Vol.2020-AL-176 No.4
2020/1/30

SAT ソルバーによる 複数の折り方を持つ箱の展開図の探索

只木 莉緒奈[1,a)]　天野 一幸[1,b)]

概要：単位正方形の辺を折って，箱を作ることができるポリオミノを展開図と呼ぶ．複数の折り方を持つ展開図が存在する．本稿では，そのような展開図を SAT ソルバーを用いて探索した．その結果，1 つの展開図から 5 通りの折り方をもつ展開図を発見した．

キーワード：展開図，SAT ソルバー，箱

Search for developments of a box with multiple foldings by SAT solver

Riona Tadaki[1,a)]　Kazuyuki Amano[1,b)]

Abstract: A polyomino is called a development if it can make a box by folding edges of unit squares forming the polyomino. It is known that there are developments that fold a box (or boxes) in multiple ways. In this work, we conducted a computer search for finding such developments by using a SAT solver. As a result, we found a thousand of such developments including a polyomino of area 52 that folds a box in 5 ways.

Keywords: development, SAT solver, box

1. 導入

ポリオミノとは，複数の正方形を辺でつなげた多角形である．辺に沿って折ると箱の形になるポリオミノがある．これを展開図と呼ぶ．**図 1** のように，1 つの展開図から異なる箱に折ることのできる展開図が存在する．このような展開図は多数発見されており，例えば，既存研究ではしらみつぶし探索によって，表面積 22 の 2 つの箱（$1 \times 1 \times 5$, $1 \times 2 \times 3$）を折る共通な展開図が 2263 個存在することがわかっている [1]．また，**図 2** のように，一つの展開図から 2 つ折り方で同じ箱を折る展開図が存在する [2]．図 1 と図 2 に示したポリオミノは同一のものであることから，実際には，この展開図は 3 つの折り方で箱を折ることができる (**図 3**)．箱の辺長が整数であり，4 個以上の折り方を持つ展開図は発見されていない（箱の展開図については，他にも例えば [4], [5] を参照)．

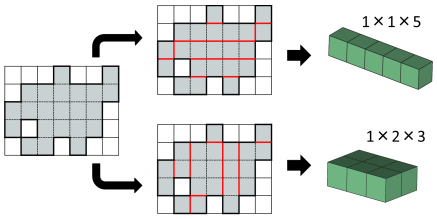

図 1　2 つの箱を折る展開図

本稿では，このような展開図を SAT ソルバを用いて探索した．その結果，複数の折り方を持つ数千の展開図が得られ，その中には，$1 \times 2 \times 8$ の箱を 5 通りに折ることのできる面積 52 の展開図も含まれる．

2. SAT ソルバー

SAT ソルバーとは，SAT 問題の充足可能性を判定するソフトウェアである．また，SAT 問題とは，与えられた命

1　群馬大学
Dept of Comput Sci, Gunma Univ, Tenjin 1-5-1, Kiryu, Gunma 376-8515, Japan
a)　t181d038@gunma-u.ac.jp
b)　amano@gunma-u.ac.jp

ⓒ 2020 Information Processing Society of Japan

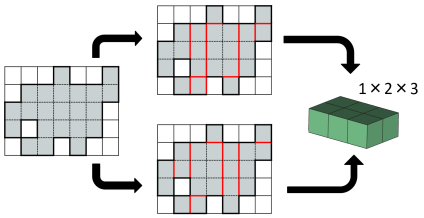

図 2　2 つの折り方を持つ展開図

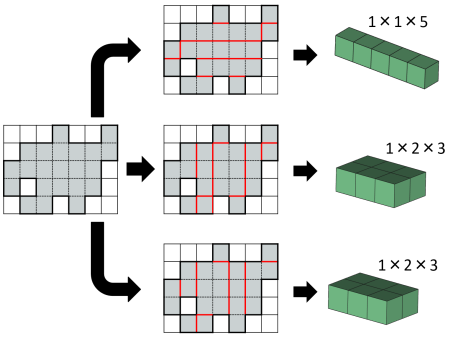

図 3　3 つの折り方を持つ展開図

題論理式を真にする値の割り当てが存在するか否かを判定する問題である．充足可能（SAT）ならば真偽値の割り当てを 1 つ出力し，充足不能（UNSAT) ならば UNSAT を出力する．

