

微分代数的アプローチによる物理リザーバーの計算能力評価

小松 瑞果^{1,a)} 谷口 隆晴¹ 中嶋 浩平²

概要：物理リザーバーコンピューティングとは、物理リザーバーとよばれる物理システムを用いて行う情報処理技術である。主に、フィルターと呼ばれる、与えられた時間連続的な入力を、連続的な出力に変換する写像などを扱い、実際、様々な実験を通して、そのような写像が実現可能であることが確認されている。これに対する理論的なアプローチとしては、ある種のニューラルネットワークの学習方法である、リザーバーコンピューティングの理論の適用が挙げられる。これは、汎用的ではあるものの、与えられた個々の物理リザーバーの特性や機能を、詳細に解析することは難しい。これに対し、本研究では、システム解析分野におけるモデルの同定問題に対するアプローチを応用した、物理システムの、物理リザーバーとしての計算能力を解析する新しい手法を提案する。提案手法では、微分代数的手法により入出力間の関係式を導出し、これを解析することで、システムの計算能力を直接的に評価する。

キーワード：物理リザーバーコンピューティング、リザーバーコンピューティング、微分代数、グレブナー基底

Differential Algebraic Approach for Evaluation of Computational Capabilities of Physical Reservoirs

Abstract: In physical reservoir computing, computations are processed by physical systems called physical reservoirs. Here, a computation means a filter, that is, a map from a continuous input function to a continuous output function. The physical systems achieve tasks such as function approximation and control by computations. In fact, computational capabilities of physical reservoirs are partially confirmed through experiments. One of the theoretical approaches for physical reservoir is based on the one for reservoir computing, a learning method of a certain type of neural networks. This is a general approach yet it is difficult to analyze given physical systems by such an approach. Against this, we provide a new theoretical approach to analyze computational capabilities of given physical systems as reservoirs directly by applying an approach towards model identifiability problem, which is studied in the field of system analysis. In our method, firstly, input-output equations are derived by a differential algebraic method for physical systems described by state-space models. Then, computational capabilities of the systems are analyzed via the analysis of the input-output equations.

Keywords: Physical reservoir computing, Reservoir computing, Differential algebra, Gröbner basis

1. はじめに

本研究では、通常、モデルの同定可能性解析に用いられる入出力関係式を応用した、物理リザーバーの計算能力評価手法を提案する。

近年、柔らかく、変形可能な素材で構成された、ソフトロボットと呼ばれるロボットが注目されている。このようなロボットは、災害時の瓦礫の多い場所での移動など、様々な環境に適応しやすいという利点をもつ一方、柔らかい素材でできたロボットの動きの制御は、剛体の制御を基礎とする古典的な制御理論では扱うことが困難であり、新たなアプローチが必要とされている [2]。これに対する新しいアプローチとして、物理リザーバーコンピューティングという研究が進められている。この分野においては、柔らかい素材は、制御を困難にするものではなく、むしろ、制御を補

¹ 神戸大学大学院システム情報学研究科
Graduate School of System Informatics, Kobe University,
1-1 Rokkodai-cho, Nada-ku, Kobe, 657-8501, Japan

² 東京大学大学院情報理工学系研究科
Graduate School of Information Science and Technology, The
University of Tokyo,
7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, 113-8656 Tokyo, Japan

^{a)} m-komatsu@stu.kobe-u.ac.jp

助し得る計算資源であると考えられている。また、実際、様々な実証実験を通じて、非線形時系列予測をはじめとする、様々な機能が物理リザーバーコンピューティングにより実現可能であることが示されている [8], [9], [10]。

