Vol.2019-GI-41 No.22
2019/3/9

不偏ゲームの必勝局面判定における2進展開の様々な利用

末續 鴻輝[1,a)]

概要：Nim に代表される不偏ゲームの必勝戦略解析には，2 進展開が欠かせない．Nim の排他的論理和 (XOR) を用いた必勝局面判定がよく知られているが，それ以外にも，ニム積と呼ばれる演算や Lim と呼ばれるゲームにおける必勝局面判定など，様々な形で局面のパラメータの 2 進展開が用いられる．本研究では，パラメータを 2 進展開し，その桁ごとの論理和 (OR) を取って，最下位ビットから何ビット 1 が連続しているかを調べることで，必勝局面判定に用いる G-value を求められるゲームについて紹介し，さらにその類型についても報告する．

1. はじめに

組合せゲーム理論は，偶然や運に左右されないゲームの数学的構造について研究する理論であり，これまで多くの成果が発表されている．また，[1], [2] など，本理論を紹介する書籍もいくつも出版されている．本研究では，2 人ゲームのみを研究する．

ゲームを，グラフを用いて表現することを考える．頂点をそれぞれの局面，有向辺を局面間で許された遷移と対応づけることで，ゲームの局面は有向木として表現することができる．このグラフを**ゲーム木**と呼ぶ．組合せゲームは，偶然や運の要素が存在しないため，ゲーム木全体の構造がわかれば，終了局面から再帰的に遡ることで，いずれのプレイヤに必勝局面が存在するかを判定することができる．しかし現実には，愚直にそのような手法を用いようとすると，計算時間や計算資源が膨大になり，現実的な時間で必勝戦略を判定できないことになる．そこで，盤面を表現するパラメータから必勝者を素早く計算する方法があるかどうかが，興味の対象となる．先手に必勝戦略が存在する局面を**先手必勝局面**，後手に必勝戦略が存在する局面を**後手必勝局面**と呼ぶことにする．

本研究では，必勝者判定にパラメータの 2 進展開を利用するゲームの先行研究を第 1 節で紹介する．第 2 節と第 3 節では，新たな 2 進数を利用した必勝者判定のできるゲームを定義し，その必勝者判定について紹介する．

1.1 Nim

1901 年，Bouton[3] は Nim と呼ばれるゲームの必勝性判定についての研究を発表した．数学的なゲームの解析研究としては，知られているものの中で最も古いものの一つである．

ゲーム 1 (Nim)**.** いくつかの石で構成される山が数山ある．プレイヤは，いずれかの山を選び，そこから好きなだけ石を取り去ってよい．最後の着手を行ったプレイヤが勝者である．

図 1 で，Nim の局面とプレイヤが山を選択する様子を表現した．また，Nim のゲーム木の例を，図 2 に示す．

Nim の局面を，それぞれの山の石の個数の対と同一視して表現する．すなわち，山が r 山あって，それぞれの石の個数が $n_1, n_2, \ldots, n_r$ であるとき，この局面を $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ と表現することとする．この局面が先手必勝局面か後手必勝局面であるかは，これらのパラメータの**排他的論理和**で簡単に求めることができる．

定義 1. 非負整数 a, b に対して，$a = \sum_i 2^i a_i, b = \sum_i 2^i b_i$ とする ($a_i, b_i \in \{0, 1\}$)．排他的論理和（ニム和，XOR）$\oplus$ を，以下のように定義する．桁数が足りないときは，適宜 0 を補う．

