

Nメンズモリスのコマの配置の数の分析

武田 弾¹ 保木 邦仁¹

概要: 本研究はナインメンズモリスおよびその類似ゲーム 6 種の二段階および三段階でユニークかつ擬到達可能な配置の 2 つの ZDD を用いた最小完全ハッシュ関数とその逆関数を実現する手法を提案する。ここで、ユニークとは回転・反転しても互いに等しくならないという配置間を持つ性質のことであり、擬到達可能とは特定の到達不可能であることを判定する条件を満たさないという配置を持つ性質のことである。また、これら 7 種のゲームのユニークかつ到達可能な配置数の上界 (擬到達可能な配置数) を報告する。Gasser らの上界 (7673 759 269) を 7673 755 215 に改善できたのではないかと考えている。

1. はじめに

ボードゲームはしばしば、人工知能研究の題材として用いられる。ボードゲームのプレイは計算機による再現が比較的容易であったり、様々な複雑性を持つボードゲームが揃っていたりすることなどが理由として挙げられる。

種々のゲームを特徴付ける複雑性を測る指標の 1 つに状態数がある (表 1)。

Gasser はナインメンズモリスの第二段階及び第三段階 (後述) において、盤上の一色のコマが 2 個以下もしくは 9 個以上である配置、盤の持つ対称性によって重複する配置、いくつかの到達不可能な配置の 3 種類の配置を排除することで表 1 に示したような上界を得た [5]。

Anurag らの Tic-Tac-Toe の配置数はユニークかつ到達可能な配置のみを数えている [1]。また中国将棋、朝鮮将棋は Danghwi によって配置数の報告がされた [6]。将棋は篠田によって配置数が評価された [2]。篠田は、40 枚のコマをすべて区別し、それぞれを盤上の枡または駒台におき、先後と成不成の配置を数えることで、まず、将棋のコマの配置数が 10^{100} より少ないことを示した。つぎに、そ

こから無駄な配置を部分的に考慮することでコマの配置数が 10^{70} より小さいことを示した。最後に、到達可能な配置の条件を用意し、その条件に合致する配置を数え上げることでコマの配置数が 10^{60} より大きいことを示した。囲碁については 2.0×10^{170} 程度の数が報告された [9]。ここで到達不可能とされているのは呼吸点のない石がある配置である。Schaeffer らは、チェッカーの配置はおよそ 5×10^{20} あることを示した [7]。この配置数は、裏返る前のコマが敵陣の一番奥にあることはない (一番奥に行った時点でそのコマは裏返り、キングなるため) ことだけを考慮し、求められたものとみられる。また、Allis によればオセロの配置数は $3^{64} \sim 10^{30}$ とされている [8]。これはオセロの盤の 64 の枡それぞれについて黒、白、何も無い、の 3 通りがあるとしたときの数で、その配置が到達可能であるかどうかは考慮されていない。また、同論文では、モンテカルロ法によって得られた近似的な到達可能な配置数が 10^{28} であることも報告されている。

本研究では、ナインメンズモリスとその類似ゲームの配置数を分析し、ZDD を用いて対称性を考慮した配置の完全ハッシュを構築する。

2. 基礎知識

2.1 ナインメンズモリスのルール

ナインメンズモリスは二人でプレイするボードゲームである [3]。このゲームでは図 1 に示したゲーム盤を使用する。このゲーム盤は 24 個の点を持つ。それぞれのプレイヤーは 9 個のコマを持つ。コマは普通、白もしくは黒に塗られていて、一人のプレイヤーはいずれか一色のコマを自分のコマとする。

これらのコマすべての置かれ方を配置、白 (黒) コマす

表 1 種々のボードゲームとその配置数の見積り

ボードゲーム	配置数の見積り	性質
Tic-Tac-Toe	765	正確
ナインメンズモリス	7673 759 269	上界, 到達可
チェッカー	500 995 484 682 338 672 639	上界, 到達可
オセロ	$3^{64} (10^{28})$	上界 (近似値), 到達可
中国将棋	40 枡の整数 (約 7×10^{39})	正確
朝鮮将棋	45 枡の整数 (約 2×10^{44})	正確
将棋	$10^{60} (10^{70})$	下界 (上界), 到達可
囲碁 (19 路盤)	171 枡の整数 (約 2×10^{170})	正確, 到達可

¹ 電気通信大学

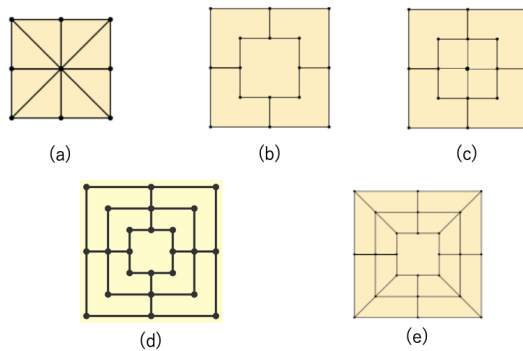


図 1 ナインメンズモリスとその類似ゲームのゲーム盤

すべての置かれ方を白（黒）コマの配置と呼ぶことにする。
プレイヤーがコマを縦または横に 3 個並べると「ミル」が成立する。ミルを成立させたプレイヤーは相手プレイヤーのコマを 1 つ盤上から取除く。

このミルの成立によってコマを取除く場合、ミルを成立させたプレイヤーは取除くコマを相手プレイヤーのコマのうちミルを構成していないコマから選ぶ。ただし、例外として、相手プレイヤーのコマすべてがミルを構成しているときは、好きなコマを取除く。

