Vol.2020-HPC-173 No.1
2020/3/16

実数シフトのレゾルベントを少数用いて構成された実対称定値一般固有値問題の下端固有対を解くためのフィルタ

村上 弘[1,a)]

概要：実対称定値一般固有値問題で固有値分布の下端付近に固有値がある固有対の近似をフィルタを用いて求める．フィルタには少数のレゾルベントの線形結合の Chebyshev 多項式を用いることにする．我々は既に，伝達特性の良いフィルタを系統的に構成できる方法をシフトが複素数であるレゾルベントを用いる場合には示したが，そのような系統的な方法はシフトを実数に制限する場合にはまだ得られていない．そこで本報告では，シフトが実数であるレゾルベントを少数用いて伝達特性の良いフィルタを構成する方法についての考察を行う．

キーワード：フィルタ対角化法，固有値問題，レゾルベント，多項式，実数シフト，伝達関数

1. はじめに

行列 A と B が実対称で B は正定値の一般固有値問題 $A\mathbf{v} = \lambda B\mathbf{v}$ の固有対 $(\lambda, \mathbf{v})$ で固有値 λ が指定された区間 $[a, b]$ にあるものの近似を求めるものとする．そのためのフィルタとしてこの報告で扱うものは，少数 k 個のレゾルベントの線形結合の作用の（実部の）Chebyshev 多項式の作用 $\mathcal{F} = g_{\mathrm{s}}T_n(\mathcal{Y})$ である．ただし $\mathcal{Y}$ はレゾルベント $\mathcal{R}(\rho_i)$，$i = 1, 2, \ldots, k$ の線形結合の作用（の実部）である．我々は既に，レゾルベントのシフト ρ_i を複素数の範囲で扱うのであればフィルタの伝達関数 $f(\lambda)$ の形状を良いものにすることが可能であり，レゾルベントの数 k がいくつにしても各レゾルベントのシフト ρ_i と線形結合の係数は数式に数値を入れて計算して求められることを示した．特にシフトがすべて虚数である場合には区間 $[a, b]$ の位置は任意にできる．

しかし応用上は，固有値が固有値分布の端付近の固有対だけを求めたいことがよくある．そのような場合にレゾルベントのシフト ρ_i として実数だけを用いることができれば，フィルタを作用させる計算で必要な記憶量や演算量を減らせる可能性がある．単一のレゾルベントを用いたフィルタは構成が極めて容易でこれまでにも扱ってきた（文献 [9], [10], [11], [12], [21]）．しかし単一のレゾルベントを用いたフィルタは伝達関数の形状を良くすることができなくて，たとえば伝達関数の通過域での値の変動比を抑えながら遷移域の幅を狭くすることは困難である（特にシフトを実数にする場合は伝達関数の形状は虚数の場合のものよりも悪い）．

単一のレゾルベントで構成されたフィルタは，伝達関数の形状をあまり良くできないのであるが，そのようなフィルタであっても直交化処理と組み合わせて数回反復することにより近似対を改良できて良い精度のものが得られることを既に示した（文献 [20], [22], [23], [25]）．ここまでを読むと，単一のレゾルベントで構成されたフィルタを用いることで問題を満足に解けるのであれば，複数のレゾルベントで構成されたフィルタを用いる必要はないであろうと思われるかもしれない．しかし小規模な並列処理システム上で計算を行う場合に，少数のレゾルベントに対応する連立 1 次方程式の係数行列の分解処理と分解結果の保持が主記憶に収まり，行列分解や分解後の前進後退代入に必要な処理も並列に計算できる場合には，少数のレゾルベントの線形結合の作用の Chebyshev 多項式をフィルタとして採用すれば，必要な多項式の次数を下げて経過時間が減らせる可能性，伝達関数の遷移域が狭くできるとフィルタを適用するベクトルの数を減らせる可能性，フィルタを 1 回適用した段階で既に得られる固有対の近似精度が十分なものになる可能性がある．これらの事情については（シフトが複素数の場合ではあるが）フィルタとして少数のレゾルベントの線形結合の実部の Chebyshev 多項式を用いた場合（文献 [24], [26], [27]）と同様である

そこで今回は，下端の固有対を求めるためのフィルタであって伝達関数の形状が良いものを，実数をシフトとする

1 首都大学東京・数理情報科学専攻
a) mrkmhrsh@tmu.ac.jp

ⓒ 2020 Information Processing Society of Japan

レゾルベントの少数の線形結合の Chebyshev 多項式でうまく構成する方法の導出を試みる．ただし，本報告の内容はほぼ以前の報告 [13] のうちでシフトが実数の場合の繰り返しである．我々は以前の報告 [13] において，フィルタを 2 つのレゾルベントの線形結合の（実部の）Chebyshev 多項式として構成するとき，2 つのレゾルベントのシフトを実数にする場合と虚数にする場合のそれぞれについて考察を行った．その報告 [13] の後に行った，我々の一連の研究（文献 [14], [15], [16], [17], [18], [19], [24], [26], [27]）により，アナログ電気回路フィルタの設計理論に類似した手法であるが，伝達関数を最良近似理論と関係する有理関数の合成による方法で決めることにより，「複素数をシフトに用いる場合には」レゾルベントの数がいくつであっても値を数式に入れて計算すればフィルタが設計できる方法を示した．そうして具体的に少数 3~ 4 個のレゾルベントの作用を用いて特性の優れたフィルタが構成できることを示した．しかしシフトを実数に制限する場合にはその方法は適用できず，なにか別の方法が必要である．

1.1 フィルタを用いた固有値問題の解法の概要

N 次実対称行列 A と B（B は正定値）の一般固有値問題 $A\mathbf{v} = \lambda B\mathbf{v}$ のフィルタを用いた近似解法の概要は以下のようになる（文献 [1], [2]）．まずフィルタ $\mathcal{F}$ として固有値が区間 $[a, b]$ にある固有ベクトルは良く通過させるが固有値が区間 $[a, b]$ から離れた固有ベクトルは強く阻止する線形作用素を用意する．そうしてランダムな N 次ベクトルを m 個作成して，それらを B-正規直交化したものとして X を作る．これは m 個の N 次ベクトルを各列に並べた $N \times m$ 行列であり，$X^T BX = I$ である．次に X にフィルタを適用して $Y \leftarrow \mathcal{F}X$ を作る．これも $N \times m$ 行列である．それから（X と Y の情報のほかにフィルタの伝達関数の特性も考慮しながら）Y の列ベクトルの線形結合の組をうまく構成して「区間 $[a, b]$ の近傍の固有値すべてに対応する不変部分空間」を近似する部分空間の基底 Z を作る．そうして，基底 Z に Rayleigh-Ritz 法を適用して得られる Ritz 対を，元の一般固有値問題の近似対とする．

1.2 フィルタの概要

行列 A と B が実対称で B は正定値の一般固有値問題 $A\mathbf{v} = \lambda B\mathbf{v}$ の固有対で固有値が区間 $[a, b]$ にあるものを近似して求めるために用いるフィルタ $\mathcal{F}$ として，固有値が $[a, b]$ にある固有ベクトルは良く伝達するが，固有値が $[a, b]$ から離れた固有ベクトルは強く阻止する線形の作用素をうまく構成する．フィルタ $\mathcal{F}$ をレゾルベントの線形結合やレゾルベントの多項式として構成すると，$(\lambda, \mathbf{v})$ を任意の固有対として，$\mathcal{F}\mathbf{v} = f(\lambda)\mathbf{v}$ が成立する．ここで $f(\lambda)$ はフィルタ $\mathcal{F}$ の伝達関数と呼ばれ，λ の有理関数である．

求める固有対の固有値の区間 $[a, b]$ が固有値分布の下端の位置にある（区間の左端 a は最小固有値 λ_0 以下）の場合には，区間 $\lambda \in [a, b]$ を標準区間 $t \in [0, 1]$ に対応させる線形変換 $t = (\lambda - a)/(b - a)$ により固有値 λ に対する正規化座標 t を定義する（**図 1**）．座標 t を使って表した伝達関数を $g(t) \equiv f(\lambda)$ で定義する．伝達関数 $g(t)$ の概形を**図 2** に示す．

あるいは求める固有対の固有値の区間 $[a, b]$ が固有値分布の任意の位置にある場合には，区間 $\lambda \in [a, b]$ を標準区間 $t \in [-1, 1]$ に対応させる線形変換 $t = 2(\lambda - a)/(b - a) - 1$ により固有値 λ に対する正規化座標 t を定義する．

