, 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の常用対数を縦軸にとってプロットしたグラフを図 15 に示す. 直交化付きでフィルタを 3 回まで反復したときの, 各近似固有対の固有値を横軸にとり, 相対残差の常用対数を縦軸にとってプロットしたグラフを図 16 に示す.

4.2.2 「方式 2」の例 2

パラメタの 4 つ組を $\mu = 2.0$, $g_p = 1E-2$, $g_s = 1E-14$, $n = 35$ と指定したときの (符号が逆の) 極と係数はそれぞれ $\sigma_1 = 1.9235613781917109$, $\alpha_1 = 14.186309832153896$, $\sigma_2 = 1.4586238171493444$, $\alpha_2 = 9.0466244340097788$ である. 正規化座標 t を横軸に, 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の常用対数を縦軸にとってプロットしたグラフを図 17 に示す. 直交化付きでフィルタを 3 回まで反復したときの, 各近似固有対の固有値を横軸にとり, 相対残差の常用対数を縦軸にとってプロットしたグラフを図 18 に示す.

4.2.3 「方式 2」の例 3

パラメタの 4 つ組を $\mu = 2.0$, $g_p = 1E-3$, $g_s = 1E-13$, $n = 21$ と指定したときの (符号が逆の) 極と係数はそれぞれ $\sigma_1 = 1.2229168196129365$, $\alpha_1 = 4.3266810367402622$,

$\sigma_2 = 0.37200776162517268$, $\alpha_2 = 0.81235025182703346$ である。正規化座標 t を横軸に、伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の常用対数を縦軸にとってプロットしたグラフを **図 19** に示す。直交化付きでフィルタを 3 回まで反復したときの、各近似固有対の固有値を横軸にとり、相対残差の常用対数を縦軸にとってプロットしたグラフを **図 20** に示す。

4.2.4 「方式 2」の例 4

パラメタの 4 つ組を $\mu = 1.5$, $g_p = 1E-4$, $g_s = 1E-12$, $n = 24$ と指定したときの (符号が逆の) 極と係数はそれぞれ $\sigma_1 = 1.2335616207650952$, $\alpha_1 = 3.9334542009894675$, $\sigma_2 = 0.41603301668318349$, $\alpha_2 = 0.84103968343673141$ である。正規化座標 t を横軸に、伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の常用対数を縦軸にとってプロットしたグラフを **図 21** に示す。直交化付きでフィルタを 3 回まで反復したときの、各近似固有対の固有値を横軸にとり、相対残差の常用対数を縦軸にとってプロットしたグラフを **図 22** に示す。

4.2.5 「方式 2」の例 5

パラメタの 4 つ組を $\mu = 1.5$, $g_p = 1E-4$, $g_s = 1E-13$, $n = 28$ と指定したときの (符号が逆の) 極と係数はそれぞれ $\sigma_1 = 0.96499058641911084$, $\alpha_1 = 12.223860547197841$, $\sigma_2 = 0.78605226246637916$, $\alpha_2 = 9.0504551521886700$ である。正規化座標 t を横軸に、伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の常用対数を縦軸にとってプロットしたグラフを **図 23** に示す。直交化付きでフィルタを 3 回まで反復したときの、各近似固有対の固有値を横軸にとり、相対残差の常用対数を縦軸にとってプロットしたグラフを **図 24** に示す。

4.2.6 「方式 2」の例 6

パラメタの 4 つ組を $\mu = 1.25$, $g_p = 1E-6$, $g_s = 1E-13$, $n = 29$ と指定したときの (符号が逆の) 極と係数はそれぞれ $\sigma_1 = 0.97498174524114078$, $\alpha_1 = 4.5596685101818002$, $\sigma_2 = 0.51619303404782713$, $\alpha_2 = 1.8532770031670303$ である。正規化座標 t を横軸に、伝達関数の大きさ $|g(t)|$ の常用対数を縦軸にとってプロットしたグラフを **図 25** に示す。直交化付きでフィルタを 3 回まで反復したときの、各近似固有対の固有値を横軸にとり、相対残差の常用対数を縦軸にとってプロットしたグラフを **図 26** に示す。

4.3 実験結果の表

フィルタの反復回数に対する近似固有対の相対残差の最大値を「方式 1」の各例について **表 1** に、「方式 2」の各例について **表 2** に示す。またフィルタの反復回数に対する対角化までの経過時間を「方式 1」の各例について **表 3** に、「方式 2」の各例について **表 4** に示す。どの場合も行列 2 つの分解の経過時間は約 14 秒であった。反復あたりの経過時間は、フィルタの次数 n が高いほど、ベクトルの数 m が多いほど増える (ただし反復過程でベクトルの数は減る)。問題の規模は 1 ノードのシステムで扱える最大のものではなく、示した経過時間も並列化が最善努力のものではない。

表 1 「方式 1」の場合のフィルタ反復回数に対する最大の相対残差

| | 反復 1 回 | 反復 2 回 | 反復 3 回 |
|------------|---------|---------|---------|
| 「方式 1」の例 1 | 1.1E-04 | 6.1E-12 | 2.6E-12 |
| 「方式 1」の例 2 | 1.6E-05 | 3.9E-12 | 4.3E-12 |
| 「方式 1」の例 3 | 1.1E-06 | 3.8E-12 | 3.9E-12 |
| 「方式 1」の例 4 | 8.9E-08 | 2.6E-12 | 2.6E-12 |
| 「方式 1」の例 5 | 1.3E-08 | 3.3E-12 | 3.6E-12 |
| 「方式 1」の例 6 | 1.1E-04 | 5.0E-12 | 3.8E-12 |

表 2 「方式 2」の場合のフィルタ反復回数に対する最大の相対残差

| | 反復 1 回 | 反復 2 回 | 反復 3 回 |
|------------|---------|---------|---------|
| 「方式 2」の例 1 | 2.9E-07 | 8.9E-12 | 9.6E-12 |
| 「方式 2」の例 2 | 2.5E-08 | 9.9E-12 | 1.0E-11 |
| 「方式 2」の例 3 | 2.1E-06 | 2.4E-12 | 2.7E-12 |
| 「方式 2」の例 4 | 1.4E-04 | 3.8E-12 | 4.0E-12 |
| 「方式 2」の例 5 | 1.8E-05 | 1.6E-11 | 1.9E-11 |
| 「方式 2」の例 6 | 3.8E-03 | 1.3E-10 | 9.8E-12 |

表 3 「方式 1」: フィルタ反復回数と対角化に掛かった経過時間 (秒)

| | 反復 1 回 | 反復 2 回 | 反復 3 回 |
|------------|--------|--------|--------|
| 「方式 1」の例 1 | 86.0 | 165.9 | 244.2 |
| 「方式 1」の例 2 | 115.7 | 225.0 | 331.3 |
| 「方式 1」の例 3 | 86.0 | 168.4 | 245.7 |
| 「方式 1」の例 4 | 107.1 | 209.1 | 307.6 |
| 「方式 1」の例 5 | 131.2 | 234.6 | 333.9 |
| 「方式 1」の例 6 | 77.9 | 151.0 | 224.0 |

表 4 「方式 2」: フィルタ反復回数と対角化に掛かった経過時間 (秒)

| | 反復 1 回 | 反復 2 回 | 反復 3 回 |
|------------|--------|--------|--------|
| 「方式 2」の例 1 | 101.2 | 197.8 | 288.4 |
| 「方式 2」の例 2 | 115.7 | 208.2 | 294.8 |
| 「方式 2」の例 3 | 75.2 | 145.8 | 211.2 |
| 「方式 2」の例 4 | 64.9 | 124.9 | 183.0 |
| 「方式 2」の例 5 | 74.8 | 144.1 | 211.5 |
| 「方式 2」の例 6 | 63.0 | 118.8 | 175.0 |

5. おわりに

与えられた実対称定値一般固有値問題に対して、フィルタを利用して固有値分布の下端付近に固有値がある固有対の近似を求めた。フィルタはシフトが実数であるレゾルベント 2 つの線形結合の Chebyshev 多項式とし、2 通りの方式を設定して、指定した伝達特性を満たすフィルタを構成する手順を具体的に導いた。作成したフィルタを簡単な例題に適用し、固有対の相対残差を調べて、ある程度うまく機能することを確認した。今回のフィルタも、1 回の適用で得られる近似固有対の精度が十分ではない場合には、直交化と組み合わせで 2~3 回反復適用することにより固有対の近似を改良して精度を十分に高めることができた。

今後は今回の方法をさらに進めて、シフトが実数のレゾルベント 3 つあるいは 4 つ程度の線形結合の Chebyshev 多項式として構成される同様のフィルタについても検討を行いたい。

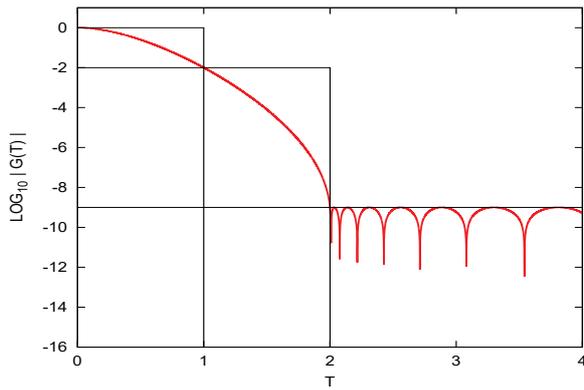


図 3 「方式 1」の例 1: 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ ($\mu=2.0$, $g_p=1E-2$, $g_s=1E-9$, $n=25$)

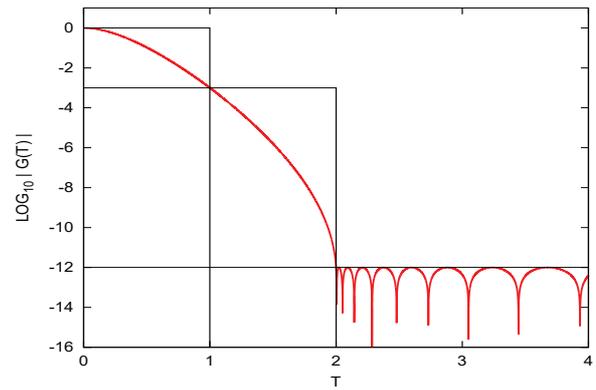


図 7 「方式 1」の例 3: 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ ($\mu=2.0$, $g_p=1E-3$, $g_s=1E-12$, $n=25$)