ゲームの大まかな流れを説明する。

ナインメンズモリスは大きく三つの段階に別れる。第一段階はコマを置いていく。第二段階ではコマの移動が行われる。第三段階ではフライングによりコマの機動性がより増す。

ゲームの第二段階と第三段階において、コマが 2 個になったプレイヤーは負ける。また、コマに移動の余地なくなったプレイヤーも負ける。

ここからゲームの進行を詳細に説明する。ゲーム開始時は、コマは盤上に存在せず、それぞれのプレイヤーの手元にある。

第一段階では、それぞれのプレイヤーはコマが置かれていない盤上の点に、手元のコマを 1 つずつ交互に置いていく。

コマを置いていく過程で、ミルを成立させたプレイヤーは相手プレイヤーのコマを 1 つ盤上から取除く。このとき、取除いたコマは相手プレイヤーの手元にあるコマとは区別され、もう一度これが盤上に置かれることはない。

また、第一段階のみ同時に二つのミルが成立することがある。この場合も、ミルを成立させたプレイヤーは、相手プレイヤーのコマを 1 つだけ取除く。

両プレイヤーがそれぞれ持っているコマを置き終えたならばゲームは第二段階へと移る。

第二段階ではプレイヤーはコマを持っていない。プレイヤーは、盤上の自分のコマを現在の点から他のコマが置かれていない隣の点に移動させる。これを二人のプレイヤーが交互に行うことでゲームが進行する。

移動の結果ミルが成立した場合、成立させたプレイヤーは

表 2 N メンズモリスの性質

N	3	5	6	7	9	11	12
盤の点の数	9	16	16	17	24	24	24
同色のコマ数	3	5	6	7	9	11	12
対称操作の数	8	16	16	8	16	16	16
ゲーム盤	a	b	b	c	d	e	e
フライングルール					✓	✓	✓

相手プレイヤーのコマを 1 つ盤上から取除く。

いずれかのプレイヤーのコマが 3 個になったならばゲームは第三段階へと移る。

第三段階では少なくともどちらかのプレイヤーのコマ数が 3 個である。両プレイヤーのコマがともに 3 個ずつの場合もある。コマが 3 個だけのプレイヤーにはコマの移動についてフライングと呼ばれるルールが適用される。

フライングとは、コマの置かれていない任意の点にコマを移動させることができるというルールである。

ミルが成立したとき、成立させたプレイヤーは相手プレイヤーのコマを 1 つ盤上から取除く。

類似ゲームはゲーム盤、コマ数ならびにフライングルールの有無に相違がある (表 2 参照)。ただし、トゥエルブメンズモリスは第一段階で盤上の点が埋まり切ってしまった場合は引き分けになる。

2.2 ユニークな配置

ナインメンズモリスとそれに類似したゲームのルールはいくつかの操作についての対称性を有する。この操作すべてからなる集合を R とする。フライングルールが適用されていないときのナインメンズモリスでは $R = \{r_0, \dots, r_{15}\}$ である (表 3)。あるコマの配置にある操作 $r \in R$ を行うことで別の配置が現れうる。これら 2 つの配置は重複したものを見做したい。本研究では、配置すべてからなる集合 X に対する以下の条件を満たす部分集合 $A \subset X$ のうち大きさが最大のものを X に対するユニークな集合と呼ぶ。

- 任意の要素 $a \in A$ にかなる操作 $r \in R$ を行っても a はどの他の要素 $a' \in A$ と異なる。

あるユニークな集合があって、その要素はユニークな配置と呼ぶ。以降、ゲームのルールが同じであれば、ユニークな配置はすべて同一のユニークな集合に属することとする。

2.3 組合せ集合と場合分け二分木

ナインメンズモリスのコマの配置は組合せの一種とみなすことができる。この組合せを列挙する方法として場合分け二分木や ZDD がある。

組合せ集合とは、 n 個の要素から任意個を選ぶ組合せからなる集合である。これを表すデータ構造の一つに場合分け二分木がある。例えば、大きさ 4 の集合 $\{A, B, C, D\}$ があるとき、 $\{\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}\}$ や $\{\{\}, \{A\}, \{B\}, \{C\}\}$ などは組合せ集合の例である。

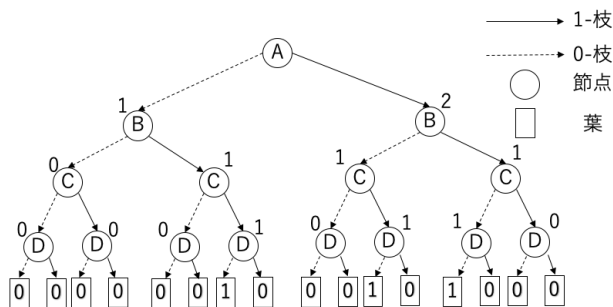


図2 場合分け二分木の例

場合分け二分木は根から葉に向かう有向辺（枝）を持ち、経路の分岐点である各節点には要素が割り当てられている。この節点から0と1のラベルが付与された2本の枝が分岐している。そして葉には0または1の値が記入されている。以降では0のラベルをもつ枝を0-枝、1のラベルをもつ枝を1-枝と呼ぶ。根から1つの葉への経路が1つあり、この経路1つで組合せ1つを表す。この表現方法において、ある経路上の1-枝（0-枝）はその親節点に割り当てられた要素がその経路により表現された組合せに属する（属さない）という意味を持ち、葉の値（0もしくは1）にはその葉に対応する組合せの集合への帰属（属さないもしくは属する）を示す。

場合分け二分木の根から値1の葉までの経路1つが、その木が表す集合の組合せ1つに対応する。このように場合分け二分木はすべての経路によって1つの組合せ集合を表す。先ほど挙げた組合せ集合の例（ $\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}$ ）を場合分け二分木で表すと図2のようになる。