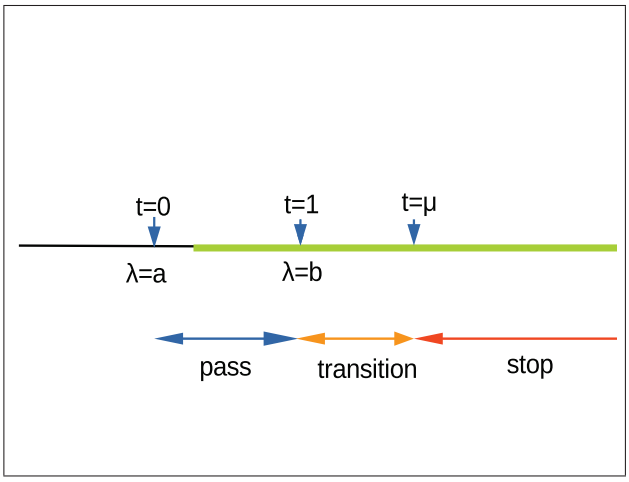

図 1 （下端固有対用）固有値 λ の区間 $[a, b]$ と正規化座標 t の関係
通過域 $t \in [0, 1]$；遷移域 $t \in (1, \mu)$；阻止域 $t \in [\mu, \infty)$

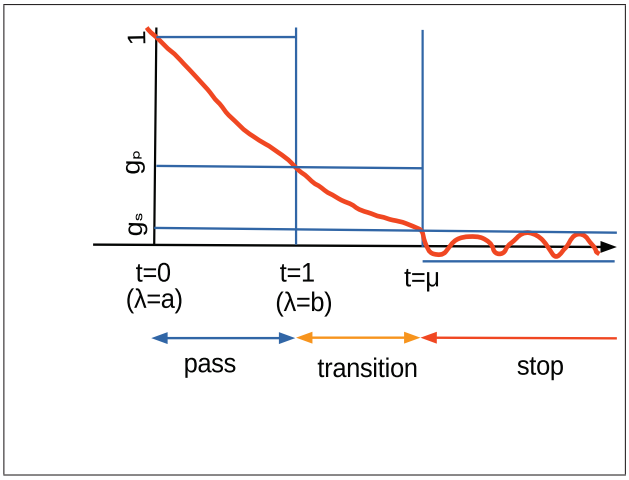

図 2 （下端固有対用）伝達関数 $g(t)$ の概形

1.3 単一のレゾルベントの多項式によるフィルタ

いまレゾルベントの作用に対応する連立 1 次方程式を直接法を用いて解くものと仮定すれば，多数のレゾルベントの線形結合をフィルタにする場合（文献 [1], [2], [3], [4], [5], [8]）に比べて単一のレゾルベントの多項式をフィルタにする場合（文献 [6], [7], [9], [10], [11]）は，多数ではなくて 1 つの行列だけを分解すれば済むことが利点である．連立 1 次方

程式を反復法で解く場合にも前処理に行列の不完全分解を行なうのであれば，やはり 1 つの行列だけの不完全分解で済むことになる）．レゾルベントの n 次多項式の作用をベクトルの組に対して適用するには，係数行列が共通で右辺だけが異なる連立 1 次方程式の組を解く処理を逐次に n 回行う必要があるが，その連立 1 次方程式の組は最初に 1 度行った行列分解の結果を用いることで素早く解ける．

フィルタを単一のレゾルベントの「多項式」で構成する場合には，最小 2 乗法に類似した方法で（通過域と阻止域の両方で折り合いをみながら）フィルタの特性がなるべく良くなるように「多項式」をうまく最適化して作る（文献 [6], [7], [9]）ことが望ましい．しかし，数値的な最適化の結果として得られた「多項式」はその係数の数値を並べた表としてだけ与えられる．そのような調整をしない「多項式」として Chebyshev 多項式を採用した「簡易な設計法」（文献 [10]）により得られるフィルタは，阻止域では良い減衰特性を容易に実現できるが，通過域では伝達率の最大最小比を抑える機能がない．もしも通過域における伝達率の最大最小比が大きければ，得られる近似対は精度の均一性が悪い可能性があり，極端な場合には必要な固有対の一部が落ちてしまう可能性もある．それで，単一のレゾルベントの多項式として，簡易設計型の Chebyshev 多項式から次数の異なる Chebyshev 多項式の線形結合に拡張して，通過域での伝達率の変動を抑えるように最小 2 乗法の定式化で線形結合の係数を決めることを試みた（文献 [11], [12]）．しかしそのような Chebyshev 多項式ではない多項式を用いる「簡易な設計法ではない方法」については，十分な調査はできていない．

1.4 少数のレゾルベントの多項式によるフィルタ

今回は，下端固有対を求めるためのフィルタを実数のシフトのレゾルベントで構成する際に，単一のレゾルベントの Chebyshev 多項式を少数のレゾルベントの Chebyshev 多項式に替えることにより，伝達関数の通過域における最大最小比を小さくすることを試みる．

2. 極が実数 2 つだけの伝達関数の簡易設計法

フィルタが異なる実数をシフトに持つ 2 つのレゾルベントの多項式であるときに，その伝達関数は異なる 2 つの実数だけを（多重の）極とする有理関数になるが，以下ではその関数形を強く制限した簡易な設計法を考察する．

これまで Chebyshev 多項式を用いる簡易設計法では，極が実数 1 つだけの伝達関数 $g(t)$ を式 (1) の形に制限してきた（極は実数 $-\sigma$ で n 位である）．

$$g(t) \equiv g_{\mathrm{s}}\, T_n(y),\ y \equiv 2x(t) - 1,\ x(t) \equiv \frac{\mu+\sigma}{t+\sigma}\,. \tag{1}$$

この制限された形の伝達関数は，（n を増やせば）容易に阻止域での伝達率を微小にできるが，伝達率の通過域での最大最小比を小さくすることは（遷移域の幅 $\mu - 1$ を大きくしなければ）できない．そこで簡易設計の手法を極が実数 1 つの場合から異なる実数 2 つの場合に拡張して，それにより増えた自由度を用いて通過域における伝達率の最大最小比を小さくすることを試みる．

そのために無限遠では値が零で，異なる負の実数 2 つだけを極とする式 (2) で表される新しい実有理関数 $x(t)$ を採用する（ただし $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ とする）．

$$x(t) \equiv \frac{\alpha_1}{t+\sigma_1} - \frac{\alpha_2}{t+\sigma_2}\,. \tag{2}$$

いま $\mu > 1$ であり，$1 < x_L < x_H$ であるとして，通過域 $t \in [0,1]$ は区間 $x \in [x_L, x_H]$ に，遷移域 $t \in (1,\mu)$ は区間 $x \in (1, x_L)$ に，阻止域 $t \in [\mu,\infty)$ は区間 $x \in (0,1]$ に，それぞれ対応するものとする．そうして従来と同様に Chebyshev 多項式を用いた簡易設計では，伝達関数は以下の式 (3) で表される $x(t)$ の多項式とする．

$$g(t) \equiv g_{\mathrm{s}}\, T_n(y),\ y \equiv 2x(t) - 1\,. \tag{3}$$

この伝達関数 $g(t)$ は，阻止域 $[\mu,\infty)$ では大きさが g_{s} 以下であり，通過域 $[0,1]$ における最小値は g_{p} であり，最大値は 1 に規格化されるものとする．すると $1 < 2x_L - 1 < 2x_H - 1$ になることと，Chebyshev 多項式は引数が 1 以上で狭義単調増加であることから，式 (4) がなりたつ．

$$g_{\mathrm{p}} = g_{\mathrm{s}}\, T_n(2x_L - 1)\,,\ \ 1 = g_{\mathrm{s}}\, T_n(2x_H - 1) \tag{4}$$

この式 (4) を実数 z の恒等式 $\cosh^{-1}(2z^2-1) = 2\cosh^{-1}|z|$ も用いて双曲線関数により表せば式 (5) が得られる．

$$\begin{cases} x_L = \cosh^2\left(\dfrac{1}{2n}\cosh^{-1}\dfrac{g_{\mathrm{p}}}{g_{\mathrm{s}}}\right), \\ x_H = \cosh^2\left(\dfrac{1}{2n}\cosh^{-1}\dfrac{1}{g_{\mathrm{s}}}\right). \end{cases} \tag{5}$$

すると 3 つのパラメタ n，g_{s}，g_{p} の組が与えられたときに，この (5) の各式の右辺を計算すれば，通過域 $[0,1]$ における $x(t)$ の最小値 x_L と最大値 x_H が求まる．

2.1 方式 1：通過域の左端で停留となる伝達関数

いま通過域における伝達率の最大最小比を小さくすることをねらい，通過域において伝達関数は左端 $t = 0$ で最大値をとるが，そこで値が停留する（微分値が零になる）という条件を課して構成してみる．

いま 4 つのパラメタ μ，g_{p}，g_{s}，n の組を指定するとき，その組の実現が可能であれば，以下に示す手順により $x(t)$ の式 (2) に含まれる 4 つの値 σ_1，σ_2，α_1，α_2 を決定できる．