$$a \oplus b = \sum_i 2^i ((a_i + b_i) \bmod 2)$$

排他的論理和は結合律が成り立つので，三項以上の和も括弧を用いずに表記することとする．

例 1. $3 \oplus 6 = 11_2 \oplus 110_2 = 101_2 = 5$

例 2. $4 \oplus 5 \oplus 7 = 100_2 \oplus 101_2 \oplus 111_2 = 110_2 = 6$

排他的論理和は，以下の性質を持つ．

補題 1. $n_1 \oplus n_2 \oplus \cdots \oplus n_r = 0$ であるとする．任意の $n'_j \neq n_j$ について，$n_1 \oplus n_2 \oplus \cdots \oplus n_{j-1} \oplus n'_j \oplus n_{j+1} \oplus \cdots \oplus n_r \neq 0$ となる．また，$n_1 \oplus n_2 \oplus \cdots \oplus n_r \neq 0$ のとき，ある $n'_j < n_j$ が存在して，$n_1 \oplus n_2 \oplus \cdots \oplus n_{j-1} \oplus n'_j \oplus n_{j+1} \oplus \cdots \oplus n_r = 0$

1 京都大学大学院人間・環境学研究科
a) suetsugu.koki@gmail.com

ⓒ 2019 Information Processing Society of Japan

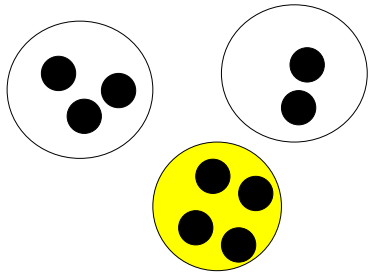

図 1　Nim の局面とプレイヤによる山の選択

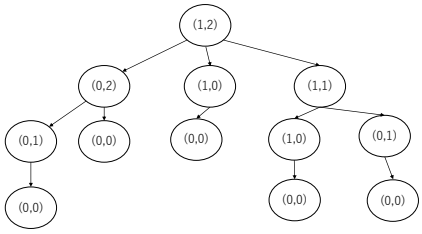

図 2　Nim の局面 $(1,2)$ のゲーム木

となる．

排他的論理和を用いて，Bouton の結果は，以下のように表される．

定理 1. Nim の局面 $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ において，$n_1 \oplus n_2 \oplus \cdots \oplus n_r = 0$ であるとき，かつその時に限り後手必勝局面である．

1.2　G-value

Nim のように，局面に対する可能な着手が，プレイヤによって異ならないゲームを**不偏**（*impartial*）**ゲーム**と呼ぶ．これに対し，囲碁や将棋のように，不偏ゲームではないゲームのことは**非不偏**（*partisan*）**ゲーム**と呼ばれる．また，最終着手者を勝者と定義するゲームは，**正規形**（*normal*）と呼ばれる．逆に，最終着手者を敗者と定義するゲームは，**逆形**（*misère*）と呼ばれる．以下では，正規形のゲームのみを扱うこととする．すなわち，各ゲームにおいては，最終着手者が勝者となる．

ここで，ゲーム同士の**和ゲーム**を定義する．

定義 2. 二つのゲームの局面 g と h に対して，g と h を並行にプレイするゲームを考える．すなわち，局面として g と h のペア (g, h) が与えられ，プレイヤは g に対する合法手を着手し，g のある次局面 g' と h のペア (g', h) へと全体を変えるか，h に対する合法手を着手し，h のある次局面 h' と g のペア (g, h') へと全体を変えるかのいずれかを行うゲームである．このようなゲームを，g と h の和ゲームと呼び，$g + h$ と表す．

ゲームの局面 g, h, j に対して，$(g + h) + j = g + (h + j)$ が成り立つ．従って，3 つ以上のゲームの和も，括弧を用いずに表す．

例 3. Nim の局面 $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ は，一山の Nim の局面の和ゲーム $(n_1) + (n_2) + \cdots + (n_r)$ であると考えることができる．

正規形不偏ゲームの和ゲームについては，構成成分それぞれの G-value と呼ばれるパラメータを調べることで，全体のゲームの性質を知ることが知られている．G-value は他に，Grundy 数，Sprague-Grundy 数，Nimber，エネルギーなどとも呼ばれている．以下に紹介する事実が，Sprague[4] と Grundy[5] によって，別々に見出された．

