Vol.2020-AL-176 No.1
2020/1/29

構造的パラメータに関する最密部分グラフ問題の固定パラメータ容易性

土中 哲秀[1,a)]

概要：最密 k-部分グラフ問題とは，グラフ $G = (V, E)$ が与えられて，辺の本数が最大となる大きさ k の点部分集合 S の誘導部分グラフ $G[S]$ を見つける問題である．本稿では，最密 k-部分グラフ問題が近傍多様性とブロックグラフ消去数に関して固定パラメータ容易であることを示す．さらに，双子被覆数 $\mathtt{tc}$ に関して，2-近似 $2^{\mathtt{tc}/2}n^{O(1)}$-時間アルゴリズムを設計する．これは，[Bourgeois et al., *European Journal of Operational Research*, 2017] の 3-近似 $2^{\mathtt{vc}/2}n^{O(1)}$-時間アルゴリズムを改善する．ただし，$\mathtt{vc}$ は頂点被覆数である．

1. はじめに

最密 k-部分グラフ問題とは，グラフ $G = (V, E)$ が与えられて，辺の本数が最大となる大きさ k の点部分集合 S の誘導部分グラフ $G[S]$ を見つける問題である．グラフの中から密構造を抽出することは，グラフマイニングにおいて主要なトピックであり，様々な応用がある．例えば，社会ネットワークにおけるコミュニティ検出 [8] やタンパク質間相互作用ネットワークにおける分子錯体検出などが挙げられる [2].

最密 k-部分グラフ問題は k-クリーク問題を一般化したものであるため，NP 困難である [9]．また，弦グラフや最大次数 3 の 2 部グラフなど k-クリークを多項式時間で解けるグラフクラスでさえも NP 困難であることが知られている [7], [10]．一方，コグラフやスプリットグラフにおいては多項式時間で解ける．パラメータ化複雑性に関して，最密 k-部分グラフ問題は k に関して W[1] 困難である．一方，木幅 $\mathtt{tw}$ に関して，$2^{\mathtt{tw}(G)}n^{O(1)}$-時間アルゴリズムが存在する [5]．また，クリーク幅 $\mathtt{cw}$ に関しては，最密 k-部分グラフ問題は W[1] 困難であり，かつ指数時間仮説のもとで $2^{o(\mathtt{cw}(G)\log k)}n^{O(1)}$-時間で解くことができないことが証明されているが， $2^{O(\mathtt{cw}(G)\log k)}n^{O(1)}$-時間では解くことができる [6]．Bougeret らは，弦グラフにおいて，最密 k-部分グラフ問題は k に関して固定パラメータ容易であるが，$NP \subseteq coNP/poly$ でなければ多項式カーネルが存在しないことを示した [4].

近似可能性に関して， Kortsarz と Peleg は，$O(n^{0.3885})$-近似アルゴリズムを提案した [13]．その後，Feige，Kortsarz，Pele は，近似率を $O(n^{\delta})$ $(\delta < 1/3)$ に改善した [9]．現在最良の近似アルゴリズムは，Bhaskara らの $O(n^{1/4+\epsilon})$-近似アルゴリズムである [3]．しかしながら，最密 k-部分グラフ問題の近似可能性については，未だわかっていないことが多く，定数近似アルゴリズムが存在するかどうかすらも未解決である．

本稿では，最密 k-部分グラフ問題の固定パラメータ容易性について考察する．前述したように，木幅に関して最密 k-部分グラフ問題は固定パラメータ容易である一方，クリーク幅においては W[1] 困難である．本稿では，新たに，近傍多様性 (neighborhood diversity) とブロックグラフ消去数 (block graph deletion number) と呼ばれる構造的パラメータに関しても固定パラメータ容易であることを示す．

さらに，双子被覆数 (twin cover number)$\mathtt{tc}$ に関する 2-近似 $2^{\mathtt{tc}/2}n^{O(1)}$-時間アルゴリズムを設計する．任意のグラフにおいて，双子被覆数は頂点被覆数 (vertex cover number) 以下となるので，提案アルゴリズムは Bourgeois らが与えた 3-近似 $2^{\mathtt{vc}/2}n^{O(1)}$-時間アルゴリズムを改善する．

2. 準備

無向グラフを $G = (V, E)$ で表す．頂点部分集合 $S \subseteq V$ の誘導部分グラフを $G[S]$ とする．頂点 v に対して，v の隣接点の集合を $N(v)$，v の次数を $d(v)$ で表す．また，ベクトルと行列の転置を $\cdot^T$ で表す．

2.1 整数 2 次計画問題

整数 2 次計画問題は，$n \times n$ 整数対称行列 $\mathbf{Q}$，$m \times n$ 整数行列 $\mathbf{A}$，m-次元整数ベクトル $\mathbf{b}$ が与えられて，以下の

1 Chuo Univeristy
a) hanaka.91t@g.chuo-u.ac.jp

ⓒ 2020 Information Processing Society of Japan

最適化問題の最適解 $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$ を求める問題である．

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned} \tag{1}$$

ここで，α を Q と A の各値の絶対値の最大値とする．Lokshtanov は，n と α に関して整数 2 次計画問題が固定パラメータ容易であることを示した [15].