まず $t = \mu$ と $t = 1$ における値の条件 $x(\mu) = 1$ と $x(1) = x_L$，さらに通過域の左端 $t = 0$ における値 $x(0) = x_H$ とそこで停留になるという条件 $(d/dt)x(t)|_{t=0} = 0$ を順番に数式で表わすと，以下の連立代数方程式 (6) になる．

$$
(6)\qquad \begin{cases} 1 &= \dfrac{\alpha_1}{\mu+\sigma_1} - \dfrac{\alpha_2}{\mu+\sigma_2}, \\ x_L &= \dfrac{\alpha_1}{1+\sigma_1} - \dfrac{\alpha_2}{1+\sigma_2}, \\ x_H &= \dfrac{\alpha_1}{\sigma_1} - \dfrac{\alpha_2}{\sigma_2}, \\ 0 &= -\dfrac{\alpha_1}{\sigma_1^2} + \dfrac{\alpha_2}{\sigma_1^2}. \end{cases}
$$

与えられた 3 つの値 x_L，x_H，μ を用いてこの連立方程式 (6) を解いて 4 つの未知数 σ_1，α_1，σ_2，α_2 を実数の範囲で求めるのであるが，その手順の詳細は長いので後の付録 A.1 に記述する．

2.1.1 「方式 1」の伝達関数の構成例

パラメタの 4 つ組 μ，$g_{\rm p}$，$g_{\rm s}$，n を指定して「方式 1」の伝達関数 $g(t)$ を決めた例を，以下に 6 通り示す．

例 1 の 1

パラメタ 4 つの組を $\mu = 2.0$，$g_{\rm p} = 10^{-2}$，$g_{\rm s} = 10^{-9}$，$n = 25$ と指定したときの，規格化座標 t による $x(t)$ の（符号が逆の）極とその係数は $\sigma_1 = 4.09068\,41137\,85874\,3$，$\alpha_1 = 9.68147\,36896\,33865\,2$，$\sigma_2 = 2.02528\,07667\,67526\,5$，$\alpha_2 = 2.37312\,19592\,31916\,4$ である．伝達関数の大きさ $|g(t)|$ を**図 3** に示す．

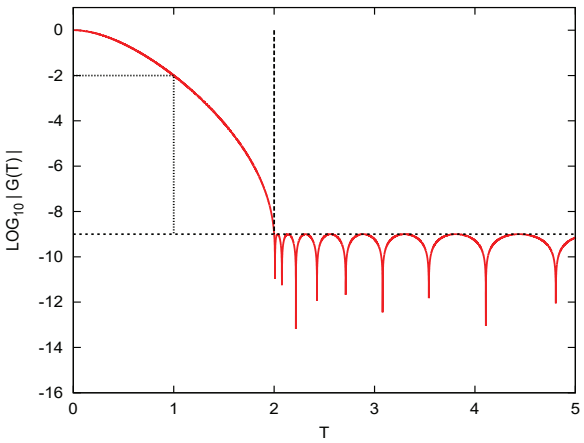

図 3 例 1 の 1：伝達関数の大きさ $|g(t)|$ （μ=2.0，$g_{\rm p}$=10^{-2}，$g_{\rm s}$=10^{-9}，n=25）

例 1 の 2

パラメタ 4 つの組を $\mu = 2.0$, $g_{\rm p} = 10^{-2}$, $g_{\rm s} = 10^{-10}$, $n = 35$ と指定したときの結果は $\sigma_1 = 5.19655\,07817\,65880\,1$，$\alpha_1 = 15.25918\,03018\,53442$，$\sigma_2 = 3.21576\,96254\,84946\,8$，$\alpha_2 = 5.84346\,85487\,05511\,1$ である．伝達関数の大きさ $|g(t)|$ を**図 4** に示す．

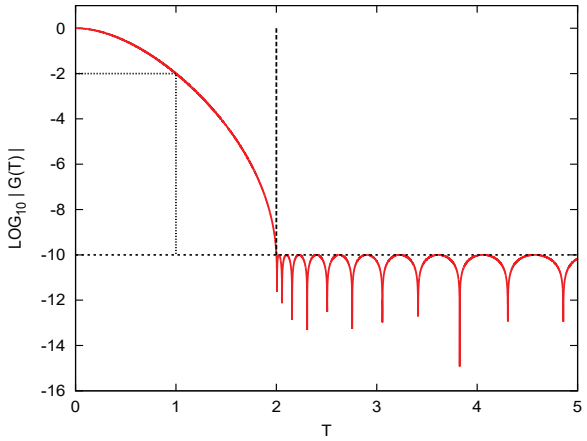

図 4 例 1 の 2：伝達関数の大きさ $|g(t)|$ （μ=2.0，$g_{\rm p}$=10^{-2}，$g_{\rm s}$=10^{-10}，n=35）

例 1 の 3

パラメタ 4 つの組を $\mu = 2.0$, $g_{\rm p} = 10^{-3}$, $g_{\rm s} = 10^{-12}$, $n = 25$ と指定したときの結果は $\sigma_1 = 2.22755\,26153\,98292\,1$，$\alpha_1 = 10.70208\,67035\,09278$，$\sigma_2 = 1.59850\,75775\,76566\,9$，$\alpha_2 = 5.51114\,60688\,82249\,4$ である．伝達関数の大きさ $|g(t)|$ を**図 5** に示す．

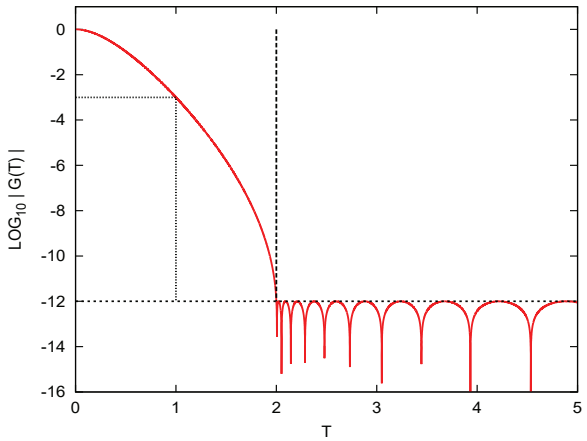

図 5 例 1 の 3：伝達関数の大きさ $|g(t)|$ （μ=2.0，$g_{\rm p}$=10^{-3}，$g_{\rm s}$=10^{-12}，n=25）

例 1 の 4

パラメタ 4 つの組を $\mu = 2.0$, $g_{\rm p} = 10^{-3}$, $g_{\rm s} = 10^{-13}$, $n = 35$ と指定したときの結果は $\sigma_1 = 5.04102\,27290\,71904\,5$，$\alpha_1 = 8.29677\,56289\,08244\,9$，$\sigma_2 = 1.35345\,74409\,76145\,8$，$\alpha_2 = 0.59808\,27030\,42009\,13$ である．伝達関数の大きさ $|g(t)|$ を**図 6** に示す．

ⓒ 2020 Information Processing Society of Japan

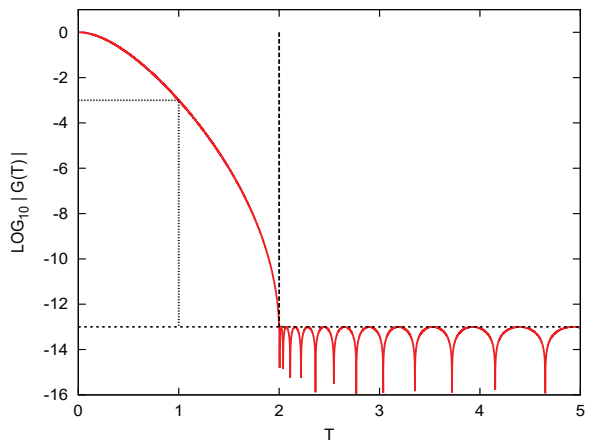

図 6 例 1 の 4：伝達関数の大きさ $|g(t)|$ （μ=2.0，$g_{\rm p}$=10^{-3}，$g_{\rm s}$=10^{-13}，n=35）

例 1 の 5

パラメタ 4 つの組を $\mu = 2.0$, $g_{\rm p} = 10^{-3}$, $g_{\rm s} = 10^{-14}$, $n = 40$ と指定したときの結果は $\sigma_1 = 3.99137\,37417\,64457\,4$, $\alpha_1 = 11.75250\,98719\,04793$, $\sigma_2 = 2.39289\,28457\,85840\,1$, $\alpha_2 = 4.22408\,19519\,02834\,7$ である．伝達関数の大きさ $|g(t)|$ を**図 7** に示す．

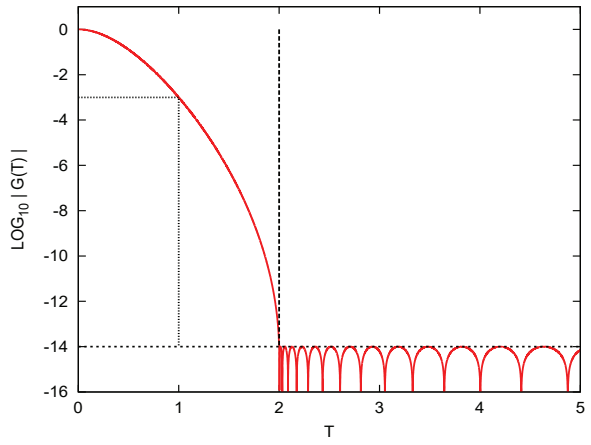

図 7 例 1 の 5：伝達関数の大きさ $|g(t)|$ （μ=2.0，$g_{\rm p}$=10^{-3}，$g_{\rm s}$=10^{-14}，n=40）