定義 3. 非負整数の集合 S を引数に，非負整数を返す関数 mex を以下のように定義する．ただし，$\mathbb{N}$ は非負整数全体の集合である．

$$\mathrm{mex}(S) = \min(\mathbb{N} \setminus S)$$

例 4. $\mathrm{mex}(\{0, 1, 3\}) = 2$

例 5. $\mathrm{mex}(\{1, 2, 3, 4, 6, 7\}) = 0$

定義 4. ゲームの局面 g に対して，G-value $G(g)$ を以下のように定義する．

$$G(g) = \begin{cases} 0 & (g \text{ が終了局面}) \\ \mathrm{mex}(\{G(g') \mid g' \text{は } g \text{ の次局面}\}) & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

定理 2. g が後手必勝局面であるとき，かつそのときに限り，

$$G(g) = 0$$

定理 3. 二つのゲームの局面 g と h について，以下が成り立つ．

$$G(g + h) = G(g) \oplus G(h)$$

本定理によって示されている通り，不偏ゲームの必勝性を判定する際に G-value は非常に重要な役割を果たす．

なお，例 3 にあるように，Nim の局面は一山 Nim の局面のゲーム和であると考えることができる．また，一山 Nim の局面の G-value は，定義と帰納法により，その山の石の個数となることが直ちに示せる．従って，以下が成り立つ．

定理 4. Nim の局面 $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ の G-value は $n_1 \oplus n_2 \oplus \cdots \oplus n_r$ となる．

以下では，様々な不偏ゲームについて，その必勝性の判定や，G-value の判定に，局面のパラメータの 2 進展開を用いる例を紹介する．

1.3　Moore's game

Moore's game，または Nim_k とは以下のようなゲームである．

ゲーム 2 (Nim_k)**.** いくつかの石で構成される山が数山あ

る．プレイヤは，任意に高々 k 山を選び，それぞれから好きなだけ石を取ってよい．ただし，合計で少なくとも一つは石を取らねばならない．

定義から明らかなように，Nim_1 は通常の Nim である．

Moore[6] が得た結果を記述するために，排他的論理和を拡張する．

定義 5. 文字列 $n_1 \oplus_m n_2 \oplus_m \cdots \oplus_m n_r$ とは，$n_1, n_2, \ldots, n_r$ をそれぞれ 2 進展開し，各桁を m を法として足した結果を上位桁から並べ，さらに，最初の連続する 0 を取り去った結果であると定義する．ただし，その結果が空文字列であるときには，$n_1 \oplus_m n_2 \oplus_m \cdots \oplus_m n_r = 0$ であるということとする．

例 6. $3 \oplus_3 5 \oplus_3 7 = 11_2 \oplus_3 101_2 \oplus_3 111_2 =$ ‘220’

例 7. $8 \oplus_4 9 \oplus_4 10 \oplus_4 11 = 1000_2 \oplus_4 1001_2 \oplus_4 1010_2 \oplus_4 1011_2 =$ ‘0022’ $=$ ‘22’

例 8. $3 \oplus_3 5 \oplus_3 6 \oplus_3 7 = 11_2 \oplus_3 101_2 \oplus_3 110_2 \oplus_3 111_2 =$ ‘000’ $= 0$

定理 5. Nim_k の局面 $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ が後手必勝局面となるのは，$n_1 \oplus_{k+1} n_2 \oplus_{k+1} \cdots \oplus_{k+1} n_r = 0$ であるとき，かつそのときに限る．

明らかに，この後手必勝局面判定は，Nim の結果の拡張である．しかし，この方法で一般に Moore’s game の G-value を求めることはできず，特殊な場合を除き，Moore’s game の局面からその G-value を求める方法は知られていない．

1.4 Nim 積

Nim の必勝者判定に用いられることから，排他的論理和は別名 *Nim* 和とも呼ばれる．代数的に見ると，非負整数の集合と Nim 和は群の要件を満たしている．ここに，更に *Nim* 積と呼ばれる演算を定義して，体にできることが知られている．Nim 積 $\otimes$ は以下のように再帰的に定義される．