入力の論理式は基本的に連言標準形 (Conjunctive Nomal Form, CNF) で与える． CNF とは式 (1) のように，変数またはその否定であるリテラルを OR でつないだ節を，AND でつないだものである．

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee -x_3) \wedge (-x_2 \vee x_3) \qquad (1)$$

入力の標準的なフォーマットとしては DIMACS 形式が用いられる．例えば， CNF 式 (1) を DIMACS 形式で与えると以下のようになる．1 行目にはヘッダとして変数の数と節数を記述する．

```
p cnf 4 3
1 2 3 4 0
1 -3 0
-2 3 0
```

この CNF を代表的な SAT ソルバーである Minisat に入力として与えると，以下のような論理式全体が真となる値割り当てを 1 つ出力する．

```
SAT
1 -2 3 -4 0
```

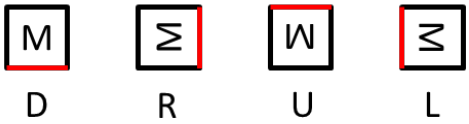

図 4　面を置く向き

3. 定式化

3.1 変数割り当て

本研究では「箱を切り開いて展開図にする」という問題を SAT 問題に変換するために，箱の辺や面に変数を割り当てる．以下では，命題変数 a が 1 (真) ならば a，0 (偽) ならば $-a$ と表記する．

まず，箱のどの辺を切るのかを決定するために，箱の単位正方形の各辺に対して 1 つの変数を割り当てる．ある辺に変数 e を割り当てるとき，辺を切るならば e，切らないならば $-e$ とする．

次に，展開図を作る盤面の変数を用意する．盤面 1 マスに箱の単位正方形の面 1 つが置かれるとする．盤面のあるマスに変数 i を割り当てるとき，単位正方形の面が置かれるならば i，置かれないならば $-i$ とする．

次に，1 つの単位正方形の面をどの向きで盤面のどのマスに置くかを変数にする．面の向きは図 4 に示す D, R, U, L の 4 通りとし，面 m を r の向きで盤面 i のマスに置くことを mi_r，置かないことを $-mi_r$ と表す．

3.2 隣接する面と辺の条件

面を展開図の形に盤面に配置するための制約条件を示す．**図 5** のように，面 m が辺 e を介して面 m' に隣接しているとする．i は i' に隣接している．切り離された面同士が隣接する状態を防ぐために，面 m をマス i に置きかつ辺 e を切るときに，i に隣接するマス i' には面を置かないという制約式 (2) を追加する．辺 e を 1 つ決めると，辺 e の方向にある i' が決まる．箱の全ての面の集合を M，全ての向きの集合を $\mathscr{R}(= \{D, R, U, L\})$，全ての盤面のマスの集合を I とする．

$$\forall_{m \in M} \forall_{i \in I} \forall_{r \in \mathscr{R}}, mi_r \wedge e \rightarrow -i' \qquad (2)$$

図 5 のように, 面 m が r の向きで辺 e を介して面 m' と r' の向きで隣接しているとする．辺 e を 1 つ決めると，辺 e の方向にある i' と r' が決まる．面 m を i のマスに置き，かつ辺 e を切らないならば，面 m' は i と隣接するマス i' に置かれる．この条件を式 (3)，式 (4) で追加する．

$$\forall_{m \in M} \forall_{i \in I} \forall_{r \in \mathscr{R}}, mi_r \wedge -e \rightarrow m'i'_{r'} \qquad (3)$$

$$\forall_{m \in M} \forall_{i \in I} \forall_{r \in \mathscr{R}}, mi_r \wedge -e \rightarrow i' \qquad (4)$$

ⓒ 2020 Information Processing Society of Japan

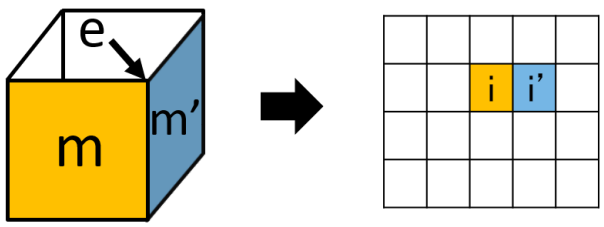

図 5　面と盤面の対応

3.3　盤面の制約

盤面上に正しい展開図を作るために追加する制約を示す．

$$\forall_{m\in M},\ \sum_{i\in I, r\in\mathscr{R}} mi_r = 1 \tag{5}$$

$$\forall_{i\in I},\ \sum_{m\in M, r\in\mathscr{R}} mi_r \leq 1 \tag{6}$$

$$\forall_{i\in I}, i \leftrightarrow \bigvee_{m\in M, r\in\mathscr{R}} mi_r \tag{7}$$