例 1 の 6

パラメタ 4 つの組を $\mu = 1.5$, $g_{\rm p} = 10^{-4}$, $g_{\rm s} = 10^{-11}$, $n = 30$ と指定したときの結果は $\sigma_1 = 2.69117\,50089\,59528\,5$, $\alpha_1 = 8.93745\,60356\,07161\,7$, $\sigma_2 = 1.71861\,35211\,28157\,5$, $\alpha_2 = 3.64490\,72765\,47854\,6$ である．伝達関数の大きさ $|g(t)|$ を**図 8** に示す．

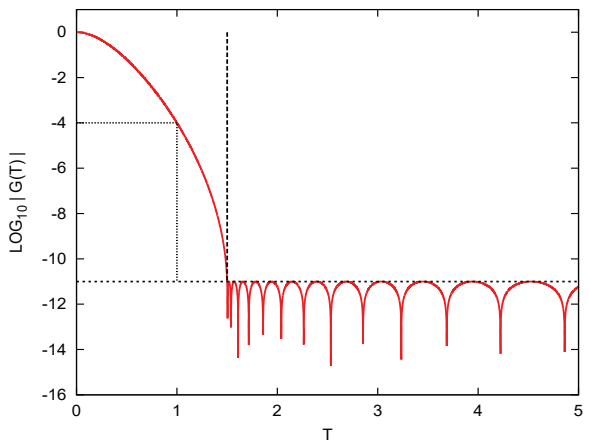

図 8 例 1 の 6：伝達関数の大きさ $|g(t)|$ （μ=1.5，$g_{\rm p}$=10^{-4}，$g_{\rm s}$=10^{-11}，n=30）

2.2 方式 2：通過域の両端で値の等しい伝達関数

「方式 2」では通過域に於ける伝達関数の最大最小比を小さくすることを容易にする手段として，伝達関数の値が通過域の両端で等しいという条件 $g(0) = g(1) = g_{\rm p}$ を課すことにする．そうして伝達関数は通過域内部のある 1 点 $t = T$（$0 < T < 1$）で最大値 1 をとるとする．

簡易設計による伝達関数の関数形は「方式 1」の場合と同一の以下の式 (7) とする（ただし $\sigma_1 > \sigma_2 > 0$ である）．

(7)
$$g(t) \equiv g_{\rm s}\,T_n(y),\ y \equiv 2x(t) - 1,\ x(t) \equiv \frac{\alpha_1}{t+\sigma_1} - \frac{\alpha_2}{t+\sigma_2}\,.$$

そうして次数 n と形状パラメタ $g_{\rm s}$，$g_{\rm p}$，μ の全部で 4 つの値を指定して（実現が可能であれば）伝達関数を決める．

まず前節 2.1 と同様に，通過域に於ける $x(t)$ の最小値 x_L と最大値 x_H の値はそれぞれ，3 つのパラメタ n，$g_{\rm s}$，$g_{\rm p}$ の値から式 (5) を計算して求める．

すると $x(t)$ の満たすべき条件は $x(0) = x_L$ と $x(1) = x_L$ と $x(\mu) = 1$，それと最大点における条件 $x(T) = x_H$ と $(d/dt)x(t)|_{t=T} = 0$ であり，それら 5 つの条件を表す数式を並べた連立代数方程式 (8) を満たす必要がある．

(8)
$$\begin{cases} x_L &= \dfrac{\alpha_1}{\sigma_1} - \dfrac{\alpha_2}{\sigma_1}, \\ x_L &= \dfrac{\alpha_1}{1+\sigma_1} - \dfrac{\alpha_2}{1+\sigma_2}, \\ 1 &= \dfrac{\alpha_1}{\mu+\sigma_1} - \dfrac{\alpha_2}{\mu+\sigma_2}, \\ x_H &= \dfrac{\alpha_1}{T+\sigma_1} - \dfrac{\alpha_2}{T+\sigma_2}, \\ 0 &= -\dfrac{\alpha_1}{(T+\sigma_1)^2} + \dfrac{\alpha_2}{(T+\sigma_2)^2}\,. \end{cases}$$

与えられた 3 つの値 x_L，x_H，μ を用いてこの連立方程式 (8) を解いて 5 つの未知数 σ_1，α_1，σ_2，α_2，T を実数の範囲で求めるのであるが，その手順の詳細は長いので後の付録 A.2 に記述する．

2.2.1 「方式 2」の伝達関数の構成例

「方式 2」の伝達関数をパラメタの 4 つ組 μ，$g_{\rm p}$，$g_{\rm s}$，n を指定して構成した例を，以下に 5 通り示す．

例 2 の 1

パラメタ 4 つの組を $\mu = 2.0$, $g_{\rm p} = 10^{-3}$, $g_{\rm s} = 10^{-11}$, $n = 15$ と指定したときの (符号が逆の) 極と係数はそれぞれ $\sigma_1 = 0.72263\,67700\,10106\,00$, $\alpha_1 = 4.50376\,12744\,19472\,8$, $\sigma_2 = 0.31800\,92061\,18817\,21$, $\alpha_2 = 1.51642\,07888\,25754\,0$ である．伝達関数の大きさ $|g(t)|$ を**図 9** に示す．

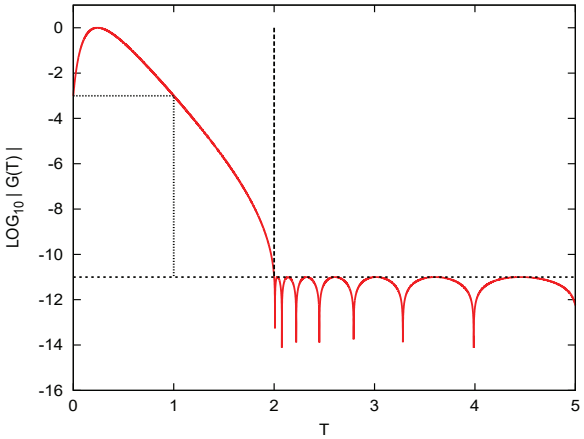

図 9 例 2 の 1 : 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ (μ=2.0, $g_{\rm p}$=10^{-3}, $g_{\rm s}$=10^{-11}, n=15)

例 2 の 2

パラメタ 4 つの組を $\mu = 2.0$, $g_{\rm p}$=10^{-2}, $g_{\rm s}$=10^{-13}, $n = 30$ と指定したときの結果は $\sigma_1 = 1.67933\,35315\,46621\,1$, $\alpha_1 = 12.84712\,18363\,24397$, $\sigma_2 = 1.25898\,93885\,43743\,1$, $\alpha_2 = 8.12041\,76097\,42217\,2$ である．伝達関数の大きさ $|g(t)|$ を**図 10** に示す．

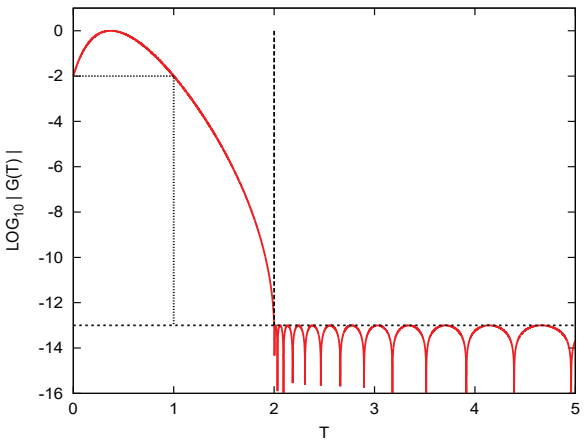

図 10 例 2 の 2 : 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ (μ=2.0, $g_{\rm p}$=10^{-2}, $g_{\rm s}$=10^{-13}, n=30)

例 2 の 3

パラメタ 4 つの組を $\mu = 2.0$, $g_{\rm p}$=10^{-2}, $g_{\rm s}$=10^{-14}, $n = 40$ と指定したときの結果は $\sigma_1 = 4.05699\,80265\,41214\,8$, $\alpha_1 = 7.24908\,97288\,62403\,3$, $\sigma_2 = 0.85697\,25679\,88837\,92$, $\alpha_2 = 0.56228\,73372\,47752\,49$ である．伝達関数の大きさ $|g(t)|$ を**図 11** に示す．

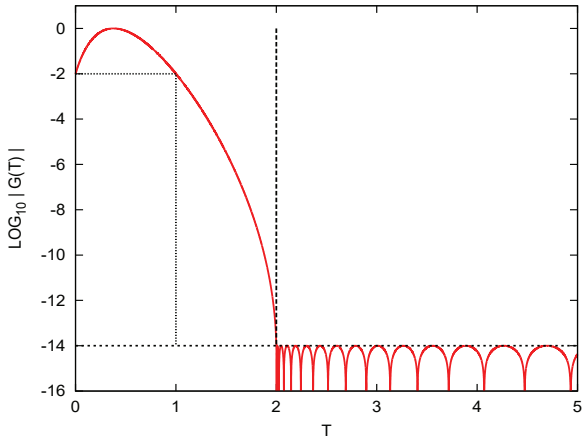

図 11 例 2 の 3 : 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ (μ=2.0, $g_{\rm p}$=10^{-2}, $g_{\rm s}$=10^{-14}, n=40)

