

Kahan-Hirota-Kimura 型離散 3 波システムと QRT マッピング

高江 宥光^{1,a)} 高田 雅美^{2,b)} 木村 欣司^{3,c)} 中村 佳正^{1,d)}

概要: 可積分 3 波相互作用システムは、非線形光学やプラズマ物理などの分野に現れる偏微分方程式である。3 波システムから空間微分項を除去することにより、3 波常微分方程式 (ordinary differential equation, ODE) システムを得ることができる。Petrera らは、3 波 ODE システムにおいて Kahan-Hirota-Kimura 離散化を実行し、3 つの保存量を導出することに成功している。しかしながら、離散 3 波システムのラックス対およびその解はまだ得られていない。

本稿では、計算機代数を用いて、Kahan-Hirota-Kimura 型の離散 3 波システムの 3 つの保存量を導出する。さらに、離散化システムには、3 波 ODE システムのハミルトニアンに対応する特徴的な変数が存在することを示す。これは、Quispel-Roberts-Thompson(QRT) マッピングの中に現れる変数である。すなわち、連続の ODE システムのハミルトニアンに対応する離散 3 波 ODE システムにおける変数の解は、楕円関数を用いて表現できる。よって、連続の ODE システムのハミルトニアンに対応する変数の値は、解析的である。それにより、陰的レンゲクッタ法がもつ A 安定性以外の差分スキームの安定性を示すことができる。

A Discrete Three-wave System of Kahan-Hirota-Kimura Type and the QRT Mapping

1. はじめに

動的システムでは、システムの振る舞いを記述する動的システムモデルを構築することによって、自然現象などのシステムの様々な特性を調べることができる。よって、動的システムモデルとその解析は、科学と工学の発展に大きく貢献している。

システムが非線形である場合、保存量や厳密解などの顕著な性質を持つ特別なクラスの動的システムとして、可積分系がある。連続の可積分系の特性を保持したまま離散化された離散可積分系が注目されている。これらのシステムを理解することにより、ソリトン方程式と数値アルゴリズム

ムの間に密接な関係があることが確認されている。本稿では、離散 3 波システムの離散化を示す。

2. Kahan-Hirota-Kimura 型離散 3 波システム

本章では、Kahan-Hirota-Kimura 型離散 3 波システムについて説明する。

Petrera, Pfadler, Suris は、3 波常微分方程式システムの Kahan-Hirota-Kimura 離散化を実行することによって、Kahan-Hirota-Kimura 型離散 3 波システムを導入している [14]。

可積分 3 波相互作用システムは、非線形光学やプラズマ物理などの分野に現れる、良く知られた偏微分方程式である [2]。具体的には、次の偏微分方程式である：

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} + \alpha_1 \frac{\partial z_1}{\partial x} = \epsilon \bar{z}_2 \bar{z}_3, \quad (1)$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial t} + \alpha_2 \frac{\partial z_2}{\partial x} = \epsilon \bar{z}_3 \bar{z}_1, \quad (2)$$

$$\frac{\partial z_3}{\partial t} + \alpha_3 \frac{\partial z_3}{\partial x} = \epsilon \bar{z}_1 \bar{z}_2. \quad (3)$$

ここで、パラメータ $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$ と ϵ は、実数であり、

¹ 京都大学
Kyoto University, Kyoto, Kyoto 606-8501, JAPAN

² 奈良女子大学
Nara Women's University, Nara, Nara 630-8506, JAPAN

³ 福井大学
University of Fukui, Fukui, Fukui 910-8507, JAPAN

a) takae.yuukou.76c@st.kyoto-u.ac.jp

b) takata@ics.nara-wu.ac.jp

c) kkimur@u-fukui.ac.jp

d) ynaka@i.kyoto-u.ac.jp

$\bar{z}_i (i = 1, 2, 3)$ は, それぞれ, $z_i (i = 1, 2, 3)$ の複素共役を表す.