式 (5) は面 m が盤面に 1 マスだけ置かれるための条件，式 (6) は i のマスに置かれる面は 1 個以下である条件，式 (7) は盤面 i と変数 mi_r の対応付けである．

以下に示す式は，展開図の一部が切り離されてしまうことを防ぎ，展開図が 1 つに繋がるための条件である．盤面のマスに仮想的な時刻を与えて実装する．$t \in \{0, 1, \ldots, d\}$ として，i_t は時刻 t のマス i，I はすべての盤面のマスの集合，S_i はマス i に接続するマスの集合 (マス i を含む) である．d は中心からの距離であり，後述する．

$$\forall_{i\in I}, i_t \leftrightarrow i \wedge (\bigvee_{i'\in S_i} i'_{t-1})$$

$$\sum_{i\in I} i_{t=0} = 1$$

$$\forall_{i\in I}, i_{t=0} \rightarrow i$$

展開する箱が 1 個の場合，符号化の条件は以上である．この場合は単に指定した盤面内の大きさの展開図を得る．2 個の場合，共通な展開図を得るためには，それぞれの箱の展開図を示す盤面に対して状態を等しくする条件が必要である．したがって箱 1 の盤面 i のマスを i_1，箱 2 の i のマスを i_2 として式 (8) を追加する．

$$\forall_{i\in I}, i_1 \leftrightarrow i_2 \tag{8}$$

3 個の場合，式 (8) に加えて， 箱 3 の盤面 i のマスを i_3 として式 (9) を追加する．

$$\forall_{i\in I}, i_1 \leftrightarrow i_3 \tag{9}$$

本研究では 4 個以上の共通な展開図の探索は行っていないが，4 個以上の箱についても盤面が等しい条件を追加すれば探索は可能である．

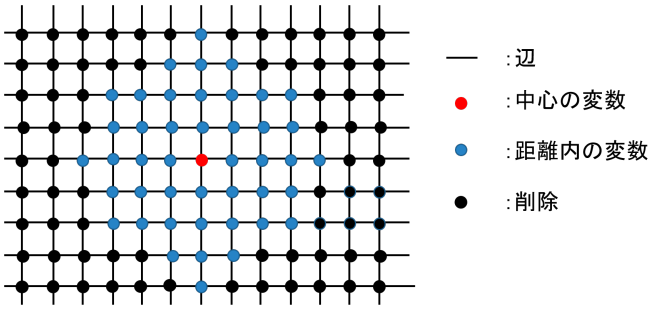

図 6　変数 mi_r

表 1　表面積 28 の入力

箱の大きさ	盤面の大きさ	距離
$1\times2\times4$	15×15	15
$1\times2\times4$		

表 2　表面積 28 の結果

箱の大きさ	折り方の数	個数
$1\times2\times4$ を 2 通り	2 通り	3376
$1\times2\times4$ を 3 通り	3 通り	428
$1\times2\times4$ を 4 通り	4 通り	11

表 3　表面積 40 の入力 1

箱の大きさ	盤面の大きさ	距離
$1\times2\times6$	15×15	15
$2\times2\times4$		

3.4　変数の削減

mi_r は（箱の表面積 × 盤面のマス数 × 向きの数）個の変数である．例えば，箱の表面積 22，盤面 15×15 の探索には 19800 個必要である．探索の高速化のために，この変数を削減する．mi_r は**図 6** のグラフのように, 4 つの辺を介して 4 つの変数に繋がっている．i が盤面の中央である変数 mi_r を 1 つ決め，中心とする．あらかじめ定めた d の値に従って，そこからの距離が d 以下である変数のみを，変数として採用する．

4.　結果

SAT ソルバーは SAT Competition 2017[3] の Parallel Track で好成績のソルバーを複数試し，高速であった plingeling を用いた．