この方法で大きさ n の集合の組合せ集合を表す場合、二分木の節点数は 2^{n-1} となる。ナインメンズモリスの場合、24個の点に対して黒のコマを置くときと、白のコマを置くときの2通りがある。場合分け二分木によってコマの配置を列挙すると、木の節点数は 2^{47} と膨大な数になる。

図2の場合分け二分木の根と葉以外の各節点には、その節点を通して値1の葉に到達する経路の数が記録されている。ある経路で選ばれなかった0-枝すべての子節点の値の総和を、その経路に対応した整数（ハッシュ）値とする。

また、ある整数 q に対応した経路は、以下の手順を根節点から順番に、葉に行き当たるまで繰返し適用することで得られる。以下、手順中では0-枝の子に記録された経路数を num_0 とする。 h はその整数値 q に初期化されている。この経路上で1-枝に進んだ節点の持つ要素を加えていくと、最終的には経路に対応する組合せが得られる。

- (1) $h > num_0$ ならば3へ、そうでなければ2へ
- (2) h に $h - num_0$ を代入し、1-枝の子に進み終了
- (3) 0-枝の子に進み終了

2.4 ZDD

ZDD（ゼロサプレス型二分決定グラフ）は場合分け二分

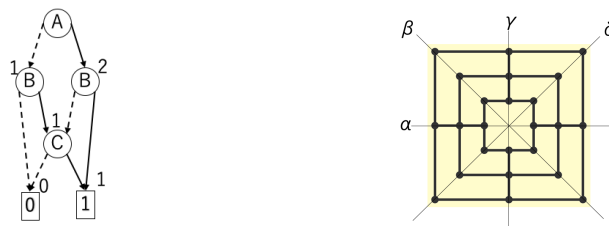


図3 二分木(図2)の既約なZDD 図4 ナインメンズモリスの4つの反転軸

表3 フライングルールがないときの操作と記号の対応

記号	操作	記号	操作
r_0	恒等操作	r_8	外枠と内枠の入れ替え
r_1	90° 右に回転	r_9	90° 右に回転, 外枠と内枠の入れ替え
r_2	180° 右に回転	r_{10}	180° 右に回転, 外枠と内枠の入れ替え
r_3	270° 右に回転	r_{11}	270° 右に回転, 外枠と内枠の入れ替え
r_4	α 軸について反転	r_{12}	α 軸について反転, 外枠と内枠の入れ替え
r_5	β 軸について反転	r_{13}	β 軸について反転, 外枠と内枠の入れ替え
r_6	γ 軸について反転	r_{14}	γ 軸について反転, 外枠と内枠の入れ替え
r_7	δ 軸について反転	r_{15}	δ 軸について反転, 外枠と内枠の入れ替え

木をより少ない節点数で効率よく表現したグラフである。ZDDは組合せ集合の非巡回有向グラフによる表現で、湊が1993年に考案・命名したデータ構造である[4]。これは場合分け二分木をある規則にしたがって圧縮することによって得られる。圧縮に関する規則は次のようである。まず、場合分けする要素が、二分木のすべての経路において同じ順序に並ぶようにする。そして次の二つの圧縮規則を可能な限り適用する。

冗長節点の削除 1-枝が0の値を持つ葉を指している場合に、この節点を取除き、0-枝の行き先に直結させる。

等価節点の共有 同じ部分木は1つにまとめて共有する。

これらの規則を適用して節点を削減していくと、最終的にこれ以上小さくならない既約な形が得られる。この既約形はどの規則をどの節点から順に適用しても、同じ組合せ集合ならば必ず同じ規約形になることが知られている。図2で示した場合分け二分木から得られる規約なZDDを図3に示す。図2と図3を見比べると大きく節点数が削減されているとわかる。

このZDDの根以外の各節点には、図2のようにその節点を通して値1の葉に到達する経路の数が記録されている。この情報は圧縮規則によって損失せず、場合分け二分木と同様に経路に対して整数値が1対1で対応づけることができる。

3. 研究目的

Gasserはユニークな配置すべてにハッシュ値を与え、それを用いた後退解析でナインメンズモリスのゲームの値が引分であることを示した。しかし、そのユニークな配置数を求める式はイレブンメンズモリスをはじめとする他の類似ゲームに適用するのに非常に煩雑である。

本研究では以下の特徴を持つ第二段階及び第三段階で到

達不可能な配置を排除してコマの配置を列挙する.

- 黒 (白) の残りのコマ数が 3 に満たない配置.
- 黒 (白) の残りのコマ数と, 白 (黒) のコマの配置から得られる最少のミル成立回数がゲームで使用する黒 (白) コマ数を超えている配置.

ミルの数とミルの成立回数が異なりえることに注意する. なぜなら, ミルが二つ以上同時に成立したときも, 成立させたプレイヤーが取除く相手のコマは 1 つだけだからである. また, これらの特徴を持たない配置を擬到達可能であるということにする. 到達可能であれば擬到達可能である. 擬到達可能な配置数は, 到達可能な配置数の上界を与える. Gasser は論文の中で到達不可能な配置の基準を明確に与えていないためこの特徴が Gasser らの基準と等しいかどうかは不明である.

本研究では, ナインメンズモリスだけではなくその類似ゲームにも適用可能なアルゴリズムを提案する. また, ユニークかつ擬到達可能な配置の最小完全ハッシュ関数とその逆関数を構築する.

4. 提案手法

本研究では, コマの配置の中から 2 つの場合分け二分木を圧縮した 2 つの ZDD を用いてユニークかつ擬到達可能な配置を取り出し, 各配置を整数値に 1 対 1 対応させる. ここで整数は 0 から欠落なく割り当てられる.