$$\frac{\partial z_i}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4)$$

の条件の下で, 3 波常微分方程式 (ordinary differential equation, ODE) システムを,

$$\frac{dz_1}{dt} = \bar{z}_2 \bar{z}_3, \quad \frac{dz_2}{dt} = \bar{z}_3 \bar{z}_1, \quad \frac{dz_3}{dt} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad (5)$$

と表す. 変数変換により,

$$w_1 = -\frac{z_1}{i}, \quad w_2 = -\frac{z_2}{i}, \quad w_3 = \frac{z_3}{i}, \quad (6)$$

となる. 式 (5) より, 3 波 ODE システムは,

$$\frac{dw_1}{dt} = i \bar{w}_2 \bar{w}_3, \quad \frac{dw_2}{dt} = i \bar{w}_3 \bar{w}_1, \quad \frac{dw_3}{dt} = i \bar{w}_1 \bar{w}_2, \quad (7)$$

と書き換えることができる.

$$w_i = x_i + i y_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (8)$$

を用いて, 式 (7) より

$$\frac{dx_i}{dt} = x_j y_k + y_j x_k, \quad (9)$$

$$\frac{dy_i}{dt} = x_j x_k - y_j y_k, \quad (10)$$

が得られる. ここで, 変数 (i, j, k) は, $(1, 2, 3)$ の巡回置換である. Kahan-Hirota-Kimura 型の離散化では,

$$\frac{(x_i^{n+1} - x_i^n)}{\delta} = x_j^n y_k^{n+1} + x_j^{n+1} y_k^n + y_j^n x_k^{n+1} + y_j^{n+1} x_k^n, \quad (11)$$

$$\frac{(y_i^{n+1} - y_i^n)}{\delta} = x_j^n x_k^{n+1} + x_j^{n+1} x_k^n - y_j^n y_k^{n+1} - y_j^{n+1} y_k^n, \quad (12)$$

と表される. 行列表現では,

$$A(x, y, \delta) \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^n \\ y^n \end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix} x^{n+1} \\ y^{n+1} \end{pmatrix} = A^{-1}(x, y, \delta) \begin{pmatrix} x^n \\ y^n \end{pmatrix}, \quad (13)$$

となる. ここで,

$$A(x, y, \delta) = \begin{pmatrix} 1 & -\delta y_3 & -\delta y_2 & 0 & -\delta x_3 & -\delta x_2 \\ -\delta y_3 & 1 & -\delta y_1 & -\delta x_3 & 0 & -\delta x_1 \\ -\delta y_2 & -\delta y_1 & 1 & -\delta x_2 & -\delta x_1 & 0 \\ 0 & -\delta x_3 & -\delta x_2 & 1 & -\delta y_3 & -\delta y_2 \\ -\delta x_3 & 0 & -\delta x_1 & -\delta y_3 & 1 & -\delta y_1 \\ -\delta x_2 & -\delta x_1 & 0 & -\delta y_2 & -\delta y_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

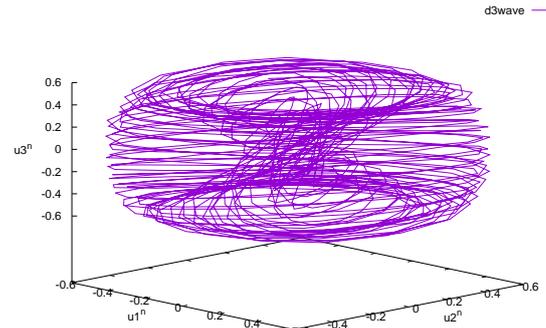


図 1 $(u_1^0, u_2^0, u_3^0) = (-0.36 + 0.26i, -0.28 + 0.51i, 0.52 + 0.118i)$ と $\delta = 0.1$ を初期値とする Kahan-Hirota-Kimura 型離散 3 波システムの軌道

である.