定理 1 ([15])**.** IQP (1) は，$f(n,\alpha)L^{O(1)}$-時間で解くことができる．ただし，f は計算可能な関数，L は入力インスタンスのビット表現の長さである．

以下の最適化問題は IQP (1) と等価である．

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} \\ \text{subject to} \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d} \\ & \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned} \tag{2}$$

ただし，$\mathbf{C}$ は整数行列，$\mathbf{d}$ は整数ベクトルである．[15] において，Lokshtanov は，IQP (2) が $f(n,m,\alpha,\Delta)L^{O(1)}$-時間で解けることを証明することにより定理 1 を示した．ただし，Δ は $\mathbf{C}$ の正方部分行列の行列式の最大絶対値である．

定理 2 ([15])**.** IQP (2) は $f(n,m,\alpha,\Delta)L^{O(1)}$-時間で解くことができる．

また， IQP (2) の目的関数は $\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{q}^T\mathbf{x}$ に一般化できることが知られている [15]．ただし，$\mathbf{q}$ は整数ベクトルである．

2.2 構造的パラメータ

2.2.1 近傍多様性

定義 1 ([14])**.** グラフ G の**近傍多様性** *(neighborhood diversity)* は，V を同じ隣接点集合を持つ点集合に分けたときの最小分割数のことを言い，nd で表される．分割における各点部分集合を**モジュール**という．

分割の定義より，各モジュールはクリークか独立集合となる．さらに，G において，2 つのモジュールの間には完全に辺が張られているか全く辺が張られないかのどちらかとなる．グラフが与えられて，その近傍多様性と対応する分割は線形時間で求めることができる [14], [16], [17].

2.2.2 ブロックグラフ消去数

それぞれの 2-連結成分がクリークであるようなグラフを**ブロックグラフ**という [12]．また，2-連結成分を**ブロック**と呼ぶ．

グラフ G の**ブロックグラフ消去集合** *(block graph deletion set)*S は，$G[V \setminus S]$ がブロックグラフとなるような点部分集合である．さらに，G の**ブロックグラフ消去数** *(block graph deletion number)* とは，G における最小のブロックグラフ消去集合の大きさであり，bd で表される．最小ブロックグラフ消去集合は，$4^{\mathtt{bd}}n^{O(1)}$-時間で計算できることが知られている [1].

2.2.3 双子被覆数

定義 2 ([11])**.** 2 点 u, v の隣接点が同じならば，u と v は**双子** *(twins)* であるという．もし，双子 u, v が辺 $\{u, v\}$ を持つなら，それらは**真双子** *(true twins)* と呼ばれる，グラフ G の点部分集合 X に対して，全ての辺 $\{u, v\} \in E$ が以下のいずれかを満たすとき，X は**双子被覆** *(twin cover)* であるという．

- $u \in X$ または $v \in X$,
- u, v が真双子である．

グラフ G の**双子被覆数** *(twin cover number)* は，最小双子被覆の大きさで定義され，tc で表される．

頂点被覆 *(vertex cover)*X は，全ての辺に対して少なくとも 1 つの端点が X に含まれているような点部分集合をいう．グラフ G の**頂点被覆数** *(vertex cover number)* は，最小頂点被覆の大きさで定義され，vc で表される．任意のグラフにおいて，頂点被覆は双子被覆であり，双子被覆はブロックグラフ消去集合であるから $\mathtt{bd} \leq \mathtt{tc} \leq \mathtt{vc}$ が成り立つ．

3. 固定パラメータ容易性

定理 3. 近傍多様性に関して，最密 k-部分グラフ問題は固定パラメータ容易である．

証明. [14], [16], [17] より，任意のグラフ G に対して，近傍多様性が nd である分割は線形時間で求めることができる．分割のそれぞれのモジュールを $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_{\mathtt{nd}}\}$ で表す．各モジュールに対して，変数 x_i を定義する．変数 x_i は M_i 内で解に含まれる頂点の数を表す．さらに，$m_i = |M_i|$ とする．一般性を失うことなく，クリークを形成するモジュールを $M_1, \ldots, M_p$，独立集合を形成するモジュールを $M_{p+1}, \ldots, M_{\mathtt{nd}}$ とする．すると，最密 k-部分グラフ問題は以下のような整数 2 次計画問題として定式化される．

$$\text{(IQP)} \left| \begin{aligned} \text{maximize} \quad & \sum_{i \neq j \in \{1,\ldots,\mathtt{nd}\}} x_i x_j + \sum_{i \in \{1,\ldots,p\}} \frac{x_i(x_i-1)}{2} \\ \text{subject to} \quad & \sum_{i \in \{1,\ldots,\mathtt{nd}\}} x_i = k \\ & 0 \leq x_i \leq m_i \qquad \forall i \in \{1,\ldots,\mathtt{nd}\} \\ & x_i \in \mathbb{Z} \qquad \forall i \in \{1,\ldots,\mathtt{nd}\} \end{aligned} \right.$$