1 つ目の場合分け二分木は, コマ数が 3 個以上かつ白 (黒) のコマの最大数 (表 2 参照) 以下である配置に最小完全ハッシュを与える関数とその逆関数を実現するものである. この二分木が表す組合せ集合の組合せの要素は, “盤上の特定の点に特定の色のコマが 1 つある” というようなものである. 例えば, 根節点には, “左上スミの点に白コマが 1 つある” という要素を割り当てる. 深さが同じ節点には同じ要素が割り当てられる.

Algorithm 1 はこの二分木を圧縮した ZDD を構築する. このアルゴリズムでは, 節点 n は以下のものをメンバとして持つこととする. 以降, 本章でパー付き文字は参照を表す.

- $n.n_b$: n を訪問するまで置いた黒コマ数
- $n.n_w$: n を訪問するまで置いた白コマ数
- $n.f$: n に至るまでに対応する盤上の点にコマがあるかを表すフラグ
- $n.\bar{b}_0$: 0-枝の参照
- $n.\bar{b}_1$: 1-枝の参照

また, 節点 n と n' とが等しいとは, メンバ n_b, n_w, f すべてが等しいということとする. m は盤上の点の個数である (表 2 参照). CreateNode は新たな節点を生成する. また $n.\bar{b}_x$ は節点 n の x -枝の子を参照する. l_0, l_1 はそれぞれ値 0 の葉, 値 1 の葉である. IsNextLeaf0(n, d, x) は節点 n から x -枝を進んだとき, 値 0 の葉であるかどうかを判定す

る関数である. 即ち, 黒コマと白コマが重なっているとき, コマの数が足りないとき, コマの数が多すぎるときに真を返す.

Algorithm 1 1 つ目の ZDD を構築するアルゴリズム

```

1: def ConstructZDD1( $\bar{l}_0, \bar{l}_1$ )
2:  $T \leftarrow (w, b), N_d \leftarrow \emptyset$  for  $d = 1, \dots, m$ 
3:  $root \leftarrow CreateNode()$ ,  $root.n_T \leftarrow (0, 0)$ ,  $d \leftarrow 0, N_1 \leftarrow N_1 \cup \{root\}$ 
4: for  $k = 1$  to  $m$  do
5:   for  $c$  in  $T$  do
6:      $d \leftarrow d + 1$ 
7:     for  $n \in N_d$  do
8:       for  $x = 0$  to 1 do
9:         if IsNextLeaf0( $n, d, x$ ) then
10:           $n.\bar{b}_x \leftarrow \bar{l}_0$ 
11:         else if  $d = 2m - 1$  then
12:           $n.\bar{b}_x \leftarrow \bar{l}_1$ 
13:         else
14:           $n' \leftarrow CreateNode()$ 
15:           $n'.f \leftarrow 0$ 
16:          if  $c$  が  $T$  の最後の要素でないかつ ( $n.f = 1$  又は  $x = 1$ ) then
17:             $n'.f \leftarrow 1$ 
18:          end if
19:           $n'.n_T \leftarrow n.n_T$ 
20:          if  $x = 1$  then
21:             $n'.n_T[c] \leftarrow n.n_T[c] + 1$ 
22:          end if
23:          if there is  $n'' \in N_{d+1}$  such that  $n' = n''$  then
24:             $n.\bar{b}_x \leftarrow n''$  への参照
25:          else
26:             $N_{d+1} \leftarrow N_{d+1} \cup \{n'\}$ 
27:             $n.\bar{b}_x \leftarrow n'$  への参照
28:          end if
29:        end if
30:      end for
31:    end for
32:  end for
33: end for
34: return  $root$  への参照

```

2 つ目の場合分け二分木は, 1 つ目の ZDD で実現されたコマの配置の最小完全ハッシュ関数とその逆関数を使って, ユニークかつ擬到達可能な配置の最小完全ハッシュ関数とその逆関数を実現するものである. この節点に割り当てられる要素は, 1 つ目の ZDD が割り当てる整数値のビット列の位である. ある経路が 1-枝を通るとき, その経路が意味する整数値はその 1-枝の親節点に割り当てられた位のビットが 1 である. 場合分け二分木では, 根 (深さ 0 の節点) は一番左, 葉の親節点が一番右, 深さ d の節点は左から d 番目の位を表す.

ある配置がユニークかどうかは, その配置に R のすべての操作を加え, これら中から配置を表す整数^{*1}が最も小さ

*1 なんらかのコマの配置の完全ハッシュ関数の値. 例えば, 1 つ目の ZDD が割り当てる整数値.

いものであるかどうかで判断する。また、ある配置が擬到達不可能かどうかは、3章で示した特徴を持つかどうかで判断する。

Algorithm 2はこの二分木を圧縮したZDDを構築する。このアルゴリズム中では節点 n は以下のものをメンバとして持つこととする(図5参照)。

- $n.\bar{b}_0$: 0-枝の参照
- $n.\bar{b}_1$: 1-枝の参照
- $n.p$: 節点に割り当てられたビット列の位

また、2つの節点 n と n' が等しいとはメンバ $n.\bar{b}_0$, $n.\bar{b}_1$ が等しいということとする。このアルゴリズムでは、ZDDを葉の値を元に下から構築していく。 S はすでに生成した節点の集合であり、空集合に初期化されている。 $\bar{b}_0, \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_h$ はそれぞれ十分な大きさの配列である。 \bar{b}_0 のインデックスは1つ目のZDDで配置に割り当てられた整数値に相当する。そして、各インデックス i に対応する配置がユニークかつ擬到達可能であるとき、 $\bar{b}_0[i]$ は l_1 を参照する。さらに、大きさが2の整数乗になるように余った部分を l_0 の参照で埋める。