我々の目的は, 離散システムの解を得ることである. そこで,

$$u_1^n = 2y_1^n - 2i x_1^n, \quad (15)$$

$$v_1^n = 2y_1^n + 2i x_1^n, \quad (16)$$

$$u_2^n = 2y_2^n - 2i x_2^n, \quad (17)$$

$$v_2^n = 2y_2^n + 2i x_2^n, \quad (18)$$

$$u_3^n = -2y_3^n + 2i x_3^n, \quad (19)$$

$$v_3^n = -2y_3^n - 2i x_3^n, \quad (20)$$

を用いて, 式 (11) と (12) より,

$$(u_i^{n+1} - u_i^n) / \delta = (v_j^{n+1} v_k^n + v_j^n v_k^{n+1}) / 2, \quad (21)$$

$$(v_i^{n+1} - v_i^n) / \delta = (u_j^{n+1} u_k^n + u_j^n u_k^{n+1}) / 2, \quad (22)$$

を得る. (i, j, k) は, $(1, 2, 3)$ の巡回置換である. ここで, $v_i^n (i = 1, 2, 3)$ を $u_i^n (i = 1, 2, 3)$ の複素共役とする. ゆえに, 式 (21), (22) を, Kahan-Hirota-Kimura の離散 3 波システムと呼ぶ.

3. 離散系と QRT 写像の関係

本章では, 離散 3 波システムの保存量を導入すると同時に, Kahan-Hirota-Kimura 型離散 3 波システムと Quispel-Roberts-Thompson(QRT) 写像の関係を示す.

式 (5) で表される 3 波 ODE システムでは, ハミルトニアン

$$r = z_1 z_2 z_3 - \bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3 \quad (23)$$

が保存されている. しかしながら, 離散 3 波システムの式 (21), (22) に関して

$$r^n = u_1^n u_2^n u_3^n - v_1^n v_2^n v_3^n \quad (24)$$

は, 保存量ではない. r^n に対する式より, Kahan-Hirota-

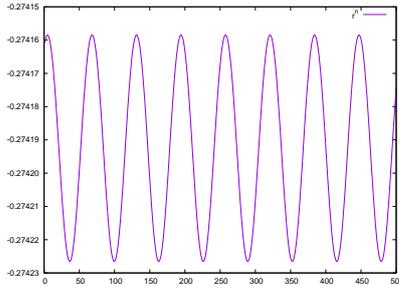


図 2 r^n のふるまい

Kimura 型離散 3 波システムは周期解を持つと予想できる。 a_i ($i = 0, \dots, 8$) を複素定数とすると、次の 2 次方程式

$$\begin{aligned} & a_0 (r^n)^2 (r^{n+1})^2 + a_1 (r^n)^2 r^{n+1} + a_2 r^n (r^{n+1})^2 \\ & + a_3 (r^n)^2 + a_4 (r^{n+1})^2 + a_5 r^n r^{n+1} + a_6 r^n \\ & + a_7 r^{n+1} + a_8 = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

を仮定する。初期値 u_i^0, v_i^0 ($i = 1, 2, 3$) とし、式 (21), (22), (24) から、時間変化 r^n ($i = 0, \dots, 9$) を計算し

$$\begin{aligned} & A_{1,1} = (r^0)^2 (r^1)^2, \quad A_{1,2} = (r^0)^2 r^1, \\ & A_{1,3} = r^0 (r^1)^2, \quad A_{1,4} = (r^0)^2, \\ & A_{1,5} = (r^1)^2, \quad A_{1,6} = r^0 r^1, \\ & A_{1,7} = r^0, \quad A_{1,8} = r^1, \\ & A_{1,9} = 1, \dots \\ & A_{9,1} = (r^8)^2 (r^9)^2, \quad A_{9,2} = (r^8)^2 r^9, \\ & A_{9,3} = r^8 (r^9)^2, \quad A_{9,4} = (r^8)^2, \\ & A_{9,5} = (r^9)^2, \quad A_{9,6} = r^8 r^9, \\ & A_{9,7} = r^8, \quad A_{9,8} = r^9, \\ & A_{9,9} = 1, \\ & \begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & A_{1,9} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{9,1} & \dots & A_{9,9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_8 \end{pmatrix} = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