物理リザーバーコンピューティングの基礎理論は、Hauserら [3] などでも論じられている。基本的なアイデアは、柔らかい素材を物理的に実現されたリザーバーとみなし、これに、リザーバーコンピューティングと呼ばれる、再帰型ニューラルネットワークの学習方法に関する理論を適用することである [4], [6]。再帰型ニューラルネットワークとは、ネットワークの内部にループをもつようなニューラルネットワークであり、ループが存在することによって情報を記憶することが出来ることから、時系列モデルなどとして利用される。リザーバーコンピューティングでは、リザーバーと呼ばれる、巨大、かつ、複雑な再帰型ニューラルネットワークをあらかじめ構成し、対象とするデータをリザーバーの出力の重み付き線形和によって近似する。特に、学習の際には、リザーバー内部の重みは固定し、出力を定める重みのみを学習するのであるが、この、内部の重みを固定するという点は、物理リザーバーコンピューティングにおいて利用される物理システムの特長、すなわち、物理パラメータが時間に関して不変であることと対応付けることが可能である。そのため、リザーバーコンピューティングに関する理論は、物理リザーバーコンピューティングに自然に適用することが可能となる。例えば、リザーバーコンピューティングの理論においては、リザーバーがエコステート性と呼ばれる性質を持つかどうかことが重要とされているが [4], [13]、物理リザーバーコンピューティングでも同様に、用いられる非線形な物理システムがエコステート性をもつかどうかに関する研究が盛んに行われている。

本研究では、与えられた物理システムの、リザーバーとしての計算能力を評価する、新たなアプローチを提案する。提案手法は、システム解析分野における、モデルの同定可能性問題に対して用いられる、微分代数的手法に基づく [1], [5], [7]。モデルの同定可能性問題は、モデルがもつパラメータが、観測されたデータから一意に定まるかどうかを判定する問題である。この問題を解決する一つの手法は、微分代数的手法により導出される、入出力関係式という式が用いる方法である。この方法では、まず、与えられた、数理モデル及び観測モデルからなる状態空間モデルから、モデルへの入力変数と出力変数のみを残すような代数的操作によって、状態変数を消去する。このようにして得られた式が入出力関係式である。本研究では、入出力関係式が、システムの入力、及び、出力の関係性を直接記述していることに着目し、この式を用いて、物理システムのリザーバーとしての能力と、システムの性質の関係性を明らかにする。

2. 提案手法の概要

2.1 提案手法のアイデア

本研究では、一般の状態空間モデル

$$\frac{dx}{dt} = f(x; \theta) + u, \quad y = g(x; \theta) \quad (1)$$

で表される系を用いた物理リザーバーコンピューティングを考える。ここで、 $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ は時刻 t に依存する関数である。また、 $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は、それぞれ、時刻 t に依存する関数であり、入力および出力を表すものとする。また、 f, g は、系を表すパラメータ $\theta \in \mathbb{R}^l$ に依存する関数である。ただし、本論文では、代数的アプローチを用いるため、 f や g は x, y の多項式であると仮定する。多項式でない場合には、多項式となるように再定式化するか、Taylor 展開などによって近似する必要がある。

物理リザーバーコンピューティングでは、系の出力 y を計算に用いるため、系の計算能力を評価するためには、出力 y が、入力 u に対して、どのような関数になり得るのかを調べればよい。本研究では、パラメータ同定可能性問題で用いられている代数的手法を応用して、入力と出力の関係を明らかにすることで、これを評価する。

パラメータ同定可能性問題は、観測可能なデータである入力 u および出力 y から、系のパラメータ θ を定めることができるかどうかを判定する問題である。この問題に対する一つのアプローチとして、入出力関係式を用いた方法が知られている。入出力関係式は、(1) から入力 u と出力 y 以外の変数 x を消去することで得られる、 u と y だけの関係を表す方程式である。簡単な例として、中間変数を用いて 1 階の方程式に書き直した調和振動子

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -\omega x - \mu v + u, \quad y = x \quad (2)$$

の場合には

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega y - \mu \frac{dy}{dt} + u \quad (3)$$

が入出力関係式となる。 ω, μ はパラメータである。パラメータ同定可能性問題では、この式を用いて u, y の値からパラメータ $\theta = (\omega, \mu)$ が定まるかどうかを判定する。

本論文では、入出力関係式を、入力を出力に変換する式と考え、入力に対し、どのような関数が出力されるかを調べることで、計算可能な関数の集合を直接的に評価する。ここで、方程式 (3) に着目すると、減衰項 $\mu dy/dt$ のため、解は徐々に減衰し、入力によって駆動される特殊な解に漸近すると予想されるが、これは、リザーバーコンピューティングでエコステート性と呼ばれる性質の、一つの実例だと考えられる。この性質は、簡潔に述べると、入力から出力が一意に定まることを保証する性質である。もしも、系がこの性質をもたないと、同一の入力に対して異なる出力が得られてしまうかもしれないため、系を関数として使