定義 6. $a \otimes b = \mathrm{mex}(\{a' \otimes b \oplus a \otimes b' \oplus a' \otimes b' \mid 0 \le a' < a, 0 \le b' < b\})$

Nim 積は Conway[7] によって導入され，その後 Lenstra[8] の研究などでも調べられている．Nim 積を用いて必勝者判定を行うことができるゲームには，以下のようなゲームなどが知られている．

ゲーム 3 (2 次元ターニング・タートルズ)**.** $n \times m$ 個のコインが，横 n 個，縦 m 個長方形状に並べられており，それぞれのコインは表または裏を向いている．左下のコインの座標を $(1,1)$ とし，右上のコインの座標を (n,m) とする．プレイヤは自分の手番で，$1 \le a' \le a \le n$, $1 \le b' \le b \le m$ なる自然数 a, b, a', b' を選び，座標 $(a,b), (a',b), (a,b'), (a',b')$ にあるコインを裏返す．ただし，(a,b) のコインは，もともと表を向いていないといけない．

これ以降，$\sum^{\oplus}$ を，通常の $\sum$ における和の代わりに，排他的論理和を用いたものであるとする．

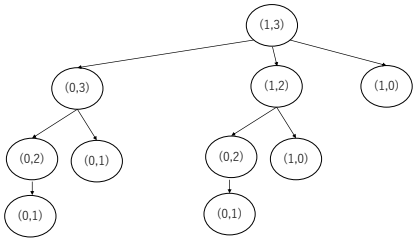

図 3 Welter=佐藤のゲームのゲーム木

定理 6. 2 次元ターニング・タートルズの局面で，表を向いているコインの座標が $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_r, b_r)$ とする．このとき，この局面の G-value は，

$$\sum_i^{\oplus} (a_i \otimes b_i)$$

となる．

ニム積についての詳細は，[1] の第 7 章，第 8 章や [2] の第 4 章 5 節，第 8 章 4 節などに詳しい．

1.5 Welter=佐藤のゲーム

Welter[9], [10] と佐藤 [11], [12], [13] は，それぞれ独自に，以下のゲームについて研究を行った．

ゲーム 4 (Welter=佐藤のゲーム)**.** いくつかの石でできた山が数山ある．Nim と同様に，プレイヤは一つの山を選び好きなだけ石を取る．ただし，取った結果，他の山と同じ個数になってはいけない．

Welter=佐藤のゲームは，マヤゲームなどとも呼ばれる．図 3 は，このゲームのゲーム木である．このゲームでは，いずれかの山の石がなくなったとしても，石数 0 の山があるとみなされるため，$(1,0)$ や $(0,1)$ が終了局面となっている．

定義 7. $M(x,y) = 2^{e+1} - 1$ ただし，$x \equiv y (\mathrm{mod}\ 2^e), x \not\equiv y (\mathrm{mod}\ 2^{e+1})$ と定義する．すなわち，x と y が下 e 桁まで一致しているとき，$M(x,y) = 2^{e+1} - 1$ とする．

例 9. $M(3,7) = M(11_2, 111_2) = 2^3 - 1 = 7$

例 10. $M(5,6) = M(101_2, 110_2) = 2^1 - 1 = 1$

定理 7. Welter=佐藤のゲームの局面 $(n_1, n_2, \ldots, n_r)$ の G-value は

$$\sum_i^{\oplus} n_i \oplus \sum_{i<j}^{\oplus} M(n_i, n_j)$$

となる．

1.6 Lim

Fink, Fraenkel, Santos[14] が示した以下のゲームについての定理は，各ビットの‘‘多数派’’ が鍵を握るという興味深い性質を持っている．

ゲーム 5 (Lim)**.** 3 つの山があり，プレイヤはそこから 2 つの山を選び，同数の石を取り除く．さらに，選ばなかった山に，一つの山から取り除いた個数と同じ個数の石を追加する．