を得る。これらの方程式は、自明ではない解を持つ。特に、

$$a_0 = 1, \quad a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0, \quad a_6 = a_7, \quad (27)$$

の場合、式 (25) は

$$(r^n)^2 (r^{n+1})^2 + a_5 r^n r^{n+1} + a_6 (r^n + r^{n+1}) + a_8 = 0, \quad (28)$$

となる。すなわち、 a_5, a_6, a_8 を適切に選択することによって、離散系の保存量が得られる。計算を単純にするために、

$$(r^n)^2 (r^{n-1} + r^{n+1}) + h_1 r^n + h_2 = 0, \quad (29)$$

のように、保存量を h_1 と h_2 とする。

$$(r^{n-1})^2 (r^n)^2 + a_5 r^{n-1} r^n + a_6 (r^{n-1} + r^n) + a_8 = 0, \quad (30)$$

とおき、式 (30) から式 (28) を減算し、さらに、 $h_1 = a_5$, $h_2 = a_6$ とすると、式 (29) が得られる。その結果、

$$(r^n)^2 (r^{n-1} + r^{n+1}) + h_1 r^n + h_2 = 0, \quad (31)$$

$$(r^{n+1})^2 (r^n + r^{n+2}) + h_1 r^{n+1} + h_2 = 0, \quad (32)$$

となる。 h_1 と h_2 は、 $r^{n-1}, r^n, r^{n+1}, r^{n+2}$ によって表される。さらに、計算機代数システム REDUCE を用いて

$$r^{n-1} = u_1^{n-1} u_2^{n-1} u_3^{n-1} - v_1^{n-1} v_2^{n-1} v_3^{n-1}, \quad (33)$$

$$r^n = u_1^n u_2^n u_3^n - v_1^n v_2^n v_3^n, \quad (34)$$

$$r^{n+1} = u_1^{n+1} u_2^{n+1} u_3^{n+1} - v_1^{n+1} v_2^{n+1} v_3^{n+1}, \quad (35)$$

$$r^{n+2} = u_1^{n+2} u_2^{n+2} u_3^{n+2} - v_1^{n+2} v_2^{n+2} v_3^{n+2}, \quad (36)$$

$$\frac{(u_1^n - u_1^{n-1})}{\delta} = \frac{(v_2^n v_3^{n-1} + v_3^n v_2^{n-1})}{2}, \quad (37)$$

$$\frac{(u_2^n - u_2^{n-1})}{\delta} = \frac{(v_3^n v_1^{n-1} + v_1^n v_3^{n-1})}{2}, \quad (38)$$

$$\frac{(u_3^n - u_3^{n-1})}{\delta} = \frac{(v_1^n v_2^{n-1} + v_2^n v_1^{n-1})}{2}, \quad (39)$$

$$\frac{(v_1^n - v_1^{n-1})}{\delta} = \frac{(u_2^n u_3^{n-1} + u_3^n u_2^{n-1})}{2}, \quad (40)$$

$$\frac{(v_2^n - v_2^{n-1})}{\delta} = \frac{(u_3^n u_1^{n-1} + u_1^n u_3^{n-1})}{2}, \quad (41)$$

$$\frac{(v_3^n - v_3^{n-1})}{\delta} = \frac{(u_1^n u_2^{n-1} + u_2^n u_1^{n-1})}{2}, \quad (42)$$

$$\frac{(u_1^{n+2} - u_1^{n+1})}{\delta} = \frac{(v_2^{n+2} v_3^{n+1} + v_3^{n+2} v_2^{n+1})}{2}, \quad (43)$$