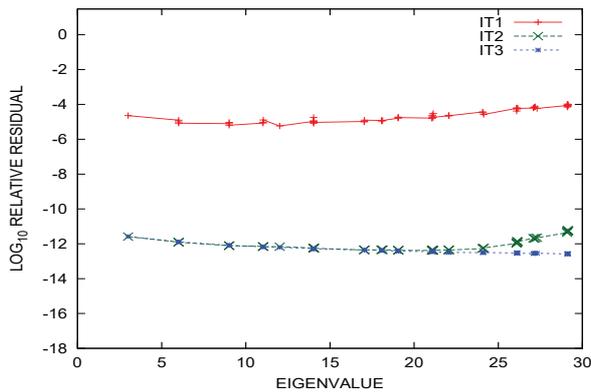


図 4 「方式 1」の例 1: フィルタ反復回数ごとの各固有対の相対残差 ($\mu=2.0$, $g_p=1E-2$, $g_s=1E-9$, $n=25$)

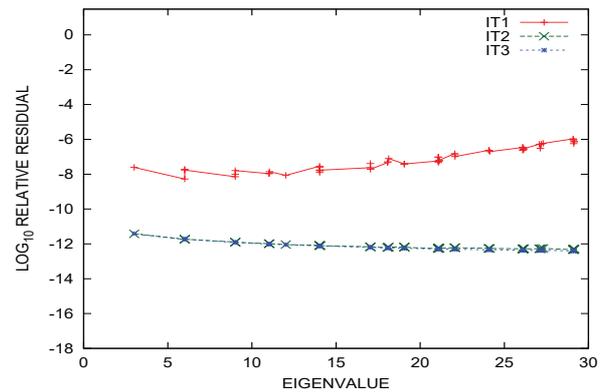


図 8 「方式 1」の例 3: フィルタ反復回数ごとの各固有対の相対残差 ($\mu=2.0$, $g_p=1E-3$, $g_s=1E-12$, $n=25$)

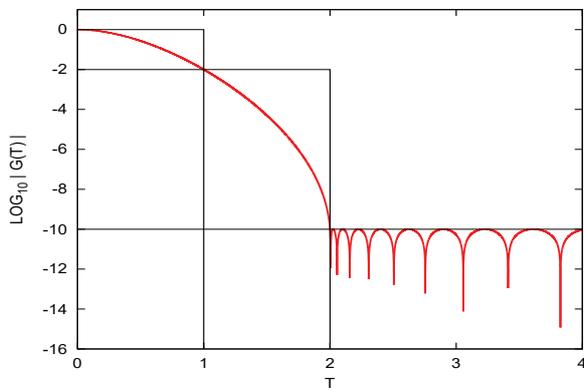


図 5 「方式 1」の例 2: 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ ($\mu=2.0$, $g_p=1E-2$, $g_s=1E-10$, $n=35$)

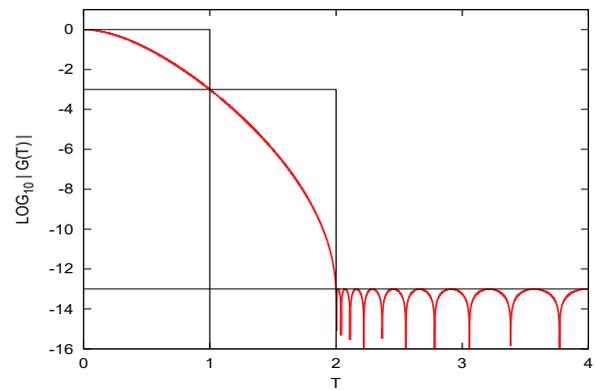


図 9 「方式 1」の例 4: 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ ($\mu=2.0$, $g_p=1E-3$, $g_s=1E-13$, $n=32$)

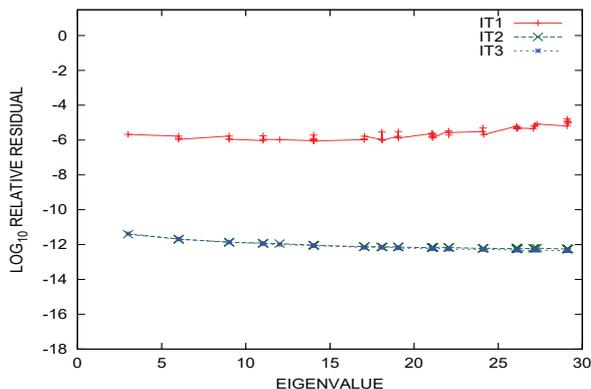


図 6 「方式 1」の例 2: フィルタ反復回数ごとの各固有対の相対残差 ($\mu=2.0$, $g_p=1E-2$, $g_s=1E-10$, $n=35$)

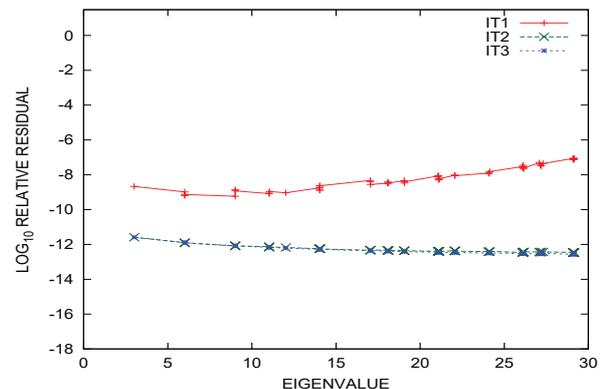


図 10 「方式 1」の例 4: フィルタ反復回数ごとの各固有対の相対残差 ($\mu=2.0$, $g_p=1E-3$, $g_s=1E-13$, $n=32$)

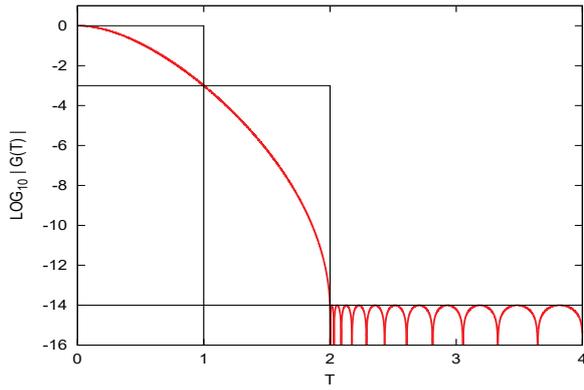


図 11 「方式1」の例5: 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ ($\mu=2.0, g_p=1E-3, g_s=1E-14, n=40$)

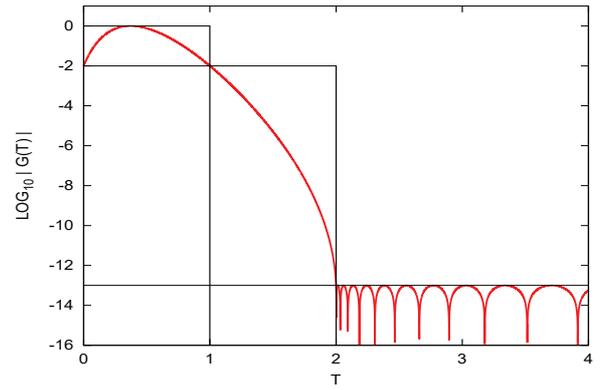


図 15 「方式2」の例1: 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ ($\mu=2.0, g_p=1E-2, g_s=1E-13, n=30$)

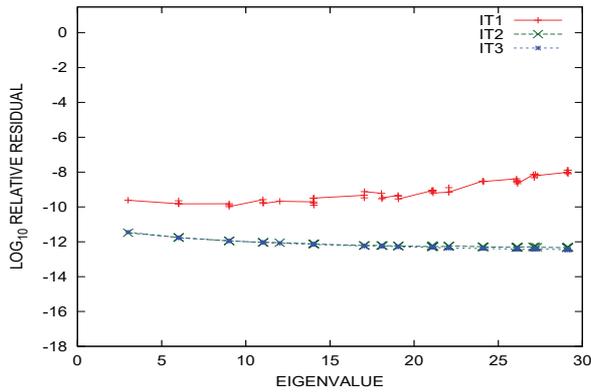


図 12 「方式1」の例5: フィルタ反復回数ごとの各固有対の相対残差 ($\mu=2.0, g_p=1E-3, g_s=1E-14, n=40$)

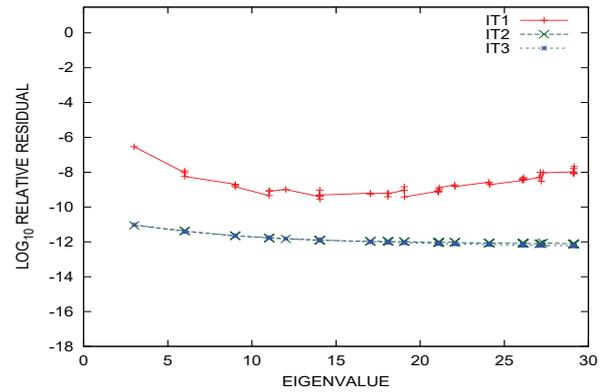


図 16 「方式2」の例1: フィルタ反復回数ごとの各固有対の相対残差 ($\mu=2.0, g_p=1E-2, g_s=1E-13, n=30$)

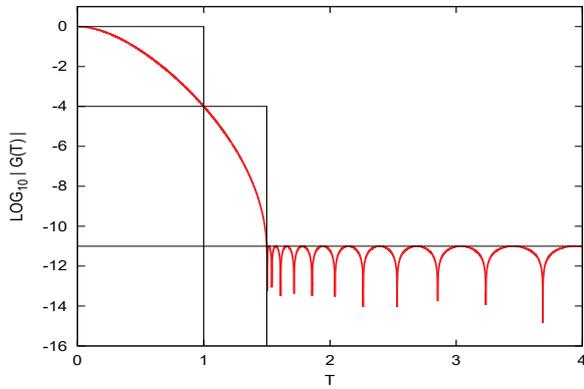


図 13 「方式1」の例6: 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ ($\mu=1.5, g_p=1E-4, g_s=1E-11, n=30$)