着手により一部の山の石数を増やしているが，盤面全体で見れば，着手ごとに石が減少するので，このゲームは局面の反復なく終了する．

定理 8. Lim の局面 (a, b, c) について，その G-value は

$$\frac{1}{2}((a+b+c)-(a \oplus b \oplus c))$$

となる．

なお，$a = \sum_i 2^i a_i, b = \sum_i 2^i b_i, c = \sum_i 2^i c_i$ とする $(a_i, b_i, c_i \in \{0, 1\})$ とき，d_i を，a_i, b_i, c_i のなかに 2 つ以上 1 があれば $d_i = 1$，そうでなければ $d_i = 0$ と定義し，さらに $d = \sum_i 2^i d_i$ とすると，上記の G-value は d と等しい．

例 11. $G(3, 5, 5) = G(11_2, 101_2, 101_2) = 101_2 = 5$

例 12. $G(11, 6, 5) = G(1011_2, 110_2, 101_2) = 111_2 = 7$

1.7 CN(6.4)

次に円形 Nim（Circular Nim)，または CN(n, k) というゲーム [15] について紹介する．

ゲーム 6 (CN(n, k))**.** 円周上に n 個の山がある．プレイヤは連続する k 個の山を選び，そこから合計 1 個以上の石を取る．ここで，ゲームの途中でいずれかの山の石がなくなったとしても，石数 0 の山がそこにあるとみなされる．

CN$(n, 1)$ は通常の Nim である．CN(n, n) は一つの山の Nim であるとみなせる．CN$(n, n-1)$ は Moore's game と考えることができる．それ以外の場合について，一般的な理論は知られておらず，個別のいくつかの場合について後手必勝局面が求められている．このうち，CN$(6, 4)$ の後手必勝局面について，排他的論理和を利用する以下の事実が知られている．

定理 9. 局面の石の個数を円周の右回りに a, b, c, d, e, f とする．a をこの 6 数の最小値とする．後手必勝局面となるのは，$a + b = d + e$ かつ $b + c = e + f$ かつ $a \oplus c \oplus e = 0$ のとき，かつそのときに限る．

$a + b = d + e$ かつ $b + c = e + f$ から，$c + d = f + a$ も導かれることに注意されたい．

1.8 2^k-balanced Nimhoff

Fraenkel と Lorberbom[16] によって，以下の内容が示された．

ゲーム 7 (2^k-balanced Nimhoff)**.** いくつかの石でできた山が数山ある．プレイヤは，Nim と同様に，任意の山を選びそこから好きなだけ石を取るか，任意に二つ山を選び，それぞれから 2^k 個石を取る．ただし，k は最初に与えられる固定された正整数である．

定義 8. $a = \sum_i 2^i a_i, b = \sum_i 2^i b_i$ とする $(a_i, b_i \in \{0, 1\})$．

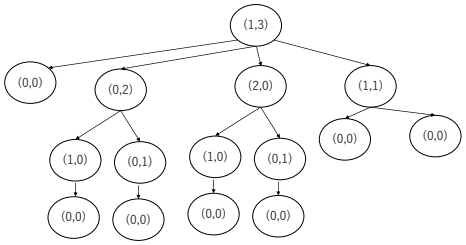

図 4 削除 Nim のゲーム木

k ニム和 ⓚ を以下のように定義する．

$$a ⓚ b = a \oplus b \oplus a_k b_k$$

例 13. $4②6 = 100_2 \oplus 110_2 \oplus (1 \times 1) = 11_2 = 3$

例 14. $13①3 = 1101_2 \oplus 11_2 \oplus (0 \times 1) = 1110_2 = 14$

k ニム和も結合律が成り立つ．従って，三項以上の場合も括弧を用いずに記述する．

定理 10. 2^k-balanced Nimhoff の局面 $(n_1, n_2, \cdots, n_r)$ の G-value は

$$n_1 ⓚ n_2 ⓚ \cdots ⓚ n_r$$

となる．

ここまで見てきたように，不偏ゲームの必勝判定や，G-value の計算には，実に様々な形で 2 進展開が利用される．以下では，新しい方法で 2 進展開を利用する二つのゲームを定義し，その性質を示す．