$$\frac{(u_2^{n+2} - u_2^{n+1})}{\delta} = \frac{(v_3^{n+2} v_1^{n+1} + v_1^{n+2} v_3^{n+1})}{2}, \quad (44)$$

$$\frac{(u_3^{n+2} - u_3^{n+1})}{\delta} = \frac{(v_1^{n+2} v_2^{n+1} + v_2^{n+2} v_1^{n+1})}{2}, \quad (45)$$

$$\frac{(v_1^{n+2} - v_1^{n+1})}{\delta} = \frac{(u_2^{n+2} u_3^{n+1} + u_3^{n+2} u_2^{n+1})}{2}, \quad (46)$$

$$\frac{(v_2^{n+2} - v_2^{n+1})}{\delta} = \frac{(u_3^{n+2} u_1^{n+1} + u_1^{n+2} u_3^{n+1})}{2}, \quad (47)$$

$$\frac{(v_3^{n+2} - v_3^{n+1})}{\delta} = \frac{(u_1^{n+2} u_2^{n+1} + u_2^{n+2} u_1^{n+1})}{2}, \quad (48)$$

を計算し、 u_i^n ($i = 1, 2, 3$) と v_i^n ($i = 1, 2, 3$) の観点から h_1 と h_2 の明示的な表現を得る。

$$h_1 = \frac{2(-3(u_1^n)^6 (u_2^n)^2 (u_3^n)^2 (v_1^n)^4 + \dots)}{(u_1^n)^4 (v_1^n)^4 - 8(u_1^n) - 3u_2^n u_3^n (v_1^n)^3 v_2^n v_3^n + \dots} \quad (49)$$

$$= \frac{105 \text{ terms}}{42 \text{ terms}}, \quad (50)$$

$$h_2 = \frac{4((u_1^n)^9 (u_2^n)^3 (u_3^n)^3 (v_1^n)^6 - \dots)}{(u_1^n)^6 (v_1^n)^6 - 12(u_1^n)^5 u_2^n u_3^n (v_1^n)^5 v_2^n v_3^n + \dots} \quad (51)$$

$$= \frac{336 \text{ terms}}{106 \text{ terms}}. \quad (52)$$

計算代数 Risa/ASIR [17] に搭載されている Gröbner 基底を用いることによって, h_1 と h_2 が離散 3 波システムの式 (21), (22) の保存量であることを確認できる. G を離散 3 波 ODE システムの Gröbner 基底とし, h_1^n, h_2^n は保存量とする. その結果,

$$\text{Numerator} \left(h_1^{n+1} - h_1^n \right) \xrightarrow{*} 0, \quad (53)$$

$$\text{Numerator} \left(h_2^{n+1} - h_2^n \right) \xrightarrow{*} 0, \quad (54)$$

となる. 式 (29) は,

$$r^{n+1} = \frac{-h_1 r^n - h_2 - r^{n-1} (r^n)^2}{(r^n)^2}, \quad (55)$$

と表される. 式 (55) は,

$$f_1(r^n) = -h_1 r^n - h_2, \quad (56)$$

$$f_2(r^n) = (r^n)^2, \quad (57)$$

$$f_3(r^n) = 0, \quad (58)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (59)$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & h_2 \\ 0 & h_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (60)$$

の条件における QRT マッピング [15], [16] の特別な場合を満たす. このため, 変数 $r^n = u_1^n u_2^n u_3^n - v_1^n v_2^n v_3^n$ は, QRT マッピングの中に現れる変数である. QRT マッピングが楕円関数を用いて求積できる事実より, r^n の解は楕円関数で表現される.

Kahan-Hirota-Kimura の離散化では, 式 (23) の r の値を厳密には保持しない. しかしながら, Kahan-Hirota-Kimura の離散化によるハミルトニアンを離散化した式 (24) における r^n は, 楕円関数によって表現される.