Algorithm 2 ConstructZDD2

```

1: def ConstructZDD2( $\bar{S}, \bar{b}_0, p, \bar{l}_0$ ) ▷  $\bar{S}$ は節点の集合の参照,  $\bar{b}_0$ 
   は構成するZDDの元となる節点の参照を格納する配列,  $p$ は位
2:  $h \leftarrow \log_2|\bar{b}_0|$ 
3:  $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_h \leftarrow$  参照を格納する空の配列
4: for  $j = 1$  to  $h$  do
5:   for  $k = 0$  to  $2^{h-j} - 1$  do
6:      $n \leftarrow \text{CreateNode}()$ 
7:      $n.\bar{b}_0 \leftarrow \bar{b}_{j-1}[2k]$  ▷ 0-枝
8:      $n.\bar{b}_1 \leftarrow \bar{b}_{j-1}[2k+1]$  ▷ 1-枝
9:      $n.p \leftarrow p + j$  ▷ 位
10:    if  $n.\bar{b}_1$ が $l_0$ への参照 then
11:      ▷ 冗長節点の削除
12:       $\bar{b}_j[k] \leftarrow \bar{b}_{j-1}[2k]$ 
13:    else if There is  $n' \in S$  such that  $n' = n$  then
14:      ▷ 等価節点の共有
15:       $\bar{b}_j[k] \leftarrow n'$ への参照
16:    else
17:       $\bar{b}_j[k] \leftarrow n$ への参照
18:       $S \leftarrow S \cup \{n\}$ 
19:    end if
20:  end for
21: end for
22: return  $\bar{b}_h[0]$ 

```

Algorithm 2は、一度にすべての葉の値を用意するために、大きな記憶領域を必要とする。例えば、トゥエルブメンズモリスにおいては1つ目のZDDが割り当てた最大の整数値は264369400848である。これらすべてについて1ビットで葉の値を記録したとすると、その大きさはおよそ33 Gbyteとなる。ある程度の大きさの部分に分けて逐次、圧縮規則を適用しながら構築すると、このようなことを回避できる。図6は部分的にZDDを構築していく様子を模

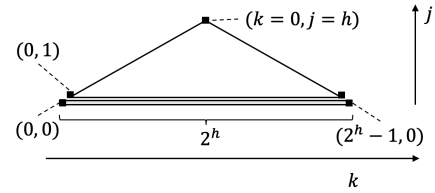


図5 Algorithm 2がZDDにする場合分け二分木。下の長方形は葉の参照列

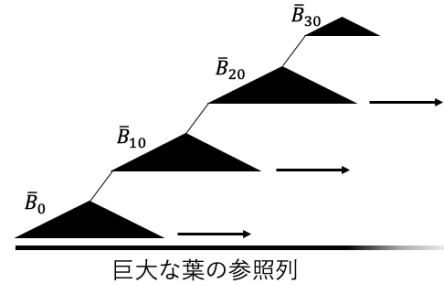


図6 Algorithm 3の模式図

式的に示す。Algorithm 3はそのような改善がなされている。 \bar{B}_i ($i = 0, 10, 20, 30$)は各部分の葉に当たる節点の参照を保持する配列である。

Algorithm 3 2つ目のZDDを4段階で構築するアルゴリズム

```

1: def ConstructZDD3( $\bar{l}_0, \bar{l}_1$ )
2:  $S \leftarrow \emptyset, \bar{B}_0[1024], \bar{B}_{10}[1024], \bar{B}_{20}[1024], \bar{B}_{30}[2^{I-30}]$ 
3: for  $i_{30} = 0$  to  $2^{I-30} - 1$  do
4:   for  $i_{20} = 0$  to 1023 do
5:     for  $i_{10} = 0$  to 1023 do
6:       for  $i_0 = 0$  to 1023 do
7:          $p = \text{ToPosition}(i_0 + i_{10} \times 2^{10} + i_{20} \times 2^{20} + i_{30} \times 2^{30})$ 
8:         if  $p$ がユニークかつ擬到達可能 then
9:            $\bar{B}_0[i_0] \leftarrow \bar{l}_1$ 
10:        else
11:           $\bar{B}_0[i_0] \leftarrow \bar{l}_0$ 
12:        end if
13:      end for
14:       $\bar{B}_{10}[i_{10}] \leftarrow \text{ConstructZDD2}(\bar{S}, \bar{B}_0, 0, \bar{l}_0)$ 
15:    end for
16:     $\bar{B}_{20}[i_{20}] \leftarrow \text{ConstructZDD2}(\bar{S}, \bar{B}_{10}, 10, \bar{l}_0)$ 
17:  end for
18:   $\bar{B}_{30}[i_{30}] \leftarrow \text{ConstructZDD2}(\bar{S}, \bar{B}_{20}, 20, \bar{l}_0)$ 
19: end for
20: return ConstructZDD2( $\bar{S}, \bar{B}_{30}, 30, \bar{l}_0$ )

```

4.1 ナインメンズモリスと類似したゲームの配置数の上界

先に示したアルゴリズムを用いてZDDを構築した際に、得られたナインメンズモリスと類似ゲームのユニークで擬到達可能な配置数を表4から10に示す。左の数字の対 $x-y$ は白コマ x 個・黒コマ y 個、または、黒コマ x 個・白コマ