例 2 の 4

パラメタ 4 つの組を $\mu = 1.5$, $g_{\rm p}$=10^{-4}, $g_{\rm s}$=10^{-12}, $n = 24$ と指定したときの結果は $\sigma_1 = 1.23356\,16207\,65099\,6$, $\alpha_1 = 3.93345\,42009\,89463\,4$, $\sigma_2 = 0.41603\,30166\,83182\,44$, $\alpha_2 = 0.84103\,96834\,36723\,15$ である．伝達関数の大きさ $|g(t)|$ を**図 12** に示す．

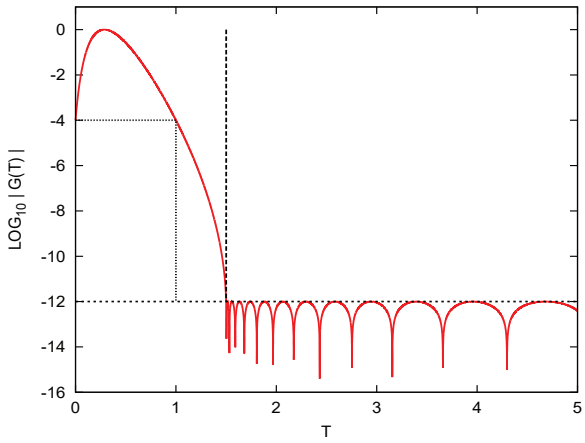

図 12 例 2 の 4 : 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ (μ=1.5, $g_{\rm p}$=10^{-4}, $g_{\rm s}$=10^{-12}, n=24)

例 2 の 5

パラメタ 4 つの組を $\mu = 1.5$, $g_{\rm p}$=10^{-4}, $g_{\rm s}$=10^{-13}, $n = 30$ と指定したときの結果は $\sigma_1 = 1.74294\,33413\,74797\,4$, $\alpha_1 = 4.25933\,19890\,91278\,0$, $\sigma_2 = 0.47133\,32285\,84217\,65$, $\alpha_2 = 0.61784\,63523\,66385\,49$ である．伝達関数の大きさ $|g(t)|$ を**図 13** に示す．

ⓒ 2020 Information Processing Society of Japan

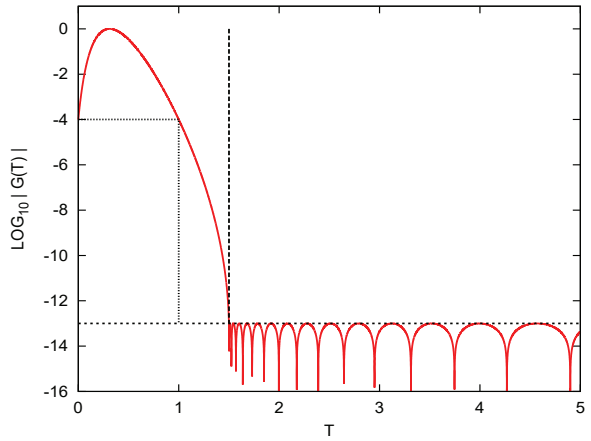

図 13 例 2 の 5：伝達関数の大きさ $|g(t)|$ （μ=1.5，$g_{\rm p}$=10^{-4}，$g_{\rm s}$=10^{-13}，n=30）

2.2.2 「方式 2」で実現できた設計の範囲

表 1 は $\mu = 2.0$ の場合について，**表 2** は $\mu = 1.5$ の場合について，**表 3** は $\mu = 1.25$ の場合について，それぞれ通過域での伝達率の最小値 $g_{\rm p}$ の値を 10^{-1}，10^{-2}，10^{-3}，10^{-4} とした各場合について，フィルタの Chebyshev 多項式の次数 n を 15 から 50 まで 5 刻みで変えたときに，伝達関数を実現可能にする $g_{\rm s}$ の値を 10 の負冪に限定した場合の最小値を示す．

- $\mu = 2.0$ の場合（表 1）は，（たとえば倍精度程度の計算用に）阻止域での伝達率 $g_{\rm s}$ が 10^{-14} 以下となることを要求すれば，フィルタの構成は，
  - $g_{\rm p}$ が 10^{-1} の場合は次数 n が表の範囲では不可能
  - $g_{\rm p}$ が 10^{-2} の場合は $n \geq 35$ で可能
  - $g_{\rm p}$ が 10^{-3} の場合は $n \geq 25$ で可能
  - $g_{\rm p}$ が 10^{-4} の場合は $n \geq 20$ で可能

  であることがわかる．
- $\mu = 1.5$ の場合（表 2）に $g_{\rm s}$ が 10^{-14} 以下であることを要求すると，
  - $g_{\rm p}$ が 10^{-1}，10^{-2}，10^{-3} の場合はどれも表の範囲では不可能
  - $g_{\rm p}$ が 10^{-4} の場合は $n \geq 35$ で可能

  であることがわかる．

  またもしも $g_{\rm s}$ が 10^{-12} 以下でよければ，
  - $g_{\rm p}$ が 10^{-1}，10^{-2} の場合はいずれも表の範囲では不可能
  - $g_{\rm p}$ が 10^{-3} の場合は $n \geq 40$ で可能
  - $g_{\rm p}$ が 10^{-4} の場合は $n \geq 25$ で可能

  であることがわかる．
- $\mu = 1.25$ の場合（表 3）には，$g_{\rm s}$ を 10^{-12} 以下にすることは表中のどの場合にも不可能であることがわかる．

2.3 伝達関数からのフィルタの構成

極が実数 2 つだけの伝達関数の式に対応するフィルタは，シフトが実数のレゾルベント 2 つで構成できる（実対称定値一般固有値問題 $A\mathbf{v} = \lambda B\mathbf{x}$ に対するシフト ρ のレゾルベント $\mathcal{R}(\rho)$ は $\mathcal{R}(\rho) \equiv (A - \rho B)^{-1} B$ である）．

いま採用している簡易設計では，伝達関数 $g(t)$ は以下の式で与えられる．

(9)
$$g(t) \equiv g_{\rm s}\, T_n(y)\,,\ y \equiv 2x(t) - 1\,,\ x(t) \equiv \frac{\alpha_1}{t+\sigma_1} - \frac{\alpha_2}{t+\sigma_2}\,.$$

いま下端付近の固有値を扱うとして，$\lambda \in [a, b]$ と $t \in [0, 1]$ の線形対応関係 $t = (\lambda - a)/(b - a)$ を用いて y を λ の関数として表すと，以下のようになる．

(10)
$$y = \frac{2\ell_1}{\lambda - \rho_1} - \frac{2\ell_2}{\lambda - \rho_2} - 1\,.$$

ここで係数 ℓ_k とシフト ρ_k（$k = 1, 2$）は

(11)
$$\ell_k \equiv (b - a)\,\alpha_k\,,\quad \rho_k \equiv a - (b - a)\,\sigma_k$$

となる（$\rho_1 < \rho_2 < a$，$\ell_1 > \ell_2$ である）．

表 1 「方式 2」により実現できた伝達関数の例（$\mu = 2.0$ の場合）

	$g_{\rm p}$=10^{-1}	$g_{\rm p}$=10^{-2}	$g_{\rm p}$=10^{-3}	$g_{\rm p}$=10^{-4}
n	$g_{\rm s}$	$g_{\rm s}$	$g_{\rm s}$	$g_{\rm s}$
15	10^{-6}	10^{-9}	10^{-11}	10^{-12}
20	10^{-7}	10^{-10}	10^{-12}	10^{-14}
25	10^{-8}	10^{-11}	10^{-14}	10^{-16}
30	10^{-8}	10^{-13}	10^{-16}	-
35	10^{-9}	10^{-14}	10^{-17}	-
40	10^{-9}	10^{-14}	-	-
45	10^{-10}	10^{-15}	-	-
50	10^{-10}	-	-	-

表 2 「方式 2」により実現できた伝達関数の例（$\mu = 1.5$ の場合）

	$g_{\rm p}$=10^{-1}	$g_{\rm p}$=10^{-2}	$g_{\rm p}$=10^{-3}	$g_{\rm p}$=10^{-4}
n	$g_{\rm s}$	$g_{\rm s}$	$g_{\rm s}$	$g_{\rm s}$
15	10^{-4}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}
20	10^{-4}	10^{-7}	10^{-9}	10^{-11}
25	10^{-4}	10^{-7}	10^{-10}	10^{-12}
30	10^{-5}	10^{-8}	10^{-11}	10^{-13}
35	10^{-5}	10^{-8}	10^{-11}	10^{-14}
40	10^{-5}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-14}
45	10^{-5}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}
50	10^{-5}	10^{-9}	10^{-13}	10^{-16}