2. 削除 Nim

本研究においては，第一に以下のゲームについて考察する．

ゲーム 8 (削除 Nim)**.** 2 つの山がある．プレイヤはいずれかの山を選び，その山の石をすべて取り除く．残った山から石を一つ取り，そのあと好きなようにその山を 2 分割するか，そのまま残し，もう一つ石が 0 個の山ができたとみなす．

石の分割を許すゲームとしては，山から石を取り，残りの山を好きに分割する 8 **進ゲーム**がよく研究されているが，石を取らなかった方の山を削除する本研究はそれとは全く別物である．

このゲームのゲーム木を，図 4 に示す．

次に，削除 Nim の G-value を求める方法について紹介する．

定義 9. $tail(x)$ を，x を 2 進展開した際の，末尾に続く 1 の個数であると定義する．

例 15. $\mathrm{tail}(3) = \mathrm{tail}(11_2) = 2$

例 16. $\mathrm{tail}(10) = \mathrm{tail}(1010_2) = 0$

例 17. $\mathrm{tail}(21) = \mathrm{tail}(10101_2) = 1$

定義 10. 非負整数 a, b に対して，$a = \sum_i 2^i a_i, b = \sum_i 2^i b_i$ とする $(a_i, b_i \in \{0, 1\})$．論理和（OR)$\vee$ を，以下のように定義する．桁数が足りないときは，適宜 0 を補う．

$$a \vee b = \sum_i 2^i \max(\{a_i, b_i\})$$

例 18. $3 \vee 5 = 11_2 \vee 101_2 = 111_2 = 7$

例 19. $9 \vee 12 = 1001_2 \vee 1100_2 = 1101_2 = 13$

定理 11. 削除 Nim の局面 (a, b) に対して，その G-value は

$$\mathrm{tail}(a \vee b)$$

となる．

証明. $a = \sum_i 2^i a_i, b = \sum_i 2^i b_i$ とする $(a_i, b_i \in \{0, 1\})$．また，以下で定義する a', b' についても $a' = \sum_i 2^i a'_i, b' = \sum_i 2^i b'_i$ とする $(a'_i, b'_i \in \{0, 1\})$．

$h = \mathrm{tail}(a \vee b)$ とする．第一に，局面 (a, b) から遷移可能な局面 (a', b') で，$h = \mathrm{tail}(a' \vee b')$ となるような局面が存在しないことを背理法で示す．そのような局面 (a', b') が存在すると仮定する．

$h = 0$ のとき，a も b も偶数．従って，$a' + b'$ は奇数となるため，$\mathrm{tail}(a' \vee b') \neq 0$ となる．よって矛盾．

$h > 0$ のとき，条件より，$a'_h = b'_h = 0$ であり，さらに任意の $k < h$ に対して，$a'_k = 1$ または $b'_k = 1$ が成り立つ．従って，$2^h - 1 \leq ((a' + b') \bmod 2^{h+1}) \leq 2^{h+1} - 2$ が成立．ここから，$2^h \leq ((a' + b' + 1) \bmod 2^{h+1}) \leq 2^{h+1} - 1$ であるので，$a_h = 1$ または $b_h = 1$ となり矛盾する．

次に，任意の $h' < h$ について，局面 (a, b) から遷移可能なある局面 (a', b') が存在して，$h' = \mathrm{tail}(a' \vee b')$ となることを示す．$h = \mathrm{tail}(a \vee b)$ であるから，$a_{h'} = 1$ として一般性を失わない．$a' = a - (a \mod 2^{h'}) - 1, b' = a - a' - 1$ とすると，明らかに $a'_{h'} = 0, a_k = 1 (k < h')$．また，$b' = a - (a - (a \mod 2^{h'}) - 1) - 1 = a \mod 2^{h'}$ であるから，$b'_{h'} = 0$．よって，局面 (a', b') は (a, b) の次局面であり，かつ $h' = \mathrm{tail}(a' \vee b')$ を満たす． □

