



Stam, J. : Stable Fluids

Proc. ACM SIGGRAPH 1999, pp.121-128 (1999)

CG における流体アニメーション

水や煙など、CG による流体アニメーションは Navier-Stokes 方程式 (NS 方程式) と呼ばれる物理方程式を数値解析して表現される。しかし、この方程式は数値的安定性に問題があり、適切な条件で計算を行わなければ、計算が発散してしまう。表題の論文は、この問題を解決し、常に安定な計算を行える画期的な方法を提案している。映画等で見られる CG による流体アニメーションにはこの技術が少なからず貢献しており、著者の Jos Stam 氏は 2008 年にアカデミー賞 (技術部門) を受賞している。

CG では非圧縮性の NS 方程式を解析する (図-1)。運動方程式と質量保存の 2 つの式から

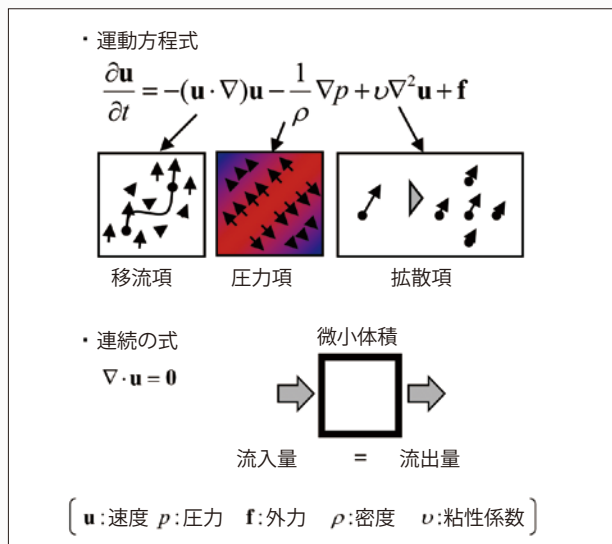


図-1 非圧縮性 Navier-Stokes 方程式とその意味

構成されている。運動方程式の左辺は流体の加速度、右辺は流れに沿って流体自身が移動する移流項、圧力の高い方から低い方へと流体が移動する圧力項、粘性によって速度が拡散する拡散項、そして、重力などの外力項の 4 つの項からなる。質量保存の式は、ある領域に流入する流体と流出する流体の量が等しくなることを表す。

この方程式の数値解法として、差分法が多用されている。解析空間に格子を設定し、空間微分は隣同士の格子点の値の引き算に、時間微分は離散的な時間を考えて次の時刻と現在の時刻の値の引き算に置き換える。ただし、安定に計算するためには、格子点の間隔と離散時間の間隔 (タイムステップ) に関して、守らなければならない条件が存在する。平たくいえば、ある格子点の値が次の時刻に隣の格子点を飛び越えて移流したり拡散したりすることが起きないようにしなければならない。手っ取り早くこの条件を守るには、タイムステップを十分短く取ればよいが、そうすると計算コストが増大してしまう。表題の論文は、セミ・ラグランジュ法と陰解法を導入することで、無条件に安定に計算が行える方法を提示している。

Stable Fluids Solver

Stam 氏の開発した Stable Fluids Solver は、NS 方程式を 4 つのステップに分けて計算する。第 1 ステップは外力のみ、第 2 ステップは移流項

のみ、第3ステップは拡散項のみをそれぞれ考慮して速度場を更新し、そして、最後の第4ステップで圧力項と質量保存の式を連立させた方程式を解く。このうち、セミ・ラグランジュ法は第2ステップに、陰解法は第3ステップに用いられている。

セミ・ラグランジュ法では、格子を使うことをやめて、一時的に流体を粒子の集合で表現し、粒子を使って実際の流体のように移流を計算する。各格子点位置に仮想的な粒子を生成し、この粒子を現在の速度場に沿って時間をさかのぼるようにトレースする（バックトレース；図-2参照）。そして、バックトレースによって求められた仮想粒子の位置の速度を周りの格子点から補間により求める。この速度が仮想粒子のもとの位置に流れていくものと考え、次の時刻の速度としてコピーする。この処理は格子点間隔やタイムステップの大きさによらず、安定的に計算できる。

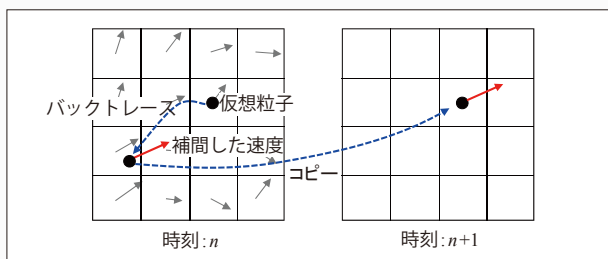


図-2 セミ・ラグランジュ法による移流処理

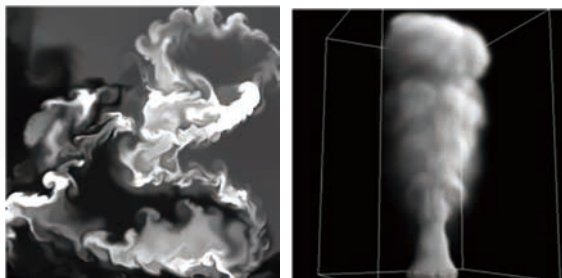


図-3 計算例

次に、第3ステップで用いられる陰解法について説明する。第3ステップは拡散方程式を数値的に解くことに相当する。多くの場合、各格子点の速度を更新する際、その周囲の格子点の速度は、現在得られている計算済みの速度を用いる。つまり、現在の状態から未来の状態を予測する。この場合、更新処理は簡単な加減算のみとなり、また、格子点ごとに独立に計算できるという利点がある反面、計算が不安定で発散しやすい。陰解法では、考え方を逆にし、各格子点の値に現在の時刻の値を用い、周囲の格子点の値を未知変数として扱う。これは、現在の値に一致するように、未来の値を決定するといえる。この場合、速度場の更新を行うためには、連立一次方程式を解く必要があるが、計算が発散することはない。

計算例

図-3は筆者がこの論文をもとに実装したプログラムでの計算例である。画質の悪さはともかく、手元のノートパソコンでもリアルタイムに本物らしく煙が動くのは見ていて飽きない。実装は非常に簡単でStam氏のWebページ (<http://www.dgp.toronto.edu/people/stam/>) にはサンプルコードも公開されているので、興味を持った読者は試してみていただきたい。

(2019年1月25日受付)

土橋宜典（正会員） doaba@ime.ist.hokudai.ac.jp

1997年広島大学大学院工学研究科博士課程後期修了。現在は北海道大学大学院情報科学研究科準教授。博士（工学）。コンピュータグラフィクスに関する研究に従事。