表 3 「方式 2」により実現できた伝達関数の例（$\mu = 1.25$ の場合）

	$g_{\rm p} = 10^{-1}$	$g_{\rm p} = 10^{-2}$	$g_{\rm p} = 10^{-3}$	$g_{\rm p} = 10^{-4}$
n	$g_{\rm s}$	$g_{\rm s}$	$g_{\rm s}$	$g_{\rm s}$
15	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-7}
20	10^{-2}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-8}
25	10^{-2}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-9}
30	10^{-3}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-9}
35	10^{-3}	10^{-5}	10^{-8}	10^{-10}
40	10^{-3}	10^{-5}	10^{-8}	10^{-10}
45	10^{-3}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-10}
50	10^{-3}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-11}

ⓒ 2020 Information Processing Society of Japan

すると y に対応する線形作用素 $\mathcal{Y}$ は，$1/(\lambda-\rho_k)$ にレゾルベント $\mathcal{R}(\rho_k)$ を対応させ，定数 1 には恒等作用素 I を対応させたもので，$\mathcal{Y} \equiv 2\ell_1\,\mathcal{R}(\rho_1) - 2\ell_2\,\mathcal{R}(\rho_2) - I$ となる．そうして伝達関数 $f(\lambda)$ に対応する作用素であるフィルタ $\mathcal{F}$ は，作用素 $\mathcal{Y}$ の多項式として $\mathcal{F} = g_{\rm s}\,T_n(\mathcal{Y})$ となる．

この式の形のフィルタ $\mathcal{F}$ をベクトルの組 V に作用させる計算には，Chebyshev 多項式のもつ 3 項漸化式 $T_0(z) = I$，$T_1(z) = z$，$T_m(z) = 2zT_{m-1}(z) - T_{m-2}(z)$（$m \geq 2$）を利用する．具体的には，$\mathcal{Y}$ の m 次 Chebyshev 多項式 $T_m(\mathcal{Y})$ を V に作用させて得られるベクトルの組 $V^{(m)} \equiv T_m(\mathcal{Y})V$ を以下の漸化式 (12) を用いて計算する．

$$
(12) \qquad \begin{cases} V^{(0)} = V\,, \\ V^{(1)} = \mathcal{Y}\,V\,, \\ V^{(m)} = 2\mathcal{Y}\,V^{(m-1)} - V^{(m-2)} \quad (m \geq 2)\,. \end{cases}
$$

すると V から $V^{(n)}$ をこの漸化式 (12) を用いて計算すると，フィルタ $\mathcal{F}$ を V に作用させた結果のベクトルの組は $\mathcal{F}\,V = g_{\rm s}\,T_n(\mathcal{Y})V = g_{\rm s}\,V^{(n)}$ となる．

3. 極が実数だけで 3 つ以上持つ場合の伝達関数の簡易設計法

伝達関数が実数 2 つだけを極に持つ場合と同様に

$$
(13) \qquad g(t) = g_{\rm s}\,T_n(y), y \equiv 2x(t) - 1
$$

とし，伝達関数 $g(t)$ の極が実数 3 つだけの場合には

$$
(14) \qquad x(t) \equiv \frac{c_1}{t+\sigma_1} + \frac{c_2}{t+\sigma_2} + \frac{c_3}{t+\sigma_3}
$$

とおき，伝達関数 $g(t)$ の極が実数 4 つだけの場合には

$$
(15) \qquad x(t) \equiv \frac{c_1}{t+\sigma_1} + \frac{c_2}{t+\sigma_2} + \frac{c_3}{t+\sigma_3} + \frac{c_4}{t+\sigma_4}
$$

などとおく．そうして座標 $t = 0$，$t = 1$，$t = \mu$ のそれぞれにおいて $x(t)$ がとるべき値の指定や停留や高次接触の条件，通過域 $[0, 1]$ の内部における最大点，最小点，あるいは高次の接触の条件などを仮定して課すことで対応する連立代数方程式が得られる．それが実数の範囲で解ければ $x(t)$ の極の位置と極の係数がすべて決まり，伝達関数 $g(t)$ も決まり，そうしてレゾルベントの線形結合の Chebyshev 多項式としてフィルタを表せることになる．しかし連立代数方程式を実数の範囲で解く議論は極が 2 つだけの場合でも既にかなり複雑であり，極が 3 つや 4 つになるといまのようなやり方では解くのが困難になると予想されるので，シフトを実数に制限した場合にもシフトを複素数にした場合のような系統的なフィルタ設計の方法を見出すことが望ましい．

付　　録

A.1 「方式 1」の場合の $x(t)$ の決定法

ここでは 3 つの値 x_L，x_H，μ を既知とするとき，連立代数方程式 (6) を解いて 4 つの未知数 σ_1，α_1，σ_2，α_2 を実数の範囲で求める手順の詳細を示す．

まず連立式 (6) の第 4 番目の式から得られる等式 $\alpha_1/\sigma_1^2 = \alpha_2/\sigma_1^2$ の値は t にはよらない定数なのでそれを C とおくと，2 つの極の係数はそれぞれ $\alpha_1 = C\sigma_1^2$，$\alpha_2 = C\sigma_2^2$ と表される．また連立式 (6) の第 1 番目の式から，定数 C の値の逆数は，

(A.1)
$$
\frac{1}{C} = \frac{\sigma_1^2}{\mu+\sigma_1} - \frac{\sigma_2^2}{\mu+\sigma_2} = (\sigma_1 - \sigma_2) \times \frac{\mu(\sigma_1+\sigma_2) + \sigma_1\sigma_2}{(\mu+\sigma_1)(\mu+\sigma_2)}
$$

と表せる．そうして連立式 (6) の第 3 番目の式は，

$$
(A.2) \qquad x_H = C\,(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{(\mu+\sigma_1)(\mu+\sigma_2)}{\mu(\sigma_1+\sigma_2) + \sigma_1\sigma_2}
$$

となり，また連立式 (6) の第 2 番目の式は，

(A.3)
$$
\begin{aligned}
x_L &= C\left(\frac{\sigma_1^2}{1+\sigma_1} - \frac{\sigma_2^2}{1+\sigma_2}\right) \\
&= \frac{(\mu+\sigma_1)(\mu+\sigma_2)}{\mu(\sigma_1+\sigma_2) + \sigma_1\sigma_2} \times \frac{(\sigma_1+\sigma_2) + \sigma_1\sigma_2}{(1+\sigma_1)(1+\sigma_2)} \\
&= x_H \times \frac{(\sigma_1+\sigma_2) + \sigma_1\sigma_2}{(1+\sigma_1)(1+\sigma_2)}
\end{aligned}
$$

となるので

(A.4)
$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{(\mu+\sigma_1)(\mu+\sigma_2)}{\mu(\sigma_1+\sigma_2) + \sigma_1\sigma_2} \times \frac{t(\sigma_1+\sigma_2) + \sigma_1\sigma_2}{(t+\sigma_1)(t+\sigma_2)} \\
&= x_H \times \frac{t(\sigma_1+\sigma_2) + \sigma_1\sigma_2}{(t+\sigma_1)(t+\sigma_2)}
\end{aligned}
$$

である．すると与えられた 3 つの値 μ，x_H，x_L の組から σ_1 と σ_2 の値は以下の手順で求められる．まず (A.2) と (A.3) から得られる以下の関係：

(A.5)
$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{x_H} &= \dfrac{(\mu+\sigma_1)(\mu+\sigma_2) - \mu^2}{(\mu+\sigma_1)(\mu+\sigma_2)} = 1 - \dfrac{\mu^2}{(\mu+\sigma_1)(\mu+\sigma_2)}\,, \\
\dfrac{x_L}{x_H} &= \dfrac{(1+\sigma_1)(1+\sigma_2) - 1}{(1+\sigma_1)(1+\sigma_2)} = 1 - \dfrac{1}{(1+\sigma_1)(1+\sigma_2)}
\end{cases}
$$

を $p \equiv \mu^2(1-1/x_H)^{-1}$, $q \equiv (1-x_L/x_H)^{-1}$ とおいて書き直すと，$(\mu+\sigma_1)(\mu+\sigma_2) = p$ と $(1+\sigma_1)(1+\sigma_2) = q$ である．そうして $\sigma_1\sigma_2 + \mu(\sigma_1+\sigma_2) = p - \mu^2$ と $\sigma_1\sigma_2 + (\sigma_1+\sigma_2) = q - 1$ を得るが，これを σ_1 と σ_2 の基本対称式 $S_1 \equiv \sigma_1 + \sigma_2$ と $S_2 \equiv \sigma_1\sigma_2$ について解けば $S_2 = \mu + (\mu q - p)/(\mu - 1)$，$S_1 = (p-q)/(\mu-1) - (\mu+1)$ である．すると 2 次方程式 $w^2 - S_1 w + S_2 = 0$ が相異なる正の実根を 2 つ持つときには，それらが σ_1 と σ_2（$\sigma_1 > \sigma_2 > 0$）である．こうして σ_1 と σ_2 が求まればそれから $C \leftarrow x_H/(\sigma_1 - \sigma_2)$ とすると，極の係数は $\alpha_1 \leftarrow C\sigma_1^2$，$\alpha_2 \leftarrow C\sigma_2^2$ の計算で求まる．