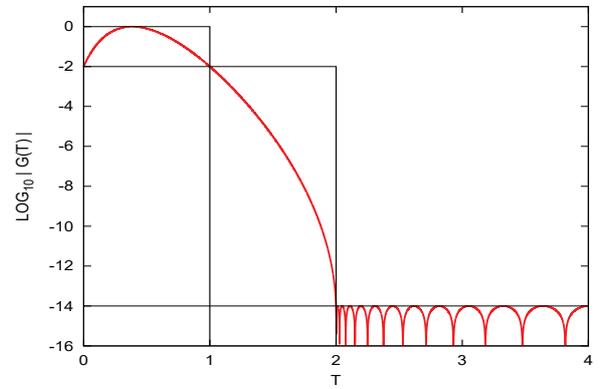


図 17 「方式2」の例2: 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ ($\mu=2.0, g_p=1E-2, g_s=1E-14, n=35$)

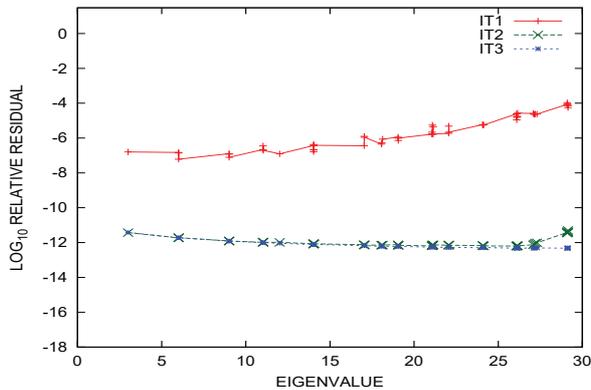


図 14 「方式1」の例6: フィルタ反復回数ごとの各固有対の相対残差 ($\mu=1.5, g_p=1E-4, g_s=1E-11, n=30$)

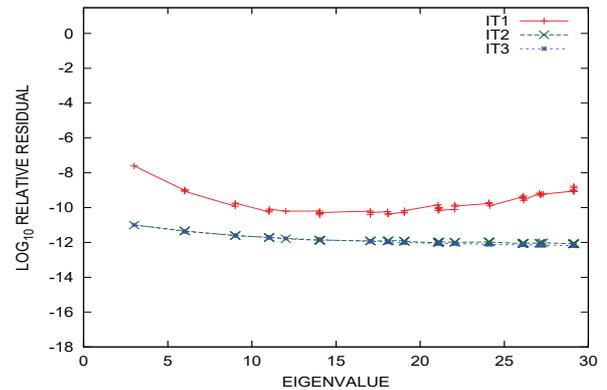


図 18 「方式2」の例2: フィルタ反復回数ごとの各固有対の相対残差 ($\mu=2.0, g_p=1E-2, g_s=1E-14, n=35$)

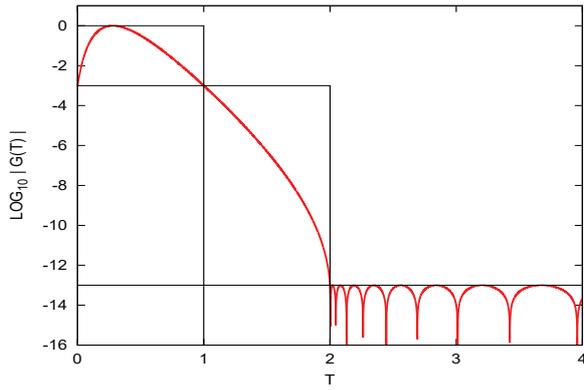


図 19 「方式2」の例3: 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ ($\mu=2.0$, $g_p=1E-3$, $g_s=1E-13$, $n=21$)

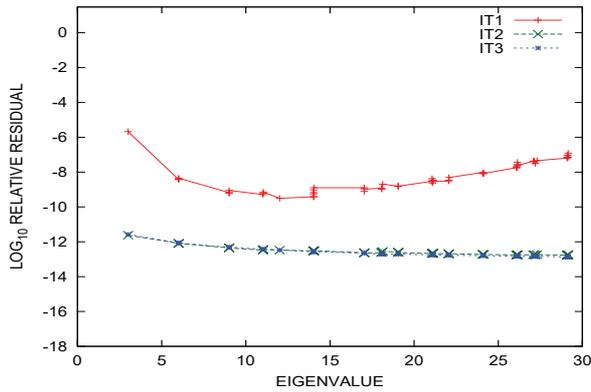


図 20 「方式2」の例3: フィルタ反復回数ごとの各固有対の相対残差 ($\mu=2.0$, $g_p=1E-3$, $g_s=1E-13$, $n=21$)

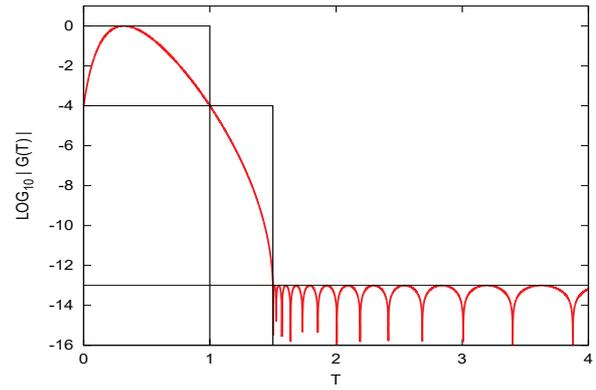


図 23 「方式2」の例5: 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ ($\mu=1.5$, $g_p=1E-4$, $g_s=1E-13$, $n=28$)

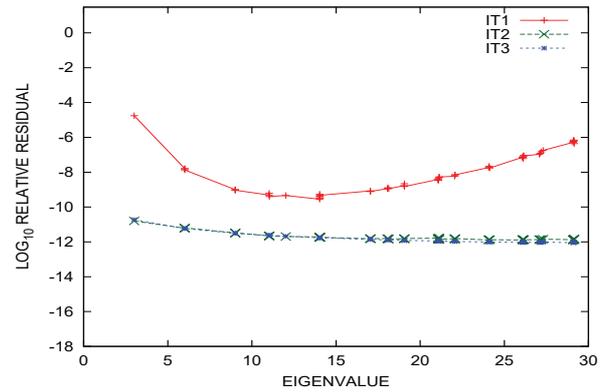


図 24 「方式2」の例5: フィルタ反復回数ごとの各固有対の相対残差 ($\mu=1.5$, $g_p=1E-4$, $g_s=1E-13$, $n=28$)

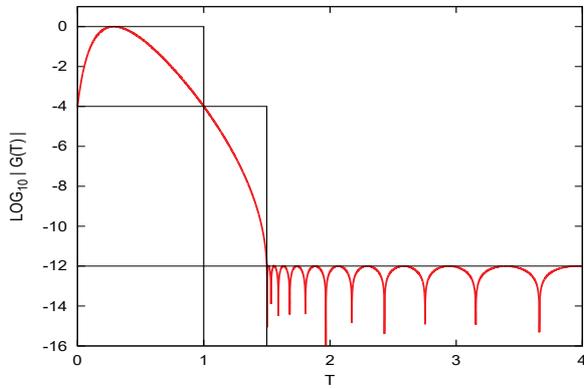


図 21 「方式2」の例4: 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ ($\mu=1.5$, $g_p=1E-4$, $g_s=1E-12$, $n=24$)

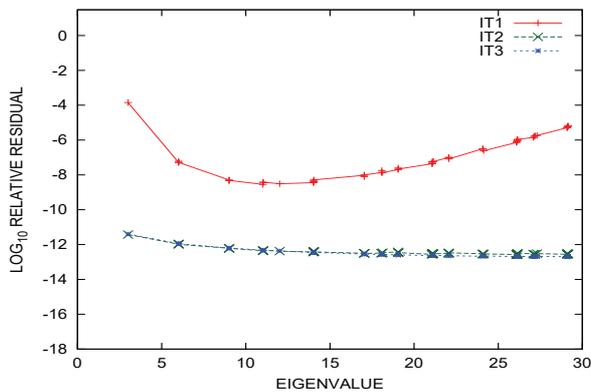


図 22 「方式2」の例4: フィルタ反復回数ごとの各固有対の相対残差 ($\mu=1.5$, $g_p=1E-4$, $g_s=1E-12$, $n=24$)

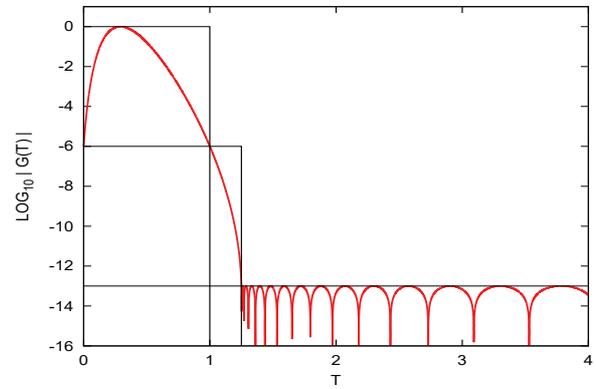


図 25 「方式2」の例6: 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ ($\mu=1.25$, $g_p=1E-6$, $g_s=1E-13$, $n=29$)

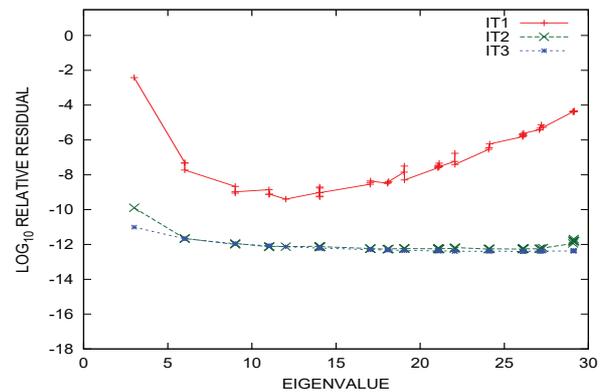


図 26 「方式2」の例6: フィルタ反復回数ごとの各固有対の相対残差 ($\mu=1.25$, $g_p=1E-6$, $g_s=1E-13$, $n=29$)