3. 皇帝 Nim

削除 Nim では，片方の山から石をすべて取り，残りの山からも一つ取るという着手があった．次に，より大きい構造について，似た動きを考える．

ゲーム 9 (皇帝 Nim)**.** いくつかの石でできた山が，さらにいくつか集まってできた山脈がある．プレイヤは，いずれかの山脈を選び，そこから，好きなように石を取り除いてよい．また，選ばなかった山脈それぞれについて，高々一つの山を選び，好きに石を取り除いてよい．

図 5 で，皇帝 Nim の局面と，プレイヤが山脈及び山を選択する様子を表現した．

本ゲームに皇帝 Nim と名付ける所以は，皇帝が‘‘王の王’’として捉えられることがあることに，‘‘山の山’’というべき山脈をなぞらえたものである．

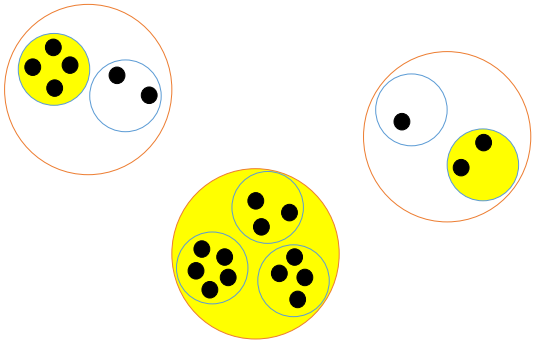

図 5 皇帝 Nim の局面とプレイヤによる山脈および山の選択

本ゲームの局面を，以下のように表記する．ここで，中括弧で囲われたそれぞれが，一つの山脈である．$(\{n_{1,1}, n_{1,2}, \ldots, n_{1,r_1}\}, \{n_{2,1}, n_{2,2}, \ldots, n_{2,r_2}\}, \ldots, \{n_{s,1}, n_{s,2}, \ldots, n_{s,r_s}\})$

このゲームに関する定理を証明する前に，二つの補題を示す．

補題 2. $n_1, n_2, \ldots, n_r$ が，$n_1 \oplus n_2 \oplus \cdots \oplus n_r = 0$ を満たし，かついずれかの数は 0 でないとする．このとき，ある $n'_1, n'_2, \ldots, n'_r$ が存在して，任意の j について $n'_j \leq n_j$ であり，かつ $n'_1 \oplus n'_2 \oplus \cdots \oplus n'_r = 0$ と $\sum_i n'_i = (\sum_i n_i) - 2$ が成り立つ．

証明. h を，任意の j について n_j が 2^h の倍数となる最大の h とする．このとき，ある j' が存在して，n'_j は 2^h の倍数であるが，2^{h+1} の倍数ではない．さらに，$n_1 \oplus n_2 \oplus \cdots \oplus n_r = 0$ が成り立っていたので，ある $j'' \neq j'$ も存在して，$n_{j''}$ は 2^h の倍数でありかつ，2^{h+1} の倍数ではない．このとき，$j \neq j', j''$ に対して $n'_j = n_j$ とし，さらに $n'_{j'} = n_{j'} - 1, n'_{j''} = n_{j''} - 1$ とすれば，$n'_1 \oplus n'_2 \oplus \cdots \oplus n'_r = 0$ と $\sum_i n'_i = (\sum_i n_i) - 2$ が成り立つ． □