うことができない。従って、この性質は物理リザーコン
ピューティングにおいて、非常に重要である。例として、
ある時不変な行列 A を用いて

$$\frac{dy}{dt} = Ay + u$$

と表される線形な系を考える。この系の一般解は以下のよ
うに表される：

$$y(t) = \exp(tA)y(0) + y_0(t).$$

ここで、 $y_0(t)$ は、系の特殊解

$$y_0(t) = \exp(tA) \int_0^t \exp(-sA)u(s)ds.$$

である。もしも、 A の固有値が全て負であったとすると、
 $\exp(tA)y(t)$ は 0 に近づくため、 $y(t)$ は $y_0(t)$ に近づく。つ
まり、物理リザーコンピューティングで実際に計算に利
用できるのは $y_0(t)$ であることが分かる。

今回は、簡単のため、まず、長時間入力を加えず、系を
定常状態に移行させておき、実際の計算には、その後で入
力を加え、その出力を利用することを仮定する。その場合、
系がエコステート性をもつならば、実際に計算出来るの
は、定常解近傍での特殊解となるであろう。そこで、本論
文では、系の計算能力の評価手法として、以下のような手
法を提案する。

- (1) 与えられた微分方程式に対し、微分代数のグレブナー
基底を用いて入出力関係式を求める。
- (2) 長時間無入力だったと仮定したときの入出力関係式の
定常解を求める。
- (3) 定常解近傍における、入出力関係式の特殊解を評価
する。

注意 1 エコステート性をもつ物理リザーバーに対して
は、入力を与えると出力が一意に定まる、つまり、実質的
に、状態変数の、初期値に対する出力の依存性がない。こ
のことから、エコステート性をもつ物理リザーバーの出力
となる関数を調べるにあたり、状態変数の初期値は本質的
に不要であると言える。実際、入出力関係式は、状態空間
モデルから状態変数を消去して得られた式であるから、状
態変数の初期値を必要としない。従って、このような解析
に適した手法であると言える。

2.2 入出力関係式の導出の概要

一般に、入出力関係式は、方程式から定まる、微分代数
のイデアルという集合に対し、グレブナー基底を求めるこ
とで導出できる。

アイデアは、方程式を具体的に変形して入出力関係式を
求める代わりに、方程式を変形して得られる式の集合を調
べ、その中に状態変数を含まない式が存在するかどうかを
判定するというものである。このとき必要となる、方程式

を変形して得られる式の集合は、代数的には、イデアルに
対応する。ここで、多項式などで表される代数的な方程式
に対しては、方程式の変形に用いることができる演算とし
て四則演算などが許可されるが、微分方程式に対しては、
解が十分滑らかであれば、方程式を微分することも許され
る。微分代数は、そのような場合を想定し、微分を演算と
して許す代数である。詳細については [11]などを参照され
たい。Gröbner 基底は、線形空間の基底に相当するような
ものであり、これを用いると、与えられた多項式がイデア
ルに所属するかどうかを判定することができる。また、消
去定理として知られている以下の定理により、線形方程式
に対するガウスの消去法のように、非線形方程式から変数
の消去を行うこともできる。

定理 1 単項式順序として $x_1 > x_2 > \dots > x_n$ となるよ
うな辞書式順序を用いるとする。イデアル I の被約グレブ
ナー基底を G とするとき、 $j < n$ に対して $G \cap K[x_1, \dots, x_j]$
は $I \cap K[x_1, \dots, x_j]$ のグレブナー基底となる。

一般に、微分代数のグレブナー基底は計算が難しいこと
が知られており、有限回の計算でグレブナー基底が求めら
れるとは限らない。しかし、ここで考えている問題に対し
ては、以下の定理 [7] により、計算の停止性が保証される。

定理 2 N 個の変数 x と R 個の入力 u 、1 個の出力 y を
もつ、多項式 f, g で記述されるモデル

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u; \theta), \quad y = g(x; \theta)$$

に対して、イデアル P を

$$\left\langle \frac{dx}{dt} - f, \dots, \frac{d^N x}{dt^N} - f^{(N-1)}, \dots, y - g, \dots, y^{(N)} - g^{(N)} \right\rangle$$