目的関数の最初の項は，解が誘導する部分グラフにおけるモジュール間の辺数，第 2 項はモジュール内の辺数を表す．また，制約条件 $\sum_{i \in \{1,\ldots,\mathtt{nd}\}} x_i = k$ はサイズ制約である．

定理 2 を適用することによって，題意は示される． □

定理 4. ブロックグラフ消去数に関して，最密 k-部分グラフ問題は固定パラメータ容易である．特に，大きさ $\mathtt{bd}$ のブロックグラフ消去集合が与えられて，$2^{\mathtt{bd}}n^{O(1)}$-時間で最密 k-部分グラフ問題を解くことができる．

最後に，双子被覆数に関する FPT 近似アルゴリズムを与える．

定理 5. 最密 k-部分グラフ問題に対する 2-近似 $2^{\mathtt{tc}/2}n^{O(1)}$-時間アルゴリズムが存在する．

4. まとめ

本稿では，構造的パラメータに関する最密 k-部分グラフ問題の固定パラメータ容易性について考察した．本稿によって，最密 k-部分グラフ問題は近傍多様性とブロックグラフ消去数に関して固定パラメータ容易であることが示された．さらに，2-近似 $2^{\mathtt{tc}/2}n^{O(1)}$-時間アルゴリズムを提案することにより，Bourgeois らの 3-近似 $2^{\mathtt{vc}/2}n^{O(1)}$-時間アルゴリズムを改善した．

今後の研究として，他の構造的パラメータに関するパラメータ化複雑性やアルゴリズムの性能改善が挙げられる．

謝辞 本研究の一部は JSPS 科研費 JP19K21537 の助成を受けている．

参考文献

[1] Agrawal, A., Kolay, S., Lokshtanov, D. and Saurabh, S.: A Faster FPT Algorithm and a Smaller Kernel for Block Graph Vertex Deletion, *LATIN 2016*, Berlin, Heidelberg, Springer Berlin Heidelberg, pp. 1–13 (2016).

[2] Bader, G. D. and Hogue, C. W.: An automated method for finding molecular complexes in large protein interaction networks, *BMC bioinformatics*, Vol. 4, pp. 1 – 27 (2003).

[3] Bhaskara, A., Charikar, M., Chlamtac, E., Feige, U. and Vijayaraghavan, A.: Detecting High Log-densities: An $O(n^{\frac{1}{4}})$ Approximation for Densest K-subgraph, *STOC 2010*, pp. 201–210 (2010).

[4] Bougeret, M., Bousquet, N., Giroudeau, R. and Watrigant, R.: Parameterized Complexity of the Sparsest k-Subgraph Problem in Chordal Graphs, *SOFSEM 2014*, pp. 150–161 (2014).

[5] Bourgeois, N., Giannakos, A., Lucarelli, G., Milis, I. and Paschos, V. T.: Exact and superpolynomial approximation algorithms for the densest k-subgraph problem, *European Journal of Operational Research*, Vol. 262, No. 3, pp. 894 – 903 (2017).

[6] Broersma, H., Golovach, P. A. and Patel, V.: Tight complexity bounds for FPT subgraph problems parameterized by the clique-width, *Theoretical Computer Science*, Vol. 485, pp. 69 – 84 (2013).

[7] Corneil, D. and Perl, Y.: Clustering and domination in perfect graphs, *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 9, No. 1, pp. 27 – 39 (1984).

[8] Dourisboure, Y., Geraci, F. and Pellegrini, M.: Extraction and Classification of Dense Communities in the Web, *WWW 2017*, pp. 461–470 (2007).

[9] Feige, U., Peleg, D. and Kortsarz, G.: The Dense k-Subgraph Problem, *Algorithmica*, Vol. 29, No. 3, pp. 410–421 (2001).

[10] Feige, U. and Seltser, M.: On the Densest k-Subgraph Problem, *Technical report, Department of Applied Mathematics and Computer Science, The Weizmann Institute, Rehobot* (1997).

[11] Ganian, R.: Improving Vertex Cover as a Graph Parameter, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, Vol. Vol. 17 no.2, No. 2, pp. 77–100 (2015).

[12] Harary, F.: A characterization of block-graphs, *Canadian Mathematical Bulletin*, Vol. 6, No. 1, pp. 1–6 (1963).

[13] Kortsarz, G. and Peleg, D.: On choosing a dense subgraph, *FOCS 1993*, pp. 692–701 (1993).

[14] Lampis, M.: Algorithmic Meta-theorems for Restrictions of Treewidth, *Algorithmica*, Vol. 64, No. 1, pp. 19–37 (2012).

[15] Lokshtanov, D.: Parameterized Integer Quadratic Programming: Variables and Coefficients, *CoRR*, Vol. abs/1511.00310 (2015).

[16] McConnell, R. M. and Spinrad, J. P.: Modular decomposition and transitive orientation, *Discrete Mathematics*, Vol. 201, No. 1, pp. 189 – 241 (1999).

[17] Tedder, M., Corneil, D., Habib, M. and Paul, C.: Simpler Linear-Time Modular Decomposition Via Recursive Factorizing Permutations, *ICALP 2008*, pp. 634–645 (2008).

ⓒ 2020 Information Processing Society of Japan