付 録

A.1 「方式1」：通過域の左端で最大かつ平坦になる伝達関数

いま通過域 $[0, 1]$ における伝達率の最大最小比を小さくすることを狙って、伝達関数は通過域の下端 $t = 0$ において最大値 1 をとり、かつ微分が零になるという条件を課して構成してみる。(伝達関数が通過域の下端において最大であれば、固有ベクトルは固有値が指定区間の下側にあるものほどフィルタを良く通過し、得られる固有対の精度は固有値が下側にあるものであるほど良くなる傾向を持つことが期待できる。そのような性質は下端側の固有値を持つ固有対だけを求めたい用途には適したものであろう。)

いま 4 つのパラメタの組 (μ, g_p, g_s, n) の組を指定するとき、その組を持つ伝達関数の実現が可能であれば、以下に示す手順により $x(t)$ の式 (2) に含まれる 4 つの値 $\sigma_1, \sigma_2, \alpha_1, \alpha_2$ を決定できる。

まず式 (5) により、 x_L と x_H の値を求めておく。次に $t = \mu$ と $t = 1$ における値の条件 $x(\mu) = 1$ と $x(1) = x_L$ 、さらに通過域の下端 $t = 0$ における値 $x(0) = x_H$ とそこで微分が零である条件 $(d/dt)x(t)|_{t=0} = 0$ を順番に数式で表わすと、以下の連立代数方程式 (A.1) になる。

$$\begin{cases} 1 &= \frac{\alpha_1}{\mu + \sigma_1} - \frac{\alpha_2}{\mu + \sigma_2}, \\ x_L &= \frac{\alpha_1}{1 + \sigma_1} - \frac{\alpha_2}{1 + \sigma_2}, \\ x_H &= \frac{\alpha_1}{\sigma_1} - \frac{\alpha_2}{\sigma_2}, \\ 0 &= -\frac{\alpha_1}{\sigma_1^2} + \frac{\alpha_2}{\sigma_2^2}. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

この連立方程式 (A.1) を 3 つの値 x_L, x_H, μ を既知として、4 つの未知数 $\sigma_1, \alpha_1, \sigma_2, \alpha_2$ を実数の範囲で解いて求める。そのような解があればパラメタの 4 つ組 (μ, g_p, g_s, n) を指定したときに「方式1」の伝達関数 $g(t)$ は実現が可能であり、そのような解が無ければ「方式1」の伝達関数 $g(t)$ は実現が不可能である。

まず連立式 (A.1) の第 4 番目の式から得られる等式 $\alpha_1/\sigma_1^2 = \alpha_2/\sigma_2^2$ の値は t に依らない定数なのでそれを C とおくと、2 つの極の係数はそれぞれ $\alpha_1 = C\sigma_1^2, \alpha_2 = C\sigma_2^2$ と表される。また連立式 (A.1) の第 1 番目の式から、定数 C の値の逆数は、

$$\frac{1}{C} = \frac{\sigma_1^2}{\mu + \sigma_1} - \frac{\sigma_2^2}{\mu + \sigma_2} = (\sigma_1 - \sigma_2) \times \frac{\mu(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2}{(\mu + \sigma_1)(\mu + \sigma_2)} \quad (\text{A.2})$$

と表せる。そうして連立式 (A.1) の第 3 番目の式は、

$$x_H = C(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{(\mu + \sigma_1)(\mu + \sigma_2)}{\mu(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2} \quad (\text{A.3})$$

となり、また連立式 (A.1) の第 2 番目の式は、

$$\begin{aligned} x_L &= C \left(\frac{\sigma_1^2}{1 + \sigma_1} - \frac{\sigma_2^2}{1 + \sigma_2} \right) \\ &= \frac{(\mu + \sigma_1)(\mu + \sigma_2)}{\mu(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2} \times \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2}{(1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2)} \\ &= x_H \times \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2}{(1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2)} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

となるので

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{(\mu + \sigma_1)(\mu + \sigma_2)}{\mu(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2} \times \frac{t(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2}{(t + \sigma_1)(t + \sigma_2)} \\ &= x_H \times \frac{t(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2}{(t + \sigma_1)(t + \sigma_2)} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

である。すると既知の 3 つの値 x_L, x_H, μ の組から σ_1 と σ_2 の値は以下の手順で求められる。まず (A.3) と (A.4) から得られる以下の関係：

$$\begin{cases} \frac{1}{x_H} &= \frac{(\mu + \sigma_1)(\mu + \sigma_2) - \mu^2}{(\mu + \sigma_1)(\mu + \sigma_2)} = 1 - \frac{\mu^2}{(\mu + \sigma_1)(\mu + \sigma_2)}, \\ \frac{x_L}{x_H} &= \frac{(1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2) - 1}{(1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2)} = 1 - \frac{1}{(1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2)} \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

を $p \equiv \mu^2(1 - 1/x_H)^{-1}, q \equiv (1 - x_L/x_H)^{-1}$ において書き直すと、 $(\mu + \sigma_1)(\mu + \sigma_2) = p$ と $(1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2) = q$ である。そうして $\sigma_1\sigma_2 + \mu(\sigma_1 + \sigma_2) = p - \mu^2$ と $\sigma_1\sigma_2 + (\sigma_1 + \sigma_2) = q - 1$ を得るが、これを σ_1 と σ_2 の基本対称式 $S_1 \equiv \sigma_1 + \sigma_2$ と $S_2 \equiv \sigma_1\sigma_2$ について解けば $S_2 = \mu + (\mu q - p)/(\mu - 1), S_1 = (p - q)/(\mu - 1) - (\mu + 1)$ である。すると 2 次方程式 $w^2 - S_1 w + S_2 = 0$ が相異なる正の実根を 2 つ持つときには、それらが σ_1 と σ_2 ($\sigma_1 > \sigma_2 > 0$) である。こうして σ_1 と σ_2 が求まればそれから $C \leftarrow x_H/(\sigma_1 - \sigma_2)$ とすると、極の係数は $\alpha_1 \leftarrow C\sigma_1^2, \alpha_2 \leftarrow C\sigma_2^2$ の計算で求まる (なお、 $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ であるから上記より $C > 0$ であり、さらに $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$ である)。

以上の手順により、極が 2 つの実数だけである有理関数 $x(t) \equiv \alpha_1/(t + \sigma_1) - \alpha_2/(t + \sigma_2)$ が決定される。

A.1.1 「方式1」の設計法のもとめ

4 つのパラメタ (μ, g_p, g_s, n) が与えられたとき、以下 (A.7) を順に計算する (ここで x'_H は $x_H - 1$ の意味である)。

$$\begin{cases} x_H &\leftarrow \cosh^2 \left\{ \frac{1}{2n} \cosh^{-1}(1/g_s) \right\}, \\ x'_H &\leftarrow \sinh^2 \left\{ \frac{1}{2n} \cosh^{-1}(1/g_s) \right\}, \\ x_L &\leftarrow \cosh^2 \left\{ \frac{1}{2n} \cosh^{-1}(g_p/g_s) \right\}, \\ p &\leftarrow (x_H/x'_H)\mu^2, \\ q &\leftarrow x_H/(x_H - x_L), \\ s_2 &\leftarrow \mu + (\mu q - p)/(\mu - 1), \\ s_1 &\leftarrow (p - q)/(\mu - 1) - (\mu + 1), \\ D &\leftarrow s_1^2 - 4s_2. \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

もしも $D \leq 0$ ならば (σ_1 と σ_2 は一致する実数であるか虚数なので) 実現不能として終了する。そうでないとき、もし

も $s_2 \leq 0$ ならば (実数 σ_1 と σ_2 が同じ符号にならないので) 実現不能として終了する. そうでないとき, もしも $s_1 \leq 0$ ならば (実数 σ_1 と σ_2 がどちらも負になるので) 実現不能として終了する. それ以外の場合には実現が可能であり, 上から順に (A.8) を計算する ($C = x_H/(\sigma_1 - \sigma_2) = x_H/\sqrt{D}$ である).

$$\begin{cases} \sigma_1 \leftarrow (s_1 + \sqrt{D})/2, \\ \sigma_2 \leftarrow s_2/\sigma_1, \\ C \leftarrow x_H/\sqrt{D}, \\ \alpha_1 \leftarrow C\sigma_1^2, \\ \alpha_2 \leftarrow C\sigma_2^2. \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

以上の手順により, 構成が可能である場合には, 必要な 4 つの実数値の組 $(\sigma_1, \alpha_1, \sigma_2, \alpha_2)$ が決定される.

A.2 「方式 2」: 通過域の両端で値の等しい伝達関数

「方式 2」では通過域に於ける伝達関数の最大最小比を小さくすることを容易にする手段として, 伝達関数の値が通過域の両端で等しいという条件 $g(0) = g(1) = g_p$ のほかに, 伝達関数の最大値 1 を通過域 $[0, 1]$ の内部のある 1 点でとるとする. その最大点の座標を $t = t_p$ ($0 < t_p < 1$) とおく.

簡易設計による伝達関数の関数形は「方式 1」の場合と同一で, 以下の式 (A.9) とする (ただし $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ である).

$$\begin{cases} g(t) \equiv g_s T_n(y(t)), \\ y(t) \equiv 2x(t) - 1, \\ x(t) \equiv \frac{\alpha_1}{t + \sigma_1} - \frac{\alpha_2}{t + \sigma_2}. \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

そうして形状パラメタ μ, g_p, g_s と次数 n の全部で 4 つの値を指定して, (実現が可能であれば) 伝達関数を決める.

まず前節 A.1 と同様に, 通過域に於ける $x(t)$ の最小値 x_L と最大値 x_H の値をそれぞれ, 3 つのパラメタ g_p, g_s, n の値から式 (5) を計算して求めておく.