4. まとめ

本稿では, 計算機代数を用いて, Kahan-Hirota-Kimura 型の離散 3 波システムの保存量を導出している. 変数 $r^n = u_1^n u_2^n u_3^n - v_1^n v_2^n v_3^n$ は, 連続の 3 波 ODE システムのハミルトニアンに対応する変数であり, r^n は, QRT マッピングの中に現れる変数でもある. QRT マッピングは, 楕円関数でパラメライズされるため, r^n は楕円関数によって求積される.

連続 3 波 ODE システムの解は, 超楕円関数によって表現できることが知られている. しかしながら, Kahan-Hirota-Kimura 型の離散 3 波システムと楕円関数の間には関係が見出されていない. これに対して, 本稿では, QRT マッピングを用いて関係性を示している.

今後の課題として, Kahan-Hirota-Kimura 型の離散 3 波システムの $u_i^n, v_i^n (i = 1, 2, 3)$ の解を求めることをあげる.

謝辞 本研究は JSPS 科研費 JP17H02858 と JP17H00167 の助成を受けたものです.

参考文献

- [1] Baxter, R.J.: Exactly Solved Models in Statistical Mechanics, *Academic Press*, London, (1982).
- [2] Benney, D.J., and Newell, A.C.: *The propagation of nonlinear wave envelopes*, *J. Math. Phys.* 46, pp.133–139 (1967).
- [3] Celledoni, E., McLachlan, R.I., Owren, B., and Quispel, G.R.W.: *Geometric properties of Kahan's method*, *J. Phys. A: Math. Theor.* 46 2, 025201 (2013).
- [4] Fairlie, D.: *An elegant integrable system*, *Phys. Lett. A* 119, p.438 (1987).
- [5] Hairer, E., and Wanner, G.: Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems (second ed.), *Springer Verlag*, Berlin, (1996).
- [6] Hirota, R.: *Exact Solution of the Korteweg-de Vries equation for multiple collisions of solitons*, *Phys. Rev. Lett.* 27, p.1192 (1971).
- [7] Hirota, R., and Kimura, K.: *Discretization of the Euler top*, *J. Phys. Soc. Jpn.* 69 3, pp.627–630 (2000).
- [8] Hirota, R., and Yahagi, H.: *Recurrence Equations, An Integrable System*, *J. Phys. Soc. Jpn.* 71, pp.2867–2872 (2002).
- [9] Iatrou, A., and Roberts, J.A.G.: *Integrable mappings of the plane preserving biquadratic invariant curves II*, *Nonlinearity* 15, pp.4599–489 (2002).
- [10] Ivanov, R.: *Hamiltonian formulation and integrability of a complex symmetric nonlinear system*, *Phys. Lett. A* 350, pp.232–235 (2006).
- [11] Kahan, W.: Unconventional numerical methods for trajectory calculations, Unpublished lecture notes (1993).
- [12] Kahan, W., and R.-C. Li: *Unconventional schemes for a class of ordinary differential equations with applications to the Korteweg de Vries equation*, *J. Comput. Phys.* 134 2, pp.316–331 (1997).
- [13] Kimura, K., and Hirota, R.: *Discretization of the Lagrange top*, *J. Phys. Soc. Jpn.* 69 10, pp.3193–3199 (2000).
- [14] Petrer, M., Pfadler, A., and Suris, Y.B.: *On integrability of Hirota-Kimura type discretization*, *Regular Chaotic Dyn.* 16, pp.245–289 (2011).
- [15] Quispel, G.R.W., Roberts, J.A.G., and Thompson, C.J.: *Integrable mappings and soliton equations*, *Phys. Lett. A* 126, pp.419–421 (1988).
- [16] Quispel, G.R.W., Roberts J.A.G., and Thompson, C.J.: *Integrable mappings and soliton equations II*, *Physica. D* 34, pp.183–192 (1989).
- [17] <<http://www.math.kobe-u.ac.jp/Asir/>>
- [18] <<https://reduce-algebra.sourceforge.io/>>