以上の手順により，極が 2 つの実数だけである有理関数 $x(t) \equiv \alpha_1/(t+\sigma_1) - \alpha_2/(t+\sigma_2)$ が決定される．

A.2 「方式 2」の場合の $x(t)$ の決定法

ここでは 3 つの値 x_L，x_H，μ を既知とするとき，連立代数方程式 (8) を解いて 5 つの未知数 σ_1，α_1，σ_2，α_2，T を実数の範囲で求める手順の詳細を示す．

まず連立式 (8) の第 1 番目と第 2 番目の式からは，

(A.6)
$$\frac{\alpha_1}{\sigma_1(1+\sigma_1)} = \frac{\alpha_2}{\sigma_2(1+\sigma_2)}$$

であり，この等式の値を C とおくと極の係数はそれぞれ

(A.7)
$$\begin{cases} \alpha_1 &= C\sigma_1(1+\sigma_1), \\ \alpha_2 &= C\sigma_2(1+\sigma_2) \end{cases}$$

と表される．それを用いて連立式 (8) の第 3 番目の式から α_1 と α_2 を消去すると

(A.8)
$$1 = \frac{\alpha_1}{\mu+\sigma_1} - \frac{\alpha_2}{\mu+\sigma_2} = C\left\{\frac{\sigma_1(1+\sigma_1)}{\mu+\sigma_1} - \frac{\sigma_2(1+\sigma_2)}{\mu+\sigma_2}\right\}$$

となるので，C の逆数の値は

(A.9)
$$\frac{1}{C} = \frac{\sigma_1(1+\sigma_1)}{\mu+\sigma_1} - \frac{\sigma_2(1+\sigma_2)}{\mu+\sigma_2} = (\sigma_1-\sigma_2)\times\frac{\mu(1+\sigma_1+\sigma_2)+\sigma_1\sigma_2}{(\mu+\sigma_1)(\mu+\sigma_2)}$$

と表される．すると x_L の値は

(A.10)
$$x_L = \frac{\alpha_1}{\sigma_1} - \frac{\alpha_2}{\sigma_2} = C\,(\sigma_1-\sigma_2) = \frac{(\mu+\sigma_1)(\mu+\sigma_2)}{\mu(1+\sigma_1+\sigma_2)+\sigma_1\sigma_2}$$

と表される（これから $C>0$ であり，また $\alpha_1>\alpha_2$ であることもわかる）．

つぎに極大点の位置 T についての条件は連立式 (8) の第 5 番目の式から

(A.11)
$$0 = \frac{\alpha_1}{(T+\sigma_1)^2} - \frac{\alpha_2}{(T+\sigma_2)^2} = C\left\{\frac{\sigma_1(1+\sigma_1)}{(T+\sigma_1)^2} - \frac{\sigma_2(1+\sigma_2)}{(T+\sigma_2)^2}\right\}$$

であるが，$T>0$，$\sigma_1>\sigma_2>0$ を用いて平方根を開くと，

(A.12)
$$\frac{\sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)}}{T+\sigma_1} = \frac{\sqrt{\sigma_2(1+\sigma_2)}}{T+\sigma_2}$$

が得られる．この等式の値を Γ とおく．すると $\sigma_1 \neq \sigma_2$ であるから，

(A.13)
$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)} - \sqrt{\sigma_2(1+\sigma_2)}}{\sigma_1-\sigma_2} \\ &= \frac{1+\sigma_1+\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)} + \sqrt{\sigma_2(1+\sigma_2)}} \end{aligned}$$

である．そうして，

(A.14)
$$\begin{cases} T+\sigma_1 &= \sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)}/\Gamma, \\ T+\sigma_2 &= \sqrt{\sigma_2(1+\sigma_2)}/\Gamma \end{cases}$$

であるから

(A.15)
$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\Gamma}\times\frac{\sigma_1\sqrt{\sigma_2(1+\sigma_2)} - \sigma_2\sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)}}{\sigma_1-\sigma_2} \\ &= \frac{1}{\Gamma}\times\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1\sqrt{\sigma_2(1+\sigma_2)} + \sigma_2\sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)}} \end{aligned}$$

となる．よって x_H の値は

(A.16)
$$\begin{aligned} x_H &= \frac{\alpha_1}{T+\sigma_1} - \frac{\alpha_2}{T+\sigma_2} \\ &= \Gamma\left\{\frac{\alpha_1}{\sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)}} - \frac{\alpha_2}{\sqrt{\sigma_2(1+\sigma_2)}}\right\} \\ &= C\,\Gamma\left\{\sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)} - \sqrt{\sigma_2(1+\sigma_2)}\right\} \\ &= C\,\Gamma^2\,(\sigma_1-\sigma_2) \\ &= \Gamma^2 x_L \end{aligned}$$

と表される．すると，

(A.17)
$$\begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma} = \sqrt{x_L/x_H} = \dfrac{\sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)} + \sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)}}{1+\sigma_1+\sigma_2}, \\ \dfrac{1}{x_L} = \dfrac{\mu(1+\sigma_1+\sigma_2)+\sigma_1\sigma_2}{(\mu+\sigma_1)(\mu+\sigma_2)} = 1 - \dfrac{\mu(\mu-1)}{(\mu+\sigma_1)(\mu+\sigma_2)} \end{cases}$$

となるので，これらの式から σ_1 と σ_2 についての以下の連立方程式 (A.18) が得られるので，これを解いて σ_1 と σ_2（ただし $\sigma_1>\sigma_2>0$）を求めればよい．

(A.18)
$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)} + \sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)}}{1+\sigma_1+\sigma_2} = \sqrt{x_L/x_H}, \\ (\mu+\sigma_1)(\mu+\sigma_2) = \mu(\mu-1)(1-1/x_L)^{-1}. \end{cases}$$

そこで (A.18) の上側の式に含まれる平方根をはずすための変数の置換 $\sigma_1 \equiv z_1^2/(1-z_1^2)$，$\sigma_2 \equiv z_2^2/(1-z_2^2)$（ただし $0<z_1<1$，$0<z_2<1$ とする）を行なうと，

(A.19)
$$\frac{\sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)} + \sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)}}{1+\sigma_1+\sigma_2} = \frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$$

となるので，関係式 $z_1+z_2 = (1+z_1z_2)\sqrt{x_L/x_H}$ が得られる（さらに関係式 $T = z_1z_2/(1+z_1z_2)$ もわかる）．いま z_1 と z_2 の基本対称式を $S_1 \equiv z_1+z_2$，$S_2 \equiv z_1z_2$ とおくと，この関係式は $S_1 = (1+S_2)\sqrt{x_L/x_H}$ と書ける．

さらに (A.18) の下側の式についても同様に，σ_1 と σ_2 を z_1 と z_2 を用いて置換して，さらに $\kappa \equiv \mu/(\mu-1)$，$\nu \equiv (1-1/x_L)^{-1}$ とおくと，$(z_1^2-\kappa)(z_2^2-\kappa) = \nu\kappa\,(z_1^2-1)(z_2^2-1)$ となり，これを整理すると $\eta_0(z_1z_2)^2 + \eta_1(z_1^2+z_2^2) + \eta_2 = 0$ が得られ，これを z_1 と z_2 の基本対称式で表わすと

(A.20)
$$\eta_0 {S_2}^2 + \eta_1({S_1}^2 - 2S_2) + \eta_2 = 0$$

となる．ただし各係数は

(A.21)
$$\eta_0 \equiv 1-\nu\kappa,\ \ \eta_1 \equiv (\nu-1)\kappa,\ \ \eta_2 \equiv (\kappa-\nu)\kappa$$

となる．既に得ている関係式 $S_1 = (1+S_2)\sqrt{x_L/x_H}$ を用

いて式 (A.20) から S_1 を消去すると，以下の S_2 についての 2 次方程式が得られる．

$$\zeta_0\, {S_2}^2 + \zeta_1\, S_2 + \zeta_2 = 0\,. \tag{A.22}$$

ただしこの方程式の各係数は

$$\begin{cases} \zeta_0 \equiv \eta_0 + (x_L/x_H)\,\eta_1, \\ \zeta_1 \equiv 2\{\,(x_L/x_H) - 1\}\,\eta_1, \\ \zeta_2 \equiv \eta_2 + (x_L/x_H)\,\eta_1 \end{cases} \tag{A.23}$$

である．簡単な考察から ζ_0 と ζ_1 は共に負であることがわかるので，S_2 についての 2 次方程式が正根を持つためには ζ_2 が正であることが必要である．そうして ζ_2 が正であれば，2 次方程式が実根を持つ場合なら正根は 1 つである．