盤面の中央に貼る面と向きをずらして探索すると，複数の折り方を持つ展開図が出力される．

入力を**表 1** として探索した結果が**表 2** である．$1\times2\times4$ の箱を 4 通り折る展開図の例を**図 7**，実際の折り方を**図 8** に示す．

入力を**表 3** として探索した結果が**表 4** である．$1\times2\times6$ の箱を 3 通り，$2\times2\times4$ の箱を 1 通り折る展開図の例を**図 9** に示す．

入力を**表 5** として探索した結果が**表 6** である．$1\times2\times6$ の箱を 4 通り折る展開図の例を**図 10** に示す．

ⓒ 2020 Information Processing Society of Japan

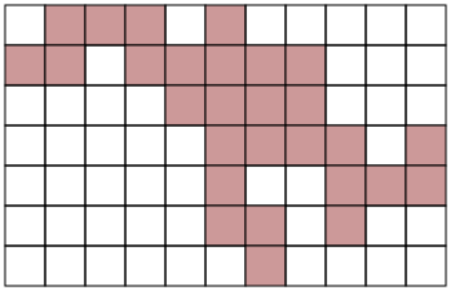

図 7　1 × 2 × 4 の箱を 4 通りに折れる展開図

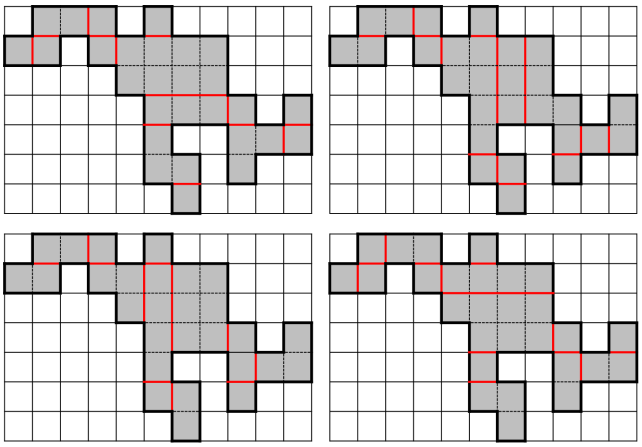

図 8　4 通りの箱の折り方

表 4　表面積 40 の結果 1

箱の大きさ	折り方の数	個数
1 × 2 × 6 を 1 通り，2 × 2 × 4 を 1 通り	2 通り	1947
1 × 2 × 6 を 2 通り，2 × 2 × 4 を 1 通り	3 通り	133
1 × 2 × 6 を 3 通り，2 × 2 × 4 を 1 通り	4 通り	1

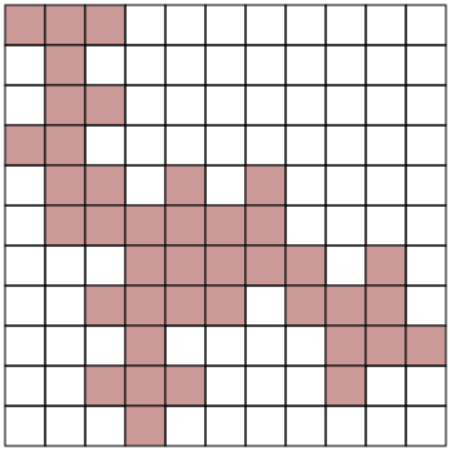

図 9　1 × 2 × 6 を 3 通り，2 × 2 × 4 を 1 通りの箱を折る展開図

入力を**表 7** として探索した結果が**表 8** である．探索では，回転・対称・平行移動された展開図を除いていないため，1 × 2 × 8 の箱を 5 通り折る 8 個の展開図が 1 種類であった．1 × 2 × 8 の箱を 5 通り折る展開図の例を**図 11** に示す．

表面積 52 のとき，探索する CNF の変数は約 17000 個，節数は約 1000000 個，ファイルサイズは約 20MB である．1 個の展開図の探索時間は 200s から 10000s 程度である．

表 5　表面積 40 の入力 2

箱の大きさ	盤面の大きさ	距離
1 × 2 × 6	15 × 15	15
1 × 2 × 6		

表 6　表面積 40 の結果 2

箱の大きさ	折り方の数	個数
1 × 2 × 6 を 2 通り	2 通り	1245
1 × 2 × 6 を 3 通り	3 通り	137
1 × 2 × 6 を 4 通り	4 通り	50