と定義する。このとき、 P は $\mathbb{Q}(\theta)[x, y, u, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^{N-1}x}{dt^{N-1}}, \frac{d^{N-1}y}{dt^{N-1}}, \frac{d^{N-1}u}{dt^{N-1}}, \frac{d^N x}{dt^N}, \frac{d^N y}{dt^N}]$ に含まれるが、 $P \cap \mathbb{Q}(\theta)[y, u, \dots, \frac{d^{N-1}y}{dt^{N-1}}, \frac{d^{N-1}u}{dt^{N-1}}, \frac{d^N y}{dt^N}]$ は零イデアルではない。

この定理を用いると、微分代数のイデアルのグレブナー
基底を、通常の代数のイデアルのグレブナー基底として計
算できる。例えば、(2) から 2 つの変数 x, v を消去するた
めには、方程式に各変数の 2 階微分までが含まれていれば
よいので

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}, \quad \frac{dv}{dt} = -wx - \mu v + u, \\ \frac{d^2 v}{dt^2} &= -w \frac{dx}{dt} - \mu \frac{dv}{dt} + \frac{du}{dt}, \quad y = x, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} \end{aligned}$$

という式を用意しておき、イデアル

$$\left\langle \frac{dx}{dt} - v, \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{dv}{dt}, \frac{dv}{dt} + wx + \mu v + u, \frac{d^2 v}{dt^2} + w \frac{dx}{dt} + \mu \frac{dv}{dt} - \frac{du}{dt}, y - x, \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt}, \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{d^2 x}{dt^2} \right\rangle$$

の Gröbner 基底を計算すれば良い。Singular というソフ
トウェアを用いて、実際に計算してみると、

$$\begin{aligned} wy + \mu \frac{dy}{dt} + \frac{d^2 y}{dt^2} - u, \quad \frac{d^2 v}{dt^2} + w \frac{dy}{dt} + \mu \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{du}{dt}, \\ \frac{dv}{dt} - \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad v - \frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{dv}{dt}, \quad \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}, \quad x - y \end{aligned}$$

が得られる。このうち、 x と v が含まれていない式は

$$wy + \mu \frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} - u$$

であり、これを 0 と設定することで入出力関係式 (3) が得られる：

$$wy + \mu \frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} - u = 0.$$

2.3 特殊解の計算

次に与えられた入出力関係式に対して特殊解を計算する。非斉次線形微分方程式の解は、一般に、斉次方程式の一般解と特殊解の和で表される。斉次方程式の一般解の集合が線形空間を定めることを考慮すると、非斉次線形微分方程式の解の集合はアフィン空間を定めることが分かる。同様に、非斉次非線形微分方程式の解の集合は多様体を定める。すなわち、特殊解を求めるためには、多様体のある点を求めればよい。特に、ここで興味があるのは、無入力状態が続いた後、定常状態に達し、その後入力を与えたもとの、入出力関係式の解の挙動である。これを調べるには、入力を 0 とした入出力関係式の解集合が定める多様体の、定常状態付近を調べればよい。また、特に、入力が微小であれば、定常状態付近の接空間を解析すればよいといえる。このように、入出力関係式の特殊解を求めることで、物理リザバーが近似できる関数を解析することができる。

以下、物理リザバーが、漸近安定な平衡点 ($y(t) = \text{const} = y_\infty$) をもつと仮定し、入出力関係式を用いて、物理リザバーが近似できる関数を調べる。なお、平衡点の漸近安定性は、多くの物理システムに対して自然な仮定となっており、例えば、前述の調和振動子は、減衰項 $\mu dy/dt$ のため、入力を 0 としたもとの、漸近安定な平衡点をもつ。また、この仮定は、平衡点近傍において、物理リザバーがエコーステート性をもつことに対応する。そのため、この平衡点近傍での計算能力を評価するために、微小な入力 u が与えられたもとの、物理リザバーが出力する関数を調べるには、導出した入出力関係式の平衡点近傍における解の挙動を調べればよい。そこで、平衡点 y_∞ 周りの微小変動 δy に対する方程式が、以下のように線形近似できると仮定する：