いま 2 次方程式 $\zeta_0 S_2^2 + \zeta_1 S_2 + \zeta_2 = 0$ が区間 $(0, 1)$ に入る実根 S_2 を持つとする（そうでなければ σ_1 と σ_2 には適切な解は無い）．そのような S_2 が存在するとき，$S_1 \leftarrow (S_2 + 1)\sqrt{x_L/x_H}$ を作る．

いま 2 次方程式 $w^2 - S_1 w + S_2 = 0$ の相異なる実根が共に区間 $(0, 1)$ にあるとき，それらを z_1 と z_2 $(1 > z_1 > z_2 > 0)$ とする（もしもそのような 2 根が無ければ，σ_1 と σ_2 には適切な解は無い）．そのとき σ_1 と σ_2 の値は z_1 と z_2 の値から $\sigma_1 \leftarrow z_1^2/(1 - z_1^2)$，$\sigma_2 \leftarrow z_2^2/(1 - z_2^2)$ と計算して決まり，各極の係数も $C \leftarrow x_L/(\sigma_1 - \sigma_2)$ として $\alpha_1 \leftarrow C\sigma_1(1 + \sigma_1)$，$\alpha_2 \leftarrow C\sigma_2(1 + \sigma_2)$ と計算して決まる．

以上の手順により，極が 2 つの実数だけである有理関数 $x(t) \equiv \alpha_1/(t + \sigma_1) - \alpha_2/(t + \sigma_2)$ が決定される．

参考文献

[1] 村上弘：固有値が指定された区間内にある固有対を解くための対称固有値問題用のフィルタの設計，**情報処理学会論文誌：コンピューティングシステム** (ACS31)，Vol.3, No.3 (2010), pp.1–21.

[2] 村上弘：対称一般固有値問題のフィルタ作用素を用いた不変部分空間の近似構成，**情報処理学会論文誌：コンピューティングシステム** (ACS35)，Vol.4, No.4 (2011), pp.1–14.

[3] 村上弘：レゾルベントを用いたフィルタによる固有値問題の解法について，情報処理学会研究報告，Vol.2012-HPC-133, No.22 (2012), pp.1–8.

[4] 村上弘：実対称定値一般固有値問題の最小側固有値を持つ固有対に対する実数シフトのレゾルベントを組み合わせたフィルタによる解法，**先進的計算基盤システムシンポジウム論文集** *2012* (2012)，pp.81–82.

[5] 村上弘：レゾルベントの線形結合をフィルタに用いたエルミート定値一般固有値問題のフィルタ対角化法，**情報処理学会論文誌：コンピューティングシステム** (ACS45)，Vol.7, No.1 (2014), pp.57–72.

[6] 村上弘：レゾルベントの多項式をフィルタとして用いる対角化法について，**情報処理学会研究報告**，Vol.2014-HPC-146, No.13 (2014), pp.1–4.

[7] 村上弘：実対称定値一般固有値問題に対するレゾルベントの多項式によるフィルタの構成法の検討，**情報処理学会研究報告**，Vol.2014-HPC-147, No.2 (2014), pp.1–10.

[8] 村上弘：実数シフトのレゾルベントを組み合わせたフィルタによる実対称定値一般固有値問題の下端付近の固有値を持つ固有対の解法，*HPCS2015* **シンポジウム論文集**，Vol.2015 (2015), pp.38–51.

[9] 村上弘：一つのレゾルベントから構成されたフィルタを用いた実対称定値一般固有値問題に対するフィルタ対角化法の実験，**情報処理学会研究報告**，Vol.2015-HPC-149, No.7 (2015), pp.1–16.

[10] 村上弘：実対称定値一般固有値問題の最小側固有対を解くための実数シフトのレゾルベントの多項式によるフィルタの簡易な設計法，**情報処理学会研究報告集**，Vol.2016-HPC-155, No.44 (2016), pp.1–27.

[11] 村上弘：レゾルベントの多項式によるフィルタを用いた実対称定値一般固有値問題の解法，**情報処理学会研究報告集**，Vol.2016-HPC-157, No.4 (2016), pp.1–15.

[12] 村上弘：チェビシェフ展開形で表わされたレゾルベントの多項式によるフィルタの伝達特性の調整，**数理解析研究所講究録**，No.2019 (2017), pp.96–112.

[13] 村上弘：実対称定値一般固有値問題を解くためのレゾルベントの多項式型フィルタの設計について，**情報処理学会研究報告**，Vol.2017-HPC-158, No.7 (2017), pp.1–10.

[14] 村上弘：実対称定値一般固有値問題を解くための少数のレゾルベントの多項式を用いたフィルタの設計法，**情報処理学会研究報告**，Vol.2017-HPC-159, No.4 (2017), pp.1–13.

[15] 村上弘：少数のレゾルベントから構成されたフィルタを用いた実対称定値一般固有値問題の解法，**情報処理学会研究報告**，Vol.2017-HPC-160, No.32 (2017), pp.1–32.

[16] 村上弘：少数のレゾルベントで構成された多項式型フィルタによる対称定値一般固有値問題の解法，**情報処理学会研究報告**，Vol.2017-HPC-161, No.7 (2017), pp.1–13.

[17] 村上弘：少数のレゾルベントから構成されたフィルタを用いた対称定値一般固有値問題の解法，**情報処理学会研究報告**，Vol.2017-HPC-162, No.21 (2017), pp.1–34.

[18] 村上弘：少数のレゾルベントの多項式型フィルタを用いた一般固有値問題の解法，**情報処理学会研究報告**, Vol.2018-HPC-165, No.15 (2018), pp.1–21.

[19] 村上弘：フィルタにレゾルベントの線形結合の多項式を用いた複素エルミート定値一般固有値問題の解法，**情報処理学会研究報告**，Vol.2018-HPC-166, No.10 (2018), pp.1–17.

[20] 村上弘：フィルタ対角化法による近似固有対の精度の改良について，**情報処理学会研究報告**，Vol.2018-HPC-167, No.29 (2018), pp.1–31.

[21] 村上弘：単一のレゾルベントのチェビシェフ多項式による実対称定値一般固有値問題の解法用の簡易型フィルタ，**情報処理学会論文誌：コンピューティングシステム** (ACS64)，Vol.12, No.2 (2019), pp.1–26.

[22] 村上弘：フィルタ対角化法による固有値問題の近似対の改良，**情報処理学会研究報告**，Vol.2019-HPC-168, No.18 (2019), pp.1–36.

[23] 村上弘：直交化付きフィルタ適用による固有値問題の近似対の反復改良について，**情報処理学会研究報告**，Vol.2019-HPC-169, No.1 (2019), pp.1–31.

[24] Hiroshi Murakami: Filters consist of a few resolvents to solve real symmetric-definite generalized eigenproblems, *JJIAM*, Vol.36, No.2, (2019), pp.579–618.

[25] 村上弘：フィルタの反復適用による実対称定値一般固有値問題の近似対の改良，**情報処理学会論文誌：コンピューティングシステム** (ACS65)，Vol.12, No.3 (2019), pp.14–33.

[26] 村上弘：少数のレゾルベントの線形結合の多項式をフィルタとして用いた実対称定値一般固有値問題の解法，**情報処理学会研究報告**，Vol.2019-HPC-171, No.7 (2019), pp.1–45.

[27] 村上弘：少数のレゾルベントで構成されたフィルタを用いた実対称定値一般固有値問題の解法，**情報処理学会論文誌：コンピューティングシステム** (ACS67)，Vol.13, No.1 (2020), pp.1–27.

ⓒ 2020 Information Processing Society of Japan

付　　録

訂正（一部の数式の添字の修正）

予稿の投稿後に，不注意により数式中の添字に誤りを多く入れていたことが判明いたしました．お詫びしてここにその訂正について記述させていただきます．

- 頁 4 の左側カラム上部にある式番号 (6) の 4 つあるうちの最後の数式中において，右辺に含まれている分子が α_2 である分数式の分母が誤って σ_1^2 となっているので，それを訂正して σ_2^2 とする．
- 頁 5 の右側カラム下部にある式番号 (8) の 5 つあるうちの最初の数式中において，右辺に含まれている分子が α_2 である分数式の分母が誤って σ_1 となっているので，それを訂正して σ_2 とする．
- 頁 8 の右側カラム上部にある文章中の
  「まず連立式 (6) の第 4 番目の式から得られる等式 $\alpha_1/\sigma_1^2 = \alpha_2/\sigma_1^2$ の値は…」
  とある数式の右辺の分母が誤って σ_1^2 となっているので，それを訂正して σ_2^2 とする．
- 頁 9 の右側カラムの中央付近の，式番号 (A.17), (A.18), (A.19) のそれぞれに含まれている分数式の分子 $\sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)} + \sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)}$ はどれも誤りなので，それらすべてを訂正して $\sqrt{\sigma_1(1+\sigma_1)} + \sqrt{\sigma_2(1+\sigma_2)}$ とする．

以上です．

© 2020 Information Processing Society of Japan