すると $x(t)$ の満たすべき条件は $x(0) = x(1) = x_L$ と $x(\mu) = 1$, それと未知の最大点 t_p における条件 $x(t_p) = x_H$ と $(d/dt)x(t)|_{t=t_p} = 0$ であり, それら 5 つの条件を表す数式を並べた連立代数方程式 (A.10) を満たす必要がある.

$$\begin{cases} x_L = \frac{\alpha_1}{\sigma_1} - \frac{\alpha_2}{\sigma_2}, \\ x_L = \frac{\alpha_1}{1 + \sigma_1} - \frac{\alpha_2}{1 + \sigma_2}, \\ 1 = \frac{\alpha_1}{\mu + \sigma_1} - \frac{\alpha_2}{\mu + \sigma_2}, \\ x_H = \frac{\alpha_1}{t_p + \sigma_1} - \frac{\alpha_2}{t_p + \sigma_2}, \\ 0 = -\frac{\alpha_1}{(t_p + \sigma_1)^2} + \frac{\alpha_2}{(t_p + \sigma_2)^2}. \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

この連立方程式 (A.10) を既知の 3 つの値 x_L, x_H, μ を用

いて解いて, 5 つの未知数 $\sigma_1, \alpha_1, \sigma_2, \alpha_2, t_p$ を実数の範囲で求める. それが可能である場合にはパラメタの 4 つ組 (μ, g_p, g_s, n) を指定したときに「方式 2」の伝達関数 $g(t)$ が実現可能であり, そうでなければ実現不可能である.

まず連立式 (A.10) の第 1 番目と第 2 番目の式からは,

$$\frac{\alpha_1}{\sigma_1(1 + \sigma_1)} = \frac{\alpha_2}{\sigma_2(1 + \sigma_2)} \quad (\text{A.11})$$

であり, この等式の値を C とおくと極の係数はそれぞれ

$$\begin{cases} \alpha_1 = C\sigma_1(1 + \sigma_1), \\ \alpha_2 = C\sigma_2(1 + \sigma_2). \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

と表される. それを用いて連立式 (A.10) の第 3 番目の式から α_1 と α_2 を消去すると

$$1 = \frac{\alpha_1}{\mu + \sigma_1} - \frac{\alpha_2}{\mu + \sigma_2} = C \left\{ \frac{\sigma_1(1 + \sigma_1)}{\mu + \sigma_1} - \frac{\sigma_2(1 + \sigma_2)}{\mu + \sigma_2} \right\} \quad (\text{A.13})$$

となるので, C の逆数の値は

$$\begin{aligned} \frac{1}{C} &= \frac{\sigma_1(1 + \sigma_1)}{\mu + \sigma_1} - \frac{\sigma_2(1 + \sigma_2)}{\mu + \sigma_2} \\ &= (\sigma_1 - \sigma_2) \times \frac{\mu(1 + \sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2}{(\mu + \sigma_1)(\mu + \sigma_2)} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

と表される. すると x_L の値は

$$\begin{aligned} x_L &= \frac{\alpha_1}{\sigma_1} - \frac{\alpha_2}{\sigma_2} \\ &= C(\sigma_1 - \sigma_2) \\ &= \frac{(\mu + \sigma_1)(\mu + \sigma_2)}{\mu(1 + \sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

と表される (これから $C > 0$ であり, また $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$ であることもわかる).

つぎに最大点の座標 t_p についての条件は, 連立式 (A.10) の第 5 番目の式から

$$0 = \frac{\alpha_1}{(t_p + \sigma_1)^2} - \frac{\alpha_2}{(t_p + \sigma_2)^2} = C \left\{ \frac{\sigma_1(1 + \sigma_1)}{(t_p + \sigma_1)^2} - \frac{\sigma_2(1 + \sigma_2)}{(t_p + \sigma_2)^2} \right\} \quad (\text{A.16})$$

であるが, $t_p > 0, \sigma_1 > \sigma_2 > 0$ であることを用いて平方根を開くと,

$$\frac{\sqrt{\sigma_1(1 + \sigma_1)}}{t_p + \sigma_1} = \frac{\sqrt{\sigma_2(1 + \sigma_2)}}{t_p + \sigma_2} \quad (\text{A.17})$$

が得られる. この等式の値を Γ とおく. すると $\sigma_1 \neq \sigma_2$ であるから,

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\sqrt{\sigma_1(1 + \sigma_1)} - \sqrt{\sigma_2(1 + \sigma_2)}}{\sigma_1 - \sigma_2} \\ &= \frac{1 + \sigma_1 + \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1(1 + \sigma_1)} + \sqrt{\sigma_2(1 + \sigma_2)}} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

である. そうして,

$$\begin{cases} t_p + \sigma_1 = \sqrt{\sigma_1(1 + \sigma_1)}/\Gamma, \\ t_p + \sigma_2 = \sqrt{\sigma_2(1 + \sigma_2)}/\Gamma \end{cases} \quad (\text{A.19})$$

であるから

$$\begin{aligned} t_p &= \frac{1}{\Gamma} \times \frac{\sigma_1 \sqrt{\sigma_2(1+\sigma_2)} - \sigma_2 \sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)}}{\sigma_1 - \sigma_2} \\ &= \frac{1}{\Gamma} \times \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1 \sqrt{\sigma_2(1+\sigma_2)} + \sigma_2 \sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)}} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

となる. よって x_H の値は

$$\begin{aligned} x_H &= \frac{\alpha_1}{t_p + \sigma_1} - \frac{\alpha_2}{t_p + \sigma_2} \\ &= \Gamma \left\{ \frac{\alpha_1}{\sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)}} - \frac{\alpha_2}{\sqrt{\sigma_2(1+\sigma_2)}} \right\} \\ &= C \Gamma \left\{ \sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)} - \sqrt{\sigma_2(1+\sigma_2)} \right\} \\ &= C \Gamma^2 (\sigma_1 - \sigma_2) \\ &= \Gamma^2 x_L \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

と表される. すると,

$$\begin{cases} \frac{1}{\Gamma} = \sqrt{x_L/x_H} = \frac{\sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)} + \sqrt{\sigma_2(1+\sigma_2)}}{1 + \sigma_1 + \sigma_2}, \\ \frac{1}{x_L} = \frac{\mu(1 + \sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1 \sigma_2}{(\mu + \sigma_1)(\mu + \sigma_2)} = 1 - \frac{\mu(\mu - 1)}{(\mu + \sigma_1)(\mu + \sigma_2)} \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

となるので, これらの式から σ_1 と σ_2 についての以下の連立方程式 (A.23) が得られるので, これを解いて σ_1 と σ_2 (ただし $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$) を求めればよい.

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)} + \sqrt{\sigma_2(1+\sigma_2)}}{1 + \sigma_1 + \sigma_2} = \sqrt{x_L/x_H}, \\ (\mu + \sigma_1)(\mu + \sigma_2) = \mu(\mu - 1)(1 - 1/x_L)^{-1}. \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

そこで (A.23) の上側の式に含まれる平方根をはずすための変数の置換 $\sigma_1 \equiv z_1^2/(1 - z_1^2)$, $\sigma_2 \equiv z_2^2/(1 - z_2^2)$ (ただし $0 < z_1 < 1$, $0 < z_2 < 1$ とする) を行うと,

$$\frac{\sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)} + \sqrt{\sigma_2(1+\sigma_2)}}{1 + \sigma_1 + \sigma_2} = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \quad (\text{A.24})$$

となるので, 関係式 $z_1 + z_2 = (1 + z_1 z_2) \sqrt{x_L/x_H}$ が得られる (さらに関係式 $t_p = z_1 z_2 / (1 + z_1 z_2)$ もわかる). いま z_1 と z_2 の基本対称式を $S_1 \equiv z_1 + z_2$, $S_2 \equiv z_1 z_2$ とおくと, この関係式は $S_1 = (1 + S_2) \sqrt{x_L/x_H}$ と書ける.

さらに (A.23) の下側の式についても同様に, σ_1 と σ_2 を z_1 と z_2 を用いて置換して, さらに $\kappa \equiv \mu/(\mu - 1)$, $\nu \equiv (1 - 1/x_L)^{-1}$ とおくと, $(z_1^2 - \kappa)(z_2^2 - \kappa) = \nu \kappa (z_1^2 - 1)(z_2^2 - 1)$ となり, これを整理すると $\eta_0 (z_1 z_2)^2 + \eta_1 (z_1^2 + z_2^2) + \eta_2 = 0$ が得られ, これを z_1 と z_2 の基本対称式で表わすと

$$\eta_0 S_2^2 + \eta_1 (S_1^2 - 2S_2) + \eta_2 = 0 \quad (\text{A.25})$$

となる. ただし各係数は

$$\begin{cases} \eta_0 \equiv 1 - \nu \kappa, \\ \eta_1 \equiv (\nu - 1) \kappa, \\ \eta_2 \equiv (\kappa - \nu) \kappa \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

となる. 既に得ている関係式 $S_1 = (1 + S_2) \sqrt{x_L/x_H}$ を用いて式 (A.25) から S_1 を消去すると, 以下の S_2 についての 2 次方程式が得られる.

$$\zeta_0 S_2^2 + \zeta_1 S_2 + \zeta_2 = 0. \quad (\text{A.27})$$

ただしこの方程式の各係数は

$$\begin{cases} \zeta_0 \equiv \eta_0 + (x_L/x_H) \eta_1, \\ \zeta_1 \equiv 2\{(x_L/x_H) - 1\} \eta_1, \\ \zeta_2 \equiv \eta_2 + (x_L/x_H) \eta_1 \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

である. 簡単な考察から ζ_0 と ζ_1 は共に負であることがわかるので, S_2 についての 2 次方程式が正根を持つためには ζ_2 が正でなければならない. そうして ζ_2 が正であれば, 2 次方程式が実根を持つ場合であれば正根は 1 つだけである.

いま 2 次方程式 $\zeta_0 S_2^2 + \zeta_1 S_2 + \zeta_2 = 0$ が区間 $(0, 1)$ に入る実根 S_2 を持つとする (そうでなければ σ_1 と σ_2 には適切な解は無い). そのような S_2 が存在するとき, $S_1 \leftarrow (S_2 + 1) \sqrt{x_L/x_H}$ を作る.

いま 2 次方程式 $w^2 - S_1 w + S_2 = 0$ の相異なる実根が共に区間 $(0, 1)$ にあるとき, それらを z_1 と z_2 ($1 > z_1 > z_2 > 0$) とする (もしもそのような 2 根が無ければ, σ_1 と σ_2 には適切な解は無い). そのとき σ_1 と σ_2 の値は z_1 と z_2 の値から $\sigma_1 \leftarrow z_1^2/(1 - z_1^2)$, $\sigma_2 \leftarrow z_2^2/(1 - z_2^2)$ と計算して決まり, 各極の係数も $C \leftarrow x_L/(\sigma_1 - \sigma_2)$ として $\alpha_1 \leftarrow C \sigma_1(1 + \sigma_1)$, $\alpha_2 \leftarrow C \sigma_2(1 + \sigma_2)$ と計算して決まる (なお, $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ であるから上記より $C > 0$ であり, さらに $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$ である).