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \frac{d^{n-1}\delta y}{dt^{n-1}} \\ \frac{d^{n-2}\delta y}{dt^{n-2}} \\ \vdots \\ \delta y \end{pmatrix} = A(y_\infty) \begin{pmatrix} \frac{d^{n-1}\delta y}{dt^{n-1}} \\ \frac{d^{n-2}\delta y}{dt^{n-2}} \\ \vdots \\ \delta y \end{pmatrix} + B(y_\infty) \begin{pmatrix} \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} \\ \frac{d^{n-2}u}{dt^{n-2}} \\ \vdots \\ u \end{pmatrix}.$$

この方程式に対する特殊解は、

$$\begin{pmatrix} \frac{d^{n-1}\delta y}{dt^{n-1}}(t) \\ \frac{d^{n-2}\delta y}{dt^{n-2}}(t) \\ \vdots \\ \delta y(t) \end{pmatrix}$$

$$= \exp(tA(y_\infty)) \int_0^t \exp(-sA(y_\infty)) B(y_\infty) \begin{pmatrix} \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}(s) \\ \frac{d^{n-2}u}{dt^{n-2}}(s) \\ \vdots \\ u(s) \end{pmatrix} ds$$

となる。実際、物理リザバーがもつ平衡点の漸近安定性により、入出力関係式の平衡点は双曲型であるから、以下に示す、ハートマン・グロブマンの定理 [12] の意味で、この線形化は有効である。

定理 3 p を $\frac{dx}{dt} = f(x)$ の双曲型平衡点とする。また、 f の定める流れを φ^t と表す。このとき、 p の適当な近傍 U と同相写像、すなわち、1 対 1 かつ逆写像が連続である連続写像 $h: U \rightarrow U$ が存在し、初期値を y とする線形化方程式 $\frac{dx}{dt} = A(x-p)$, $x(0) = y$ の解 $p + \exp(At)(y-p)$ が U に含まれる限り $\varphi^t(h(x)) = h(p + \exp(At)(y-p))$ が成り立つ。

この定理は、双曲型の平衡点近傍において、 $\frac{dx}{dt} = f(x)$ 、及び、平衡点近傍における線形化である $\frac{dx}{dt} = A(x-p)$ の解が、1 対 1 の連続な写像により対応づけることを意味している。そのため、線形化方程式の挙動を解析することで、元の非線形な方程式の挙動を概ね把握することができる。さらに、漸近安定性により、入力を与えてから十分時間が経過したときの上記の解の挙動は、入出力関係式に微小な入力 $u(s)$ を与えたときの出力の挙動と対応づき、 $u(s)$ を上記のように変形したものが近似可能な関数の空間と考えられる。

3. 数値例

一般に、非線形微分方程式に対するグレブナー基底を計算すると、非常に長い式になるため、紙面の制限の都合上、ここでは、以下の 2 つの線形バネからなるシステムを用いてアイデアを説明する：

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x_1}{dt^2} &= -k(x_1 - l) + k(x_2 - x_1 - l) - \gamma \frac{dx_1}{dt} + u, \\ m \frac{d^2x_2}{dt^2} &= -k(x_2 - x_1 - l) - \gamma \frac{dx_2}{dt}, \\ y &= w_1x_1 + w_2x_2. \end{aligned}$$

l はバネの自然長であり、 k はばね定数である。 γ は減衰定数を、 m は質量を表す。この系に対してグレブナー基底を計算し、入出力関係式を求めると以下ようになる：

$$\begin{aligned} m^2 \frac{d^4y}{dt^4} + 2m\gamma \frac{d^3y}{dt^3} + (2km + \gamma^2) \frac{d^2y}{dt^2} + 3k\gamma \frac{dy}{dt} + k^2y \\ = w_1((m \frac{d^2u}{dt^2} + \gamma \frac{du}{dt} + ku) + k^2l) + w_2(ku + 2k^2l). \end{aligned}$$