表 4 スリーメンズモリスの結果

部分集合	配置数
3-3	183

表 5 ファイブメンズモリスの各部分集合の結果

部分集合	配置数	部分集合	配置数
3-3	10 112	5-4	170 484
4-3	50 380	5-5	93 851
4-4	56 748		
5-3	89 218	計	470 793

表 6 シックスメンズモリスの各部分集合の結果

部分集合	配置数	部分集合	配置数
3-3	10 112	6-3	118 884
4-3	50 380	6-4	199 328
4-4	56 748	6-5	216 774
5-3	89 218	6-6	57 534
5-4	180 840		
5-5	126 516	計	1 107 656

y 個の意である。

スリーメンズモリスの結果は、付録 A で計算で求めた配置数に一致した。このことから、本研究で作成された実装は、少なくともスリーメンズモリスにおいて意図に沿った動作をしていることがわかる。

表 8 はナインメンズモリスで得られた結果である。配置数の右に括弧付きで記されている数値は Gasser の報告との差である。9-3, 9-4, 9-5, 9-6, 8-7, 8-6 では既存の上界より小さい値が得られた。これに対して 9-7 において、既存の上界より大きい値が得られた。これには以下の 2 つの原因が考えられる。

- 考慮している、到達不可能な配置が異なる。
- いずれかのプログラムの誤り

表 11 に各ゲームの ZDD の節点数を示す。この表から 1 つ目の ZDD に比べ 2 つ目の ZDD が大きくなることわかる。トゥエルブメンズモリスの 1 つ目の ZDD においては、節点数を場合分け二分木の節点数の約 2.4×10^{-11} 倍まで削減された。

図 7 はトゥエルブメンズモリスの 1 つ目の ZDD と 2 つ目の ZDD の経路長の分布を示す。ハッシュ関数とその逆関数の実行時間は経路長に依存する。この図から 1 つ目の ZDD の経路長がおおよそ 41 であることと、2 つ目の ZDD の経路長がおおよそ 38 であることがわかる。1 つ目の ZDD を二分木で表現した場合、盤上の各点について白・黒コマそれぞれの有無を判定するため経路長は 48 になる。ZDD では、冗長節点の削除によりその経路長がだいたい 41 と短くなっている。2 つ目の ZDD も二分木であればその経路長は 38 であるが、部分的に短くなっていることが確認できる。

5. まとめ

ナインメンズモリスとその類似ゲームの二段階及び三段

表 7 セブンメンズモリスの各部分集合の結果

部分集合	配置数	部分集合	配置数
3-3	30 494	6-5	1 434 088
4-3	171 652	6-6	710 427
4-4	213 938	7-3	573 968
5-3	342 440	7-4	942 112
5-4	769 116	7-5	992 180
5-5	614 712	7-6	643 338
6-3	513 180	7-7	65 910
6-4	1 024 920	計	9 042 475

表 8 ナインメンズモリスの各部分集合の結果

部分集合	配置数	部分集合	配置数
3-3	56 922 (0)	8-3	51 527 672 (0)
4-3	1 520 796 (0)	8-4	167 411 596 (0)
4-4	3 225 597 (0)	8-5	401 705 976 (0)
5-3	5 160 780 (0)	8-6	73 588 174 (15 984)
5-4	20 620 992 (0)	8-7	1 046 697 920 (22 560)
5-5	30 914 424 (0)	8-8	568 867 453 (0)
6-3	13 750 640 (0)	9-3	73 827 320 (250)
6-4	51 531 584 (0)	9-4	216 131 860 (696)
6-5	144 232 144 (0)	9-5	452 410 480 (1 358)
6-6	156 229 360 (0)	9-6	692 192 560 (1 934)
7-3	29 451 376 (0)	9-7	778 332 176 (-38 728)
7-4	103 033 056 (0)	9-8	608 860 826 (0)
7-5	267 821 792 (0)	9-9	95 978 501 (0)
7-6	535 586 576 (0)		
7-7	420 793 096 (0)	計	7 673 755 215 (4054)

表 9 イレブンメンズモリスの各部分集合の結果

部分集合	配置数	部分集合	配置数	部分集合	配置数
3-3	56 922	8-4	167 411 596	10-7	835 357 854
4-3	1 520 796	8-5	401 705 976	10-8	715 186 030
4-4	3 225 597	8-6	736 411 032	10-9	449 707 142
5-3	5 160 780	8-7	1 051 958 800	10-10	84 047 949
5-4	20 620 992	8-8	591 726 690	11-3	88 410 336
5-5	30 914 424	9-3	74 418 456	11-4	214 364 276
6-3	13 750 640	9-4	223 195 224	11-5	362 445 080
6-4	51 531 584	9-5	490 958 496	11-6	433 913 174
6-5	144 232 144	9-6	818 213 480	11-7	366 729 976
6-6	156 229 360	9-7	1 051 958 800	11-8	214 859 478
7-3	29 451 376	9-8	1 051 958 800	11-9	83 446 434
7-4	103 033 056	9-9	408 820 437	11-10	16 190 252
7-5	267 821 792	10-3	88 410 336	11-11	734 894
7-6	535 586 576	10-4	245 515 200		
7-7	420 793 096	10-5	490 958 496		
8-3	51 527 672	10-6	735 627 734	計	14 330 618 660