以上の手順により, 極が 2 つの実数だけである有理関数 $x(t) \equiv \alpha_1/(t + \sigma_1) - \alpha_2/(t + \sigma_2)$ が決定される.

A.2.1 「方式 2」の設計法のみとめ

上記の説明による解法手順をまとめると以下のようなになる. 4 つのパラメタ (μ, g_p, g_s, n) が与えられたとき, まず以下 (A.29) を順に計算する. (ここで x'_H は $x_H - 1$ を, x'_L は $x_L - 1$ をそれぞれ意味する.)

$$\begin{cases} x_H \leftarrow \cosh^2 \left\{ \frac{1}{2n} \cosh^{-1}(1/g_s) \right\}, \\ x'_H \leftarrow \sinh^2 \left\{ \frac{1}{2n} \cosh^{-1}(1/g_s) \right\}, \\ x_L \leftarrow \cosh^2 \left\{ \frac{1}{2n} \cosh^{-1}(g_p/g_s) \right\}, \\ x'_L \leftarrow \sinh^2 \left\{ \frac{1}{2n} \cosh^{-1}(g_p/g_s) \right\}, \\ \kappa \leftarrow \mu/(\mu - 1), \\ \zeta_0 \leftarrow 1 - (x_L/x'_L)(x'_H/x_H) \kappa, \\ \zeta_1 \leftarrow -2(\kappa/x'_L)(x_H - x_L)/x_H, \\ \zeta_2 \leftarrow \{\kappa - (x_L/x'_L)(x'_H/x_H)\} \kappa, \\ D_1 \leftarrow \zeta_1^2 - 4\zeta_0 \zeta_2. \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

そうして, もしも $D_1 < 0$ であれば実現不能として終了する. そうでないときには, もしも $\zeta_2 \leq 0$ であれば実現不能として終了する. そうでないときには, 次の (A.30) を順

に計算する（ここでは $\zeta_0 < 0$, $\zeta_1 < 0$ であることを用いている）。

$$\begin{cases} s_2 \leftarrow 2\zeta_2/(-\zeta_1 + \sqrt{D_1}), \\ s_1 \leftarrow (1 + s_2)\sqrt{x_L/x_H}, \\ D_2 \leftarrow s_1^2 - 4s_2. \end{cases} \quad (\text{A.30})$$

もしも $D_2 \leq 0$ であれば (z_1 と z_2 が虚数であるかまたは一致した実数なので), 実現不能として終了する. そうでないとき $s_2 \leq 0$ であれば (z_1 と z_2 が同符号にならないので) 実現不能として終了する. そうでないとき $s_1 \leq 0$ であれば (z_1 と z_2 が共に正になることができないので) 実現不能として終了する. それ以外の場合には z_1 と z_2 を以下の (A.31) で計算する ($z_1 > z_2 > 0$ である).

$$\begin{cases} z_1 \leftarrow (s_1 + \sqrt{D_2})/2, \\ z_2 \leftarrow s_2/z_1. \end{cases} \quad (\text{A.31})$$

もしも $z_1 \geq 1$ であれば ($1 > z_1 > z_2 > 0$ を満たせないの)で, 実現不能として終了する. それ以外の場合には実現が可能であり, 以下の (A.32) を上から順に計算する ($g(t)$ が通過域の内部で最大値 1 をとる座標が t_p である).

$$\begin{cases} \sigma_1 \leftarrow z_1^2/\{(1-z_1)(1+z_1)\}, \\ \sigma_2 \leftarrow z_2^2/\{(1-z_2)(1+z_2)\}, \\ t_p \leftarrow z_1 z_2/(1+z_1 z_2), \\ C \leftarrow x_L/\{(1+\sigma_1)(1+\sigma_2)s_1\sqrt{D_2}\}, \\ \alpha_1 \leftarrow C\sigma_1(1+\sigma_1), \\ \alpha_2 \leftarrow C\sigma_2(1+\sigma_2). \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

以上の手順により, 構成が可能である場合には, 必要な 4 つの実数値の組 ($\sigma_1, \alpha_1, \sigma_2, \alpha_2$) が決定される.

注意: 「方式 1」と「方式 2」の $x(t)$ は $[0, \infty)$ で正值である

まず仮定から $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ である. いま $x(t) \equiv \alpha_1/(t + \sigma_1) - \alpha_2/(t + \sigma_2) = \{(\alpha_1 - \alpha_2)t + (\alpha_1\sigma_2 - \alpha_2\sigma_1)\}/\{(t + \sigma_1)(t + \sigma_2)\}$ である. すると $x(0) > 0$ であるから $\alpha_1\sigma_2 - \alpha_2\sigma_1 > 0$ である. 「方式 1」と「方式 2」のどちらの場合にも $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$ であることがそれぞれの構成中に示されている. よって $t \geq 0$ であれば $x(t) > 0$ である. このことは, 阻止域 $t \in [\mu, \infty)$ に於いて Chebyshev 多項式の引数である $y(t) = 2x(t) - 1$ の値が -1 よりも小さくならないことを保証する. さらに阻止域で $y(t)$ は単調減少でその値は 1 よりも大きくならない.

注意: 「方式 1」と「方式 2」の設計の関係性

「方式 2」の伝達関数 $g(t)$ の最大点を $t = t_p$ とするとき, 「方式 2」の本来の通過域 $[0, 1]$ から $[0, t_p]$ の部分を取り除いた区間 $t \in [t_p, 1]$ を $\tilde{t} \in [0, 1]$ に写す線形の座標変換 $t = \mathcal{L}(\tilde{t})$ を用いて $\tilde{g}(\tilde{t}) = g(\mathcal{L}(\tilde{t}))$ としたものが「方式 1」の伝達関数とみなせるので, 「方式 1」と「方式 2」の 2 つの伝達関数のしきい値と次数である 3 つのパラメタ g_p, g_s, n を共通に設定した場合に, 「方式 2」において伝達関数の遷移域 $(1, \mu)$ の幅と通過域 $[0, 1]$ の幅の比が $\mu - 1$ であれば,

「方式 1」の場合の比は $\tilde{\mu} - 1 = (\mu - 1)/(1 - t_p)$ なので, それら両者の「幅の比」の比は $(\mu - 1)/(\tilde{\mu} - 1) = (1 - t_p) < 1$ である. このことから「方式 2」の伝達関数が存在すれば, その遷移域の幅は「方式 1」のものに比べて必ず狭くなるのがわかる.

A.3 レゾルベントを 1 つと 2 つのフィルタの比較を試みた実験の例

まず, 比較の便利のために, 単一のレゾルベントを用いるフィルタをレゾルベントを 2 つ用いるものと同じような基準で設定できるように, 従来のシフトが実数の単一のレゾルベントからなるフィルタを少し拡張する. そうして, 単一のレゾルベントを使う場合と, レゾルベントを 2 つ使う場合の 2 つの方式「方式 1」と「方式 2」について, 若干の実験を行なう. ただし, 一応の経過時間を示したが, 2 つのレゾルベントを用いる場合に, それらの 2 つの構成や作用についての処理を並行して行なっているものではないし, 並列化も最善努力のものではない. たとえばフィルタを 1 回だけ適用する場合については, レゾルベントを 2 つ使うものの方が精度が少しだけ良いことが見て取れる.

A.3.1 シフトが実数の単一のレゾルベントからなるフィルタ (拡張版)

これまで, シフトが実数である単一のレゾルベントからなるフィルタの伝達関数 $g(t)$ として式 (A.33) で表されるものを用いてきた.

$$g(t) = g_s T_n(y(t)), \quad y(t) = 2x(t) - 1, \quad x(t) = \frac{\mu + \sigma}{t + \sigma}. \quad (\text{A.33})$$

これは連続なパラメタとして g_s, μ, σ と不連続なパラメタである次数 n を含む.

今回それを拡張し, 伝達関数が式 (A.34) で表されるものを新たに導入する (β の値を -1 に制限すればこれまでのものと一致する).

$$g(t) = g_s T_n(y(t)), \quad y(t) = \frac{\alpha}{t + \sigma} + \beta. \quad (\text{A.34})$$

ただし $\sigma > 0, \alpha > 0$ であり, $y(t)$ は非負領域 $[0, \infty)$ で連続で単調減少になる. そうしてこの伝達関数の形状のパラメタ (μ, g_p, g_s) (ただし $\mu > 1, 1 > g_p > g_s > 0$ である) に関しての条件をいつものように $g(0) = 1, g(1) = g_p, g(\mu) = g_s$, それと $[\mu, \infty)$ において $g_s \geq |g(t)|$ とする.

パラメタの 4 つ組 (μ, g_p, g_s, n) を与えたときに, 伝達関数が $g(t)$ が実現可能であるかの判定と, 実現可能であれば $x(t)$ を決定する 3 つの実数 (σ, α, β) を与える手順は次のようになる. まず (A.35) を上から順に計算する.

$$\begin{cases} y_H \leftarrow \cosh\left(\frac{1}{n} \cosh^{-1} \frac{1}{g_s}\right), \quad y_L \leftarrow \cosh\left(\frac{1}{n} \cosh^{-1} \frac{g_p}{g_s}\right), \\ \sigma \leftarrow (y_L - 1)/\{(y_H - y_L) - (y_H - 1)/\mu\}, \\ \alpha \leftarrow \{(y_H - y_L)\sigma\}(\sigma + 1), \quad \beta \leftarrow y_L - \{(y_H - y_L)\sigma\}. \end{cases} \quad (\text{A.35})$$

そうして計算された結果が $\sigma > 0$ かつ $\beta \geq -1$ のときに限りフィルタは実現可能とする ($y(t)$ は非負領域で連続になるためには $\sigma > 0$ で, そうして $y(0) = y_H$, $y(1) = y_L$ から単調減少関数になり, さらに $y(\mu) = 1$ と決めるので, 阻止域で $g_s \geq |g(t)|$ であるための必要十分条件は $\beta \geq -1$ である).