この系の定常状態は $x_1 = l$, $x_2 = 2l$, 従って $y = lw_1 + 2lw_2$

である. $y = \delta y + lw_1 + 2lw_2$ とおくと, 以下の方程式を得る:

$$m^2 \frac{d^4 \delta y}{dt^4} + 2m\gamma \frac{d^3 \delta y}{dt^3} + (2km + \gamma^2) \frac{d^2 \delta y}{dt^2} + 3k\gamma \frac{d \delta y}{dt} = w_1 \left(m \frac{d^2 u}{dt^2} + \gamma \frac{du}{dt} + ku \right) + w_2 ku.$$

これを行列を用いて書き換えると

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \frac{d^3 \delta y}{dt^3} \\ \frac{d^2 \delta y}{dt^2} \\ \frac{d \delta y}{dt} \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2\gamma}{m} & -\left(\frac{2k}{m} + \frac{\gamma^2}{m^2}\right) & -\frac{3k}{m} \frac{\gamma}{m} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d^3 \delta y}{dt^3} \\ \frac{d^2 \delta y}{dt^2} \\ \frac{d \delta y}{dt} \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{w_1}{m} & \frac{w_1}{m} \frac{\gamma}{m} & \frac{w_1}{m} \frac{k}{m} + \frac{w_2}{m} \frac{k}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d^2 u}{dt^2} \\ \frac{du}{dt} \\ u \end{pmatrix}.$$

これは, 以下の3変数の微分方程式と等価である:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \frac{d^3 \delta y}{dt^3} \\ \frac{d^2 \delta y}{dt^2} \\ \frac{d \delta y}{dt} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \frac{d^3 \delta y}{dt^3} \\ \frac{d^2 \delta y}{dt^2} \\ \frac{d \delta y}{dt} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \frac{d^2 u}{dt^2} \\ \frac{du}{dt} \\ u \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2\gamma}{m} & -\left(\frac{2k}{m} + \frac{\gamma^2}{m^2}\right) & -\frac{3k}{m} \frac{\gamma}{m} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{w_1}{m} & \frac{w_1}{m} \frac{\gamma}{m} & \frac{w_1}{m} \frac{k}{m} + \frac{w_2}{m} \frac{k}{m} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

したがって, 2つの線形バネからなる物理リザバーが出力する関数は,

$$\exp(tA) \int_0^t \exp(-sA) B \begin{pmatrix} \frac{d^2 u}{dt^2} \\ \frac{du}{dt} \\ u \end{pmatrix} ds$$

と近似できる. $m = 1, k = 1$ に固定し, 様々な γ に対して行列 A の固有値を計算したものを図1に示す. 行列のサイズは3であるため, 一般に, 行列 A は3つの複素固有値をもつ. γ の値が小さいときには, 減衰力が弱いので, 振動を表す, 虚軸付近の固有値が求まるが, γ が大きくなると, 振動はおこらなくなる. 従って, 近似したい関数の振動の様子に合わせ, 振動成分をもつ関数を近似したい場合には γ の値が小さいほうが, そうでない場合には大きいほうが好ましいと考えられる.

4. まとめ

本論文では, 状態空間モデルとしてモデル化された系に

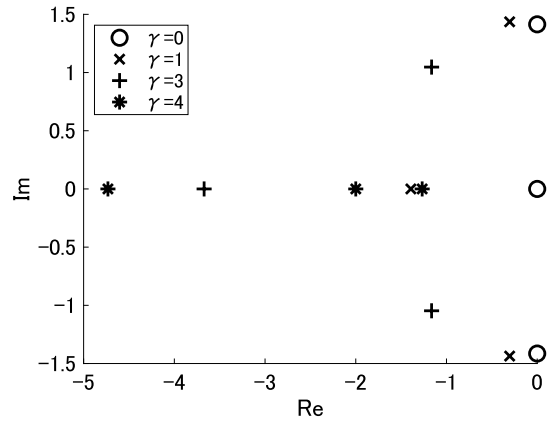


図1 $m = 1, k = 1$ と固定したもとの, ダンパー係数 γ を 0,1,3,4 と変化した線形バネ系に対する行列 A の固有値.

Fig. 1 The eigenvalues of the matrix A for linear spring systems for various damping factor γ with m and k fixed to $m = 1$ and $k = 1$.