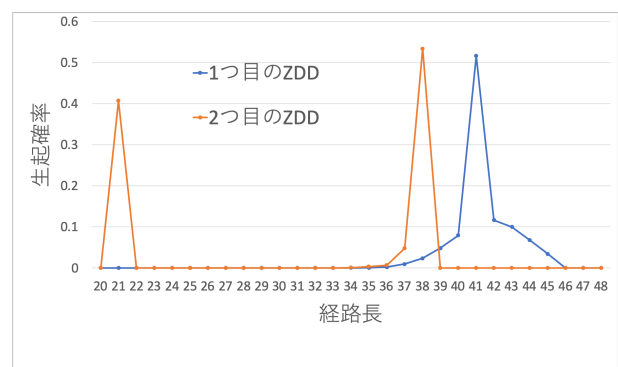


図 7 2 つの ZDD の経路長の分布 (トゥエルブメンズモリス) ユニークで擬到達可能な配置が等確率で生起するとした。

表 10 トウエルブメンズモリスの各部分集合の結果

部分集合	配置数	部分集合	配置数	部分集合	配置数
3-3	56 922	8-7	1 051 958 800	11-5	401 705 976
4-3	1 520 796	8-8	591 726 690	11-6	535 586 576
4-4	3 225 597	9-3	74 418 456	11-7	535 586 576
5-3	5 160 780	9-4	223 195 224	11-8	401 705 976
5-4	20 620 992	9-5	490 958 496	11-9	223 195 224
5-5	30 914 424	9-6	818 213 480	11-10	89 297 208
6-3	13 750 640	9-7	1 051 958 800	11-11	12 184 284
6-4	51 531 584	9-8	1 051 958 800	12-3	74 418 456
6-5	144 232 142	9-9	409 106 740	12-4	167 411 596
6-6	156 229 360	10-3	89 297 208	12-5	267 821 792
7-3	294 513 376	10-4	245 515 200	12-6	312 458 720
7-4	103 033 056	10-5	490 958 496	12-7	267 821 792
7-5	267 821 792	10-6	736 411 032	12-8	167 411 596
7-6	535 586 576	10-7	841 586 192	12-9	74 418 456
7-7	420 793 096	10-8	736 411 032	12-10	22 340 528
8-3	51 527 672	10-9	490 958 496	12-11	4 066 664
8-4	167 411 596	10-10	122 757 600	12-12	170 854
8-5	401 705 976	11-3	89 297 208		
8-6	736 411 032	11-4	223 195 224	計	16 528 470 859

表 11 ZDD の節点数

N	1 つ目	2 つ目
3	41	119
5	447	46 605
6	612	90 320
7	869	238 334
9	2 315	99 007 445
11	3 057	132 020 141
12	3 385	68 811 597

階においてユニークかつ擬到達可能な配置数を求め、またユニークかつ擬到達可能な配置に対する最小完全ハッシュ関数とその逆関数を ZDD を利用して構築した。この 2 つの関数はゲームの第二段階、第三段階に対して後退解析を行うにあたりトウエルブメンズモリスにおいても、そのテーブルサイズを 4 Gbyte 程度に抑えることを可能にするだろう。また、Gasser らの上界 (7 673 759 269) を 7 673 755 215 に改善できたのではないかと考える。

謝辞

諸事を教えてくださった研究室の方々に心より感謝申し上げます。

参考文献

- [1] A. Bhatt, P. Varshney, K. Deb (2008). In Search of No-loss strategies for the game of Tic-Tac-Toe using a customized genetic algorithm. Proceedings of the 10th annual conference on genetic and evolutionary computation, pp. 889-896.
- [2] 篠田正人 (2008). 将棋における実現可能局面数について. ゲームプログラミングワークショップ 2008 論文集, 11 号, pp. 116-119.
- [3] R. C. Bell (1979). Board and table games from many civilizations. LSC Communications.
- [4] ERATO 湊離散構造処理系プロジェクト, "超高速グラフ列挙アルゴリズム〈フカシギの数え方〉が拓く, 組合せ問題への新アプローチ", 森北出版, 2015.
- [5] R. Gasser (1996). Solving nine men's morris. Computational Intelligence, Vol. 12(1), pp. 24-41.

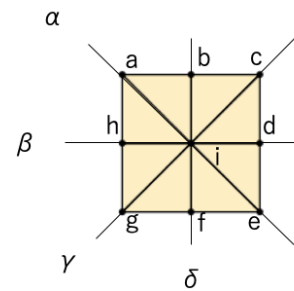


図 A.1 ゲーム盤

表 A.1 スリーメンズモリスの操作と、その操作で不変な配置数

記号	操作	不変な配置数
t_0	恒等操作	1680
t_1	90° 右に回転	0
t_2	180° 右に回転	0
t_3	270° 右に回転	0
t_4	軸 α について反転	36
t_5	軸 β について反転	36
t_6	軸 γ について反転	36
t_7	軸 δ について反転	36

- [6] D. Park (2015). Space-state complexity of Korean chess and Chinese chess. <https://arxiv.org/abs/1507.06401v1>, (accessed 2020-01-24).
- [7] J. Schaeffer, N. Burch, Y. Björnsson, A. Kishimoto, M. Müller, R. Lake, P. Lu, S. Sutphen. (2007). Checkers is solved. science, Vol. 317(5844), pp. 1518-1522.
- [8] L. V. Allis (1994). Searching for solutions in games and artificial intelligence, pp. 21-152. Wageningen: Ponsen & Looijen.
- [9] J. Tromp (2016). The number of legal go positions. International Conference on Computers and Games, pp. 183-190. Springer, Cham.