以上の手順により, 4つ組 (μ, g_p, g_s, n) を指定したときに, シフトが実数の単一のレゾルベントから構成される式 (A.34) の形を持ったフィルタの実現可能性を判定して, 実現が可能であればその具体的な作用の手続きを構成できる. (レゾルベントを2つ使う場合と同様に, 4つ組のうち3つを指定して, あとの1つの値はフィルタが実現可能な範囲で最も望ましいものとなるように探索して決めることもできる.)

有理関数 $y(t)$ を決める3つの実数値 σ, α, β が決まれば, 求めたい固有対の固有値を含む固有値分布の下端にある区間を $[a, b]$ とするとき, 対応するフィルタ \mathcal{F} は式 (A.36) で与えられる.

$$\begin{cases} \mathcal{F} \equiv g_s T_n(\mathcal{Y}), \mathcal{Y} \equiv \gamma \mathcal{R}(\rho) + \beta I, \\ \rho = a - (b - a)\sigma, \gamma = (b - a)\alpha. \end{cases} \quad (\text{A.36})$$

A.3.2 シフトが実数の単一のレゾルベントを用いたフィルタ

これはシフトが実数の単一のレゾルベントを用いた Chebyshev 多項式をフィルタとした計算の例である.

FEM の要素分割の方式は $(N1, N2, N3) = (40, 50, 60)$ としている. そうして固有値が区間 $[a, b] = [3, 30]$ に含まれる固有対 54 個を求めた.

表 A.1 は $\mu = 2.0$ の場合, 表 A.2 は $\mu = 1.5$ の場合, 表 A.3 は $\mu = 1.25$ の場合であり, 次数 n を 10 から 30 まで5刻みでとって直交化付きフィルタの反復回数を 1 から 3 まで変えて計算した結果の相対残差の最大値をそれぞれ示している. フィルタのパラメータはすべて $g_s = 1E-13$ としている. これら指定した3つのパラメータ (g_s, μ, n) 以外の残りのパラメータ g_p の値は 0.5^j の形でフィルタを実現可能とする最大値を選んだ. 最初にフィルタに適用するベクトルの数 m は, $\mu = 2.0$ の場合は $m = 200$ とし, $\mu = 1.5$ の場合は $m = 125$ とし, $\mu = 1.25$ の場合は $m = 100$ とした. 表 A.4, 表 A.5, 表 A.6 はそれぞれ, $\mu = 2.0, \mu = 1.5, \mu = 1.25$ の場合に対する, 本実験で計測した経過時間の例である.

A.3.3 シフトが実数の2つのレゾルベントを用いたフィルタ

これはシフトが実数の2つのレゾルベントを用いたそれらの線形結合の Chebyshev 多項式をフィルタとした計算の例である. FEM の直方体要素分割の方式は $(N1, N2, N3) = (40, 50, 60)$ としている. そうして固有

表 A.1 最大の相対残差 (「単一」, $\mu = 2.0, m = 200$)

| n | 反復 1 回 | 反復 2 回 | 反復 3 回 |
|-----|---------|---------|---------|
| 10 | 5.0E-04 | 8.9E-11 | 4.4E-13 |
| 15 | 2.4E-05 | 5.6E-13 | 5.5E-13 |
| 20 | 8.2E-06 | 7.0E-13 | 7.0E-13 |
| 25 | 3.3E-06 | 8.3E-13 | 8.2E-13 |
| 30 | 4.0E-06 | 7.0E-13 | 6.9E-13 |

表 A.2 最大の相対残差 (「単一」, $\mu = 1.5, m = 125$)

| n | 反復 1 回 | 反復 2 回 | 反復 3 回 |
|-----|---------|---------|---------|
| 10 | 3.8E-02 | 2.4E-07 | 3.7E-12 |
| 15 | 1.2E-03 | 9.3E-10 | 5.4E-13 |
| 20 | 2.5E-04 | 5.5E-11 | 6.3E-13 |
| 25 | 1.7E-04 | 1.6E-11 | 7.3E-13 |
| 30 | 2.0E-04 | 1.2E-11 | 6.1E-13 |

表 A.3 最大の相対残差 (「単一」, $\mu = 1.25, m = 100$)

| n | 反復 1 回 | 反復 2 回 | 反復 3 回 |
|-----|---------|---------|---------|
| 10 | 1.1E-01 | 4.5E-05 | 1.1E-08 |
| 15 | 6.2E-02 | 1.7E-06 | 2.9E-11 |
| 20 | 3.3E-02 | 2.9E-07 | 3.7E-12 |
| 25 | 1.0E-02 | 7.0E-08 | 6.3E-13 |
| 30 | 3.1E-03 | 1.0E-08 | 8.0E-13 |

表 A.4 経過時間 (秒) (「単一」, $\mu = 2.0, m = 200$)

| n | 反復 1 回 | 反復 2 回 | 反復 3 回 |
|-----|--------|--------|--------|
| 10 | 31.3 | 59.0 | 82.4 |
| 15 | 40.6 | 76.7 | 108.4 |
| 20 | 50.1 | 94.5 | 134.0 |
| 25 | 58.0 | 112.7 | 161.7 |
| 30 | 66.0 | 129.4 | 186.7 |

表 A.5 経過時間 (秒) (「単一」, $\mu = 1.5, m = 125$)

| n | 反復 1 回 | 反復 2 回 | 反復 3 回 |
|-----|--------|--------|--------|
| 10 | 22.7 | 41.7 | 59.0 |
| 15 | 29.3 | 55.3 | 78.9 |
| 20 | 36.3 | 69.0 | 99.9 |
| 25 | 43.6 | 83.3 | 120.7 |
| 30 | 50.2 | 96.5 | 142.1 |

表 A.6 経過時間 (秒) (「単一」, $\mu = 1.25, m = 100$)

| n | 反復 1 回 | 反復 2 回 | 反復 3 回 |
|-----|--------|--------|--------|
| 10 | 17.3 | 32.3 | 45.8 |
| 15 | 24.2 | 43.4 | 62.0 |
| 20 | 29.5 | 55.2 | 78.4 |
| 25 | 35.7 | 65.7 | 95.5 |
| 30 | 40.3 | 76.8 | 113.0 |

値が区間 $[a, b] = [3, 30]$ に含まれる固有対を 54 個求めた例である.

表 A.7 は「方式 1」で $\mu = 2.0$ の場合, 表 A.8 は「方式 1」で $\mu = 1.5$ の場合, 表 A.9 は「方式 1」で $\mu = 1.25$ の場合であり, 表 A.10 は「方式 2」で $\mu = 2.0$ の場合, 表 A.11 は「方式 2」で $\mu = 1.5$ の場合, 表 A.12 は「方式 2」で $\mu = 1.25$ の場合である. すべての場合で g_s は $1E-13$ としており, 次数 n を 10 から 30 まで5刻みでとって直交化付

きフィルタの反復回数を1から3までについて計算して得られた近似対の相対残差の最大値を示している。指定していないパラメタ g_p の値は 0.5^j の形のものでフィルタを実現可能にする最大値を選んでいる。表の中で横線が引いてあるものは、フィルタが探索で構成できなかったことを示す。最初にフィルタに適用するベクトルの数 m は、 $\mu = 2.0$ の場合は $m = 200$ とし、 $\mu = 1.5$ の場合は $m = 125$ とし、 $\mu = 1.25$ の場合は $m = 100$ とした。表 A.13、表 A.14、

表 A.15 はそれぞれ「方式1」の場合の $\mu = 2.0$ 、 $\mu = 1.5$ 、 $\mu = 1.25$ の場合の計測された経過時間の例である。同様に表 A.16、表 A.17、表 A.18 はそれぞれ「方式2」の場合の $\mu = 2.0$ 、 $\mu = 1.5$ 、 $\mu = 1.25$ の場合の計測された経過時間の例である。

表 A.7 最大の相対残差 (「方式1」, $\mu = 2.0$, $m = 200$)

| n | 反復1回 | 反復2回 | 反復3回 |
|-----|---------|---------|---------|
| 10 | 3.8E-04 | 8.0E-11 | 4.7E-13 |
| 15 | 7.5E-06 | 1.2E-12 | 1.2E-12 |
| 20 | 9.5E-07 | 2.0E-12 | 2.0E-12 |
| 25 | 5.1E-07 | 1.1E-12 | 1.1E-12 |
| 30 | 1.5E-07 | 1.3E-12 | 1.3E-12 |

表 A.8 最大の相対残差 (「方式1」, $\mu = 1.5$, $m = 125$)

| n | 反復1回 | 反復2回 | 反復3回 |
|-----|---------|---------|---------|
| 10 | 1.3E-02 | 7.9E-08 | 6.4E-13 |
| 15 | 7.5E-04 | 2.8E-10 | 6.2E-13 |
| 20 | 8.2E-05 | 4.5E-12 | 8.9E-13 |
| 25 | 1.6E-05 | 1.3E-12 | 1.3E-12 |
| 30 | 8.6E-06 | 1.4E-12 | 1.4E-12 |

表 A.9 最大の相対残差 (「方式1」, $\mu = 1.25$, $m = 100$)

| n | 反復1回 | 反復2回 | 反復3回 |
|-----|---------|---------|---------|
| 10 | — | — | — |
| 15 | 1.9E-02 | 2.4E-07 | 2.6E-12 |
| 20 | 3.3E-03 | 1.0E-08 | 8.4E-13 |
| 25 | 9.0E-04 | 6.2E-10 | 1.5E-12 |
| 30 | 5.6E-04 | 1.3E-10 | 1.8E-12 |

表 A.10 最大の相対残差 (「方式2」, $\mu = 2.0$, $m = 200$)

| n | 反復1回 | 反復2回 | 反復3回 |
|-----|---------|---------|---------|
| 10 | 6.9E-03 | 4.1E-10 | 4.7E-12 |
| 15 | 4.4E-05 | 3.8E-12 | 4.6E-12 |
| 20 | 2.8E-06 | 1.7E-12 | 2.0E-12 |
| 25 | 4.4E-07 | 4.2E-12 | 5.0E-12 |
| 30 | 2.9E-07 | 2.8E-12 | 2.8E-12 |