対し, これを物理リザバーコンピューティングに用いた場合の計算能力を評価する, 微分代数的な方法を提案した. 提案手法は, システム解析, 特に, モデル同定可能性解析で用いられる入出力関係式を利用するものであり, まず, 微分代数のグレブナー基底を用いて入出力関係式を求める. 今回は, 無入力状態が続いた後の定常解を初期状態としたが, この場合, 入力を与えた際の入出力関係式の特解を解析することで, 物理リザバーが出力する関数が解析可能となる. 特に, 本稿では, 物理リザバーがもつ平衡点の漸近安定性を仮定し, 平衡解周りにおける, 入力を与えられたもとの入出力関係式を線形近似することで, 特殊解を具体的に解析し, 近似可能な関数の集合を特徴づけた. ここで, 物理リザバーが漸近安定な平衡点をもつという仮定から, 平衡点近傍において, 物理リザバーはエコーステート性をもつことが分かり. そのため, 入出力関係式の定常状態解析により, 物理リザバーが近似できる関数を評価することができることに注意されたい. また, 物理リザバーがもつ平衡点が双曲型であることから, ハートマンゴロブマンの定理より, 線形近似された系の解析により, 元の系の挙動が解析できることが保証されるため, この方法で十分な情報を得ることができる. なお, 紙面の制約上, 具体例としては線形モデルを用いたが, 同様の方法は, 理論的には, 多項式で表される限り, 非線形な系についても適用可能である.

また, 今回は, 十分時間が経過した後の状態が漸近安定な平衡解となることを仮定した. 平衡解以外のアトラクタが生じる場合や, 平衡点が非双曲型となる場合についての詳細な解析は今後の課題である.

謝辞 本研究は, JST さきがけ (JPMJPR15E7, JPMJPR16EC), JST CREST (JPMJCR1914), NEDO, 科研費 (JP18H05472, JP16KT0019, JP15K16076) などの支援を受けている.

参考文献

- [1] Bellman, R. and Astrom, K., J.: On structural Identifiability, *Math Biosci.*, Vol. 7, pp. 329–339 (1970).
- [2] George, T. T., Ansari, Y., Falotico, E. and Laschi, C., Control strategies for soft robotic manipulators: A survey. *Soft Robotics* 5(2): 149163(2018).
- [3] Hauser, H., Ijspeert, A. J., Fuchslin, R. N., Pfeifer, R. and Maass, W. Towards a theoretical foundation for morphological computation with compliant bodies, *Biol. Cybern.*, Vol. 105, pp.355–370 (2011).
- [4] Jaeger, H., The echo state approach to analysing and training recurrent neural networks-with an erratum note. Bonn, Germany: German National Research Center for Information Technology GMD Technical Report, 148(34): 13(2001).
- [5] Ljung, L., Glad, T.: On global identifiability for arbitrary model parametrizations, *Automatica*, Vol. 30, pp. 265–276 (1994).
- [6] Maass, W., Natschläger, T. and Markram, H., Real-time computing without stable states: A new framework for neural computation based on perturbations. *Neural Computation* 14(11): 25312560(2002) .
- [7] Meshkat, N., Rosen, Z. and Sullivant, S.: Algebraic tools for the analysis of state space models, *Adv. Stud. Pure Math.*, Vol. 77, pp. 171–205 (2018).
- [8] Nakajima, K., Hauser, H., Li, T. and Pfeifer, R., Exploiting the dynamics of soft materials for machine learning, *Soft Robotics* 5 (3): pp. 339-347, (2018).
- [9] Nakajima, K., Hauser, H., Li, T. and Pfeifer, R., Information processing via physical soft body, *Scientific Reports* 5: 10487, (2015).
- [10] Nakajima, K., Hauser, H., Li, T. and Pfeifer, R., Exploiting short-term memory in soft body dynamics as a computational resource, *Journal of the Royal Society Interface* 11(100): 20140437, (2014).
- [11] Ritt, J., F.: *Differential Algebra*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXIII, (1950).
- [12] クラーク ロビンソン (著), 國府寛司 (訳), 柴山健伸 (訳), 岡宏枝 (訳): *力学系 (上, 下)*, シュプリンガー・フェアラーク東京 (2001) .
- [13] Yildiz, I. B., Jaeger, H. and Kiebel, S. J., Re-visiting the echo state property. *Neural networks* 35: 19 (2012) .