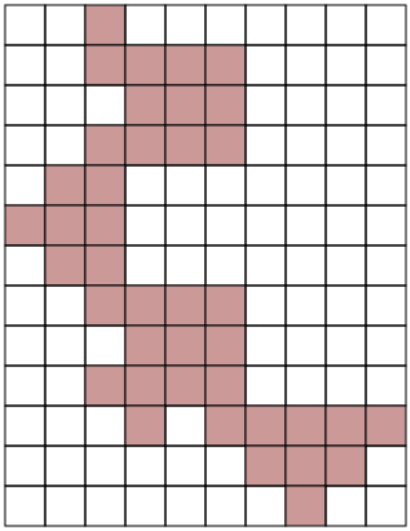

図 10　1 × 2 × 6 の箱を 4 通りに折れる展開図

表 7　表面積 52 の入力

箱の大きさ	盤面の大きさ	距離
1 × 2 × 8	15 × 15	15
1 × 2 × 8		

表 8　表面積 52 の結果

箱の大きさ	折り方の数	個数
1 × 2 × 8 を 2 通り	2 通り	1122
1 × 2 × 8 を 3 通り	3 通り	744
1 × 2 × 8 を 4 通り	4 通り	40
1 × 2 × 8 を 5 通り	5 通り	8（1 種類）

5. まとめと今後の課題

箱を展開図にするという問題を SAT 問題に帰着し，実際に展開図を得ることができた．また，1 × 2 × 8 の箱を 5 通りに折ることができる展開図を発見した．今後の課題として，得られた結果をもとに展開図の法則性などを解析し

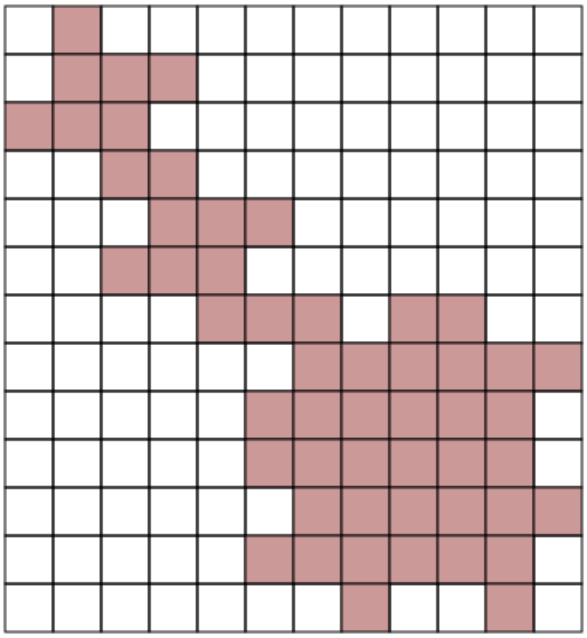

図 11 $1 \times 2 \times 8$ の箱を 5 通りに折れる展開図

ていきたい.

参考文献

[1] Zachary Abel, Erik Demaine, Martin Demaine, Hiroaki Matsui, Günter Rote, Ryuhei Uehara, Common Developments of Several Different Orthogonal Boxes, Proc. of the 23rd Canadian Conf. on Comput. Geometry (CCCG 2011), (2011) 77–82

[2] Koichi Mizunashi, Takashi Horiyama, Ryuhei Uehara, Efficient Algorithm for Box Folding, Proc. of the 13th Int. Conf. and Workshops on Algorithms and Computation (WALCOM 2019), (2019) 277–288

[3] SAT Competition 2017, `<https://baldur.iti.kit.edu/sat-competition-2017/>` (参照 2018-3-11)

[4] Toshihiro Shirakawa, Ryuhei Uehara, Common Developments of Three Incongruent Orthogonal Boxes, Int. J. Comput. Geometry Appl. 23(1), (2013) 65–71

[5] Ryuhei Uehara, A Survey and Recent Results about Common Developments of two or More Boxes, Proc. of the 6th Int. Meeting Origami in Sci., Math. and Educ. (OSME 2014), (2014) 77–84

ⓒ 2020 Information Processing Society of Japan