表 A.11 最大の相対残差 (「方式2」, $\mu = 1.5$, $m = 125$)

| n | 反復1回 | 反復2回 | 反復3回 |
|-----|---------|---------|---------|
| 10 | 9.9E-02 | 2.2E-07 | 4.5E-12 |
| 15 | 6.4E-03 | 5.7E-10 | 4.2E-12 |
| 20 | 1.1E-04 | 3.9E-12 | 5.2E-12 |
| 25 | 5.1E-05 | 3.1E-12 | 3.3E-12 |
| 30 | 2.5E-05 | 4.5E-12 | 4.6E-12 |

表 A.12 最大の相対残差 (「方式2」, $\mu = 1.25$, $m = 100$)

| n | 反復1回 | 反復2回 | 反復3回 |
|-----|---------|---------|---------|
| 10 | — | — | — |
| 15 | 7.0E-01 | 2.1E-06 | 3.1E-11 |
| 20 | 5.4E-02 | 1.8E-08 | 4.8E-12 |
| 25 | 1.1E-02 | 2.1E-09 | 4.1E-12 |
| 30 | 1.4E-03 | 1.1E-10 | 5.3E-12 |

表 A.13 経過時間 (秒) (「方式1」, $\mu = 2.0$, $m = 200$)

| n | 反復1回 | 反復2回 | 反復3回 |
|-----|-------|-------|-------|
| 10 | 43.6 | 82.5 | 116.9 |
| 15 | 58.6 | 110.9 | 159.5 |
| 20 | 72.5 | 140.6 | 203.7 |
| 25 | 87.5 | 170.2 | 246.4 |
| 30 | 102.6 | 197.7 | 289.8 |

表 A.14 経過時間 (秒) (「方式1」, $\mu = 1.5$, $m = 125$)

| n | 反復1回 | 反復2回 | 反復3回 |
|-----|------|-------|-------|
| 10 | 32.2 | 60.7 | 86.0 |
| 15 | 43.2 | 82.4 | 120.4 |
| 20 | 55.2 | 105.6 | 154.5 |
| 25 | 66.4 | 128.9 | 189.1 |
| 30 | 78.1 | 152.2 | 224.0 |

表 A.15 経過時間 (秒) (「方式1」, $\mu = 1.25$, $m = 100$)

| n | 反復1回 | 反復2回 | 反復3回 |
|-----|------|-------|-------|
| 10 | — | — | — |
| 15 | 34.5 | 65.7 | 95.2 |
| 20 | 45.2 | 84.2 | 123.5 |
| 25 | 53.6 | 102.6 | 151.4 |
| 30 | 62.9 | 121.2 | 178.4 |

表 A.16 経過時間 (秒) (「方式2」, $\mu = 2.0$, $m = 200$)

| n | 反復1回 | 反復2回 | 反復3回 |
|-----|-------|-------|-------|
| 10 | 43.2 | 83.0 | 116.3 |
| 15 | 58.7 | 110.8 | 160.0 |
| 20 | 72.8 | 140.3 | 204.1 |
| 25 | 86.9 | 169.7 | 245.9 |
| 30 | 100.7 | 197.3 | 287.6 |

表 A.17 経過時間 (秒) (「方式2」, $\mu = 1.5$, $m = 125$)

| n | 反復1回 | 反復2回 | 反復3回 |
|-----|------|-------|-------|
| 10 | 31.5 | 59.2 | 86.1 |
| 15 | 44.2 | 83.6 | 120.9 |
| 20 | 56.4 | 106.4 | 155.7 |
| 25 | 67.3 | 128.9 | 190.3 |
| 30 | 78.7 | 152.4 | 224.8 |

表 A.18 経過時間 (秒) (「方式2」, $\mu = 1.25$, $m = 100$)

| n | 反復1回 | 反復2回 | 反復3回 |
|-----|------|-------|-------|
| 10 | — | — | — |
| 15 | 35.2 | 66.4 | 96.0 |
| 20 | 45.0 | 84.9 | 123.7 |
| 25 | 53.8 | 103.9 | 151.7 |
| 30 | 63.5 | 122.3 | 179.6 |

参考文献

- [1] 村上弘：固有値が指定された区間内にある固有対を解くための対称固有値問題用のフィルタの設計, *情報処理学会論文誌：コンピューティングシステム (ACS31)*, Vol.3, No.3 (2010), pp.1-21.
- [2] 村上弘：対称一般固有値問題のフィルタ作用素を用いた不変部分空間の近似構成, *情報処理学会論文誌：コンピューティングシステム (ACS35)*, Vol.4, No.4 (2011), pp.1-14.
- [3] 村上弘：レゾルベントを用いたフィルタによる固有値問題の解法について, *情報処理学会研究報告*, Vol.2012-HPC-133, No.22 (2012), pp.1-8.
- [4] 村上弘：実対称定値一般固有値問題の最小側固有値を持つ固有対に対する実数シフトのレゾルベントを組み合わせたフィルタによる解法, *先進的計算基盤システムシンポジウム論文集 2012* (2012), pp.81-82.
- [5] 村上弘：レゾルベントの線形結合をフィルタに用いたエルミート定値一般固有値問題のフィルタ対角化法, *情報処理学会論文誌：コンピューティングシステム (ACS45)*, Vol.7, No.1 (2014), pp.57-72.
- [6] 村上弘：レゾルベントの多項式をフィルタとして用いる対角化法について, *情報処理学会研究報告*, Vol.2014-HPC-146, No.13 (2014), pp.1-4.
- [7] 村上弘：実対称定値一般固有値問題に対するレゾルベントの多項式によるフィルタの構成法の検討, *情報処理学会研究報告*, Vol.2014-HPC-147, No.2 (2014), pp.1-10.
- [8] 村上弘：実数シフトのレゾルベントを組み合わせたフィルタによる実対称定値一般固有値問題の下端付近の固有値を持つ固有対の解法, *HPCS2015 シンポジウム論文集*, Vol.2015 (2015), pp.38-51.
- [9] 村上弘：一つのレゾルベントから構成されたフィルタを用いた実対称定値一般固有値問題に対するフィルタ対角化法の実験, *情報処理学会研究報告*, Vol.2015-HPC-149, No.7 (2015), pp.1-16.
- [10] 村上弘：実対称定値一般固有値問題の最小側固有対を解くための実数シフトのレゾルベントの多項式によるフィルタの簡易な設計法, *情報処理学会研究報告集*, Vol.2016-HPC-155, No.44 (2016), pp.1-27.
- [11] 村上弘：レゾルベントの多項式によるフィルタを用いた実対称定値一般固有値問題の解法, *情報処理学会研究報告集*, Vol.2016-HPC-157, No.4 (2016), pp.1-15.
- [12] 村上弘：チェビシェフ展開形で表わされたレゾルベントの多項式によるフィルタの伝達特性の調整, *数理解析研究所講究録*, No.2019 (2017), pp.96-112.
- [13] 村上弘：実対称定値一般固有値問題を解くためのレゾルベントの多項式型フィルタの設計について, *情報処理学会研究報告*, Vol.2017-HPC-158, No.7 (2017), pp.1-10.
- [14] 村上弘：実対称定値一般固有値問題を解くための少数のレゾルベントの多項式を用いたフィルタの設計法, *情報処理学会研究報告*, Vol.2017-HPC-159, No.4 (2017), pp.1-13.
- [15] 村上弘：少数のレゾルベントから構成されたフィルタを用いた実対称定値一般固有値問題の解法, *情報処理学会研究報告*, Vol.2017-HPC-160, No.32 (2017), pp.1-32.
- [16] 村上弘：少数のレゾルベントで構成された多項式型フィルタによる対称定値一般固有値問題の解法, *情報処理学会研究報告*, Vol.2017-HPC-161, No.7 (2017), pp.1-13.
- [17] 村上弘：少数のレゾルベントから構成されたフィルタを用いた対称定値一般固有値問題の解法, *情報処理学会研究報告*, Vol.2017-HPC-162, No.21 (2017), pp.1-34.
- [18] 村上弘：少数のレゾルベントの多項式型フィルタを用いた一般固有値問題の解法, *情報処理学会研究報告*, Vol.2018-HPC-165, No.15 (2018), pp.1-21.
- [19] 村上弘：フィルタにレゾルベントの線形結合の多項式を用いた複素エルミート定値一般固有値問題の解法, *情報処理学会研究報告*, Vol.2018-HPC-166, No.10 (2018), pp.1-17.
- [20] 村上弘：フィルタ対角化法による近似固有対の精度の改良について, *情報処理学会研究報告*, Vol.2018-HPC-167, No.29 (2018), pp.1-31.
- [21] 村上弘：単一のレゾルベントのチェビシェフ多項式による実対称定値一般固有値問題の解法用の簡易型フィルタ, *情報処理学会論文誌：コンピューティングシステム (ACS64)*, Vol.12, No.2 (2019), pp.1-26.
- [22] 村上弘：フィルタ対角化法による固有値問題の近似対の改良, *情報処理学会研究報告*, Vol.2019-HPC-168, No.18 (2019), pp.1-36.
- [23] 村上弘：直交化付きフィルタ適用による固有値問題の近似対の反復改良について, *情報処理学会研究報告*, Vol.2019-HPC-169, No.1 (2019), pp.1-31.
- [24] Hiroshi Murakami: Filters consist of a few resolvents to solve real symmetric-definite generalized eigenproblems, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, Vol.36, No.2, (2019), pp.579-618.
- [25] 村上弘：フィルタの反復適用による実対称定値一般固有値問題の近似対の改良, *情報処理学会論文誌：コンピューティングシステム (ACS65)*, Vol.12, No.3 (2019), pp.14-33.
- [26] 村上弘：少数のレゾルベントの線形結合の多項式をフィルタとして用いた実対称定値一般固有値問題の解法, *情報処理学会研究報告*, Vol.2019-HPC-171, No.7 (2019), pp.1-45.
- [27] 村上弘：少数のレゾルベントで構成されたフィルタを用いた実対称定値一般固有値問題の解法, *情報処理学会論文誌：コンピューティングシステム (ACS67)*, Vol.13, No.1 (2020), pp.1-27.
- [28] 村上弘：実数シフトのレゾルベントを少数用いて構成された実対称定値一般固有値問題の下端固有対を解くためのフィルタ, *情報処理学会研究報告*, Vol.2020-HPC-173, No.1, (2020), pp.1-10.