付 録

A.1 スリーメンズモリスにおけるユニークかつ擬到達可能な配置数

Gasser の計算方法に基づいてスリーメンズモリスのユニークかつ擬到達可能な配置数を求める。

まず、コマの配置すべての数を考える。白黒のコマがそれぞれ 3 個ずつあること、盤上の点 9 つあることの 2 つから、配置数は ${}_9C_3 \cdot {}_6C_3 = 1680$ である。これが図 A.2 の灰色部分の面積に相当する。

ここで、コマの配置が持ちうる対称性を考える。スリーメンズモリスで用いられる盤上は 4 回回転の対称性を持つ。また反転に対しても対称である。従って、すべてで 8 通りの操作について考える。

つぎに、図 A.2 の白色部分の面積に相当する数を求める。この面積は、操作それぞれに対して変化しない配置の数をすべて足せば求まる。ここからは操作それぞれについて考える。

t_1, t_3 の操作で変化しない配置は、少なくとも盤上の四隅や四辺の点 4 つに同じ色のコマが置かれている必要があ

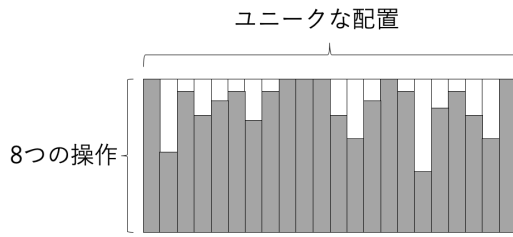


図 A.2 模式図

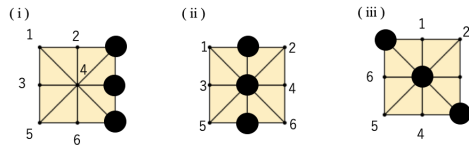


図 A.3 ミルの成立の仕方

る。しかし、スリーメンズモリスでは同じ色のコマは3つだけであるから、条件を満たすような配置はスリーメンズモリスではあり得ない。よって、 t_1, t_3 の操作を加えても変化しない配置の数はそれぞれ0個である。

t_2 の操作を加えても変化しない配置は、盤上の外側の正方形にの中心の点について点対称な点に同じ色のコマが置かれているか2点が空である必要がある。このような制約を受けないのは中心の点1つだけである。ここでスリーメンズモリスで使用する同色のコマは3つであるから、白黒どちらも上の条件を満たした配置はスリーメンズモリスではあり得ない。よって、 t_2 の操作を加えても変化しない配置の数も0個である。

t_4 の操作を加えても変化しない配置は b と h, c と g, d と f が同じ色のものである。また a, i, e には制約がない。これらのことと、同色のコマが3つであることから求めるべき白黒6つの配置数は次の式で得られる。

$${}_3C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_2C_1 = 36$$

よって t_4 の操作を加えても変化しない配置の数は36個である。

t_5, t_6, t_7 についても同様の考察ができる。よってそれぞれ、操作を加えても変化しない配置の数は36個である。

このことからユニークな配置の数が $\frac{1}{8}(1680 + 36 \times 4) = 228$ 個だとわかる。

最後に、ミルが成立しているユニークな配置を数える。上で求めた配置の数には、すでにミルが成立しゲームが終了している配置が含まれている。これを取除きたい。黒のミルは以下の3種類がある。

- (i) 外側の正方形の一辺のミル
- (ii) 外側の正方形の一辺に垂直で中心を通るミル
- (iii) 斜めのミル

それぞれについてユニークな配置の数を数えたい。

図 A.3 の (i) の場合を考える。1 から 6 の番号の振られた点への白コマの置き方は20通りあって以下のように3つの数字の列で表すことができる。

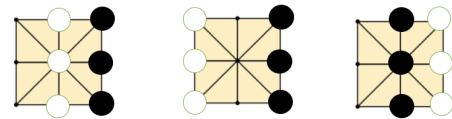


図 A.4 双方にミルのある配置

$\overline{123} \overline{124} \overline{125} \overline{126} \overline{134} \overline{135} \overline{136}$
 $\overline{145} \overline{146} \overline{156} \overline{234} \overline{235} \overline{236} \overline{245} \overline{246} \overline{256} \overline{345} \overline{346} \overline{356} \overline{456}$
 これらを同等な配置のグループに分けると次のようになる。
 $\overline{123} \overline{356}, \overline{124} \overline{456}, \overline{125} \overline{156}, \overline{126} \overline{256}, \overline{134} \overline{345}, \overline{135}, \overline{136} \overline{235},$
 $\overline{145}, \overline{146} \overline{245}, \overline{234} \overline{346}, \overline{236}, \overline{246}$

つまりユニークな配置の数は12個であるとわかる。

図 A.3 の (ii) の場合も同様に、同等なグループに分けた白コマの配置は次のようになる。

$\overline{123} \overline{356} \overline{124} \overline{456}, \overline{125} \overline{156} \overline{256} \overline{126}, \overline{134} \overline{345} \overline{346} \overline{234}, \overline{135} \overline{246},$
 $\overline{136} \overline{235} \overline{146} \overline{245}, \overline{145} \overline{236}$

つまりユニークな配置の数は6個であるとわかる。

図 A.3 の (iii) の場合も同様に、同等なグループに分けた白コマの配置は次のようになる。

$\overline{123} \overline{456}, \overline{124} \overline{356} \overline{145} \overline{236}, \overline{125} \overline{256} \overline{245} \overline{235}, \overline{126} \overline{156} \overline{345} \overline{234},$
 $\overline{134} \overline{346} \overline{146} \overline{136}, \overline{135} \overline{246}$

つまり (iii) に当たるユニークな配置の数は6個であるとわかる。

これらが黒白のそれぞれについてあることと、図 A.4 に示した白黒の双方にミルの成立が見られる3つの配置は2度数えていることに注意すると、ミルの成立しているような配置の数は $(12 + 6 + 6) - 3 = 45$ 個であるとわかる。これを先に求めたユニークな配置数228から引くと、スリーメンズモリスのユニークかつ擬到達可能な配置数は183であるとわかる。