この補題を再帰的に利用することで，以下の補題が示せる．

補題 3. $n_1, n_2, \ldots, n_r$ が，$n_1 \oplus n_2 \oplus \cdots \oplus n_r = 0$ を満たすとする．$2l \leq (\sum_i n_i)$ を満たす任意の l に対して，ある $n'_1, n'_2, \ldots, n'_r$ が存在して，任意の j について $n'_j \leq n_j$ であり，かつ $n'_1 \oplus n'_2 \oplus \cdots \oplus n'_r = 0$ と $\sum_i n'_i = (\sum_i n_i) - 2l$ が成り立つ．

定理 12. 局面 $(\{n_{1,1}, n_{1,2}, \ldots, n_{1,r_1}\}, \{n_{2,1}, n_{2,2}, \ldots, n_{2,r_2}\}, \ldots, \{n_{s,1}, n_{s,2}, \ldots, n_{s,r_s}\})$ は，以下の条件がすべて成り立つとき，かつそのときに限り，後手必勝局面となる．

$$n_{1,1} \oplus n_{1,2} \oplus \cdots \oplus n_{1,r_1} = 0$$
$$n_{2,1} \oplus n_{2,2} \oplus \cdots \oplus n_{2,r_2} = 0$$
$$\cdots$$
$$n_{s,1} \oplus n_{s,2} \oplus \cdots \oplus n_{s,r_s} = 0$$
$$(\sum_j n_{1,j}) \oplus (\sum_j n_{2,j}) \oplus \cdots \oplus (\sum_j n_{s,j}) = 0$$

上記の条件は，より単純に，$\sum_i (\sum_j^{\oplus} n_{i,j}) + \sum_i^{\oplus} (\sum_j n_{i.j}) = 0$ とも記述できる．

証明． 終了局面は，明らかに $\sum_i (\sum_j^{\oplus} n_{i,j}) + \sum_i^{\oplus} (\sum_j n_{i.j}) = 0$ を満たす．

第一に，局面 g が上記の条件を満たすときに，g の次局面 g' は，必ず上記の条件を満たさないことを示す．$g = (\{n_{1,1}, n_{1,2}, \ldots, n_{1,r_1}\}, \{n_{2,1}, n_{2,2}, \ldots, n_{2,r_2}\}, \ldots, \{n_{s,1}, n_{s,2}, \ldots, n_{s,r_s}\})$ から一手で移行できる局面 $g' = (\{n'_{1,1}, n'_{1,2}, \ldots, n'_{1,r_1}\}, \{n'_{2,1}, n'_{2,2}, \ldots, n'_{2,r_2}\}, \ldots, \{n'_{s,1}, n'_{s,2}, \ldots, n'_{s,r_s}\})$ について，$\sum_i (\sum_j^{\oplus} n'_{i,j}) \neq 0$ ならば，$\sum_i (\sum_j^{\oplus} n'_{i,j}) + \sum_i^{\oplus} (\sum_j n'_{i.j}) \neq 0$ となり，条件を満たさない．$\sum_i (\sum_j^{\oplus} n'_{i,j}) = 0$ とする．$n_{i,1} \oplus n_{i,2} \oplus \cdots \oplus n_{i,r_i} = 0$ に対して，$n'_{i,1} \oplus n'_{i,2} \oplus \cdots \oplus n'_{i,r_i} = 0$ かつ任意の j に対して $n'_{i,j} \leq n_{i,j}$ が成り立ち，しかもある j に対して $n'_{i,j} < n_{i,j}$ ならば，補題 1 より，少なくとも二つ以上の j_1, j_2 に対して $n'_{i,j_1} < n_{i,j_1}, n'_{i,j_2} < n_{i,j_2}$ が成り立たなければならない，そのことから，g' について，高々一つの i に対して，$\sum_j n'_{i.j} < \sum_j n_{i.j}$ である．しかし，その場合，補題 1 より，$\sum_i^{\oplus} (\sum_j n_{i.j}) \neq 0$ となる．

第二に，局面 g が上記の条件を満たさないとき，g の次局面 $g' = (\{n'_{1,1}, n'_{1,2}, \ldots, n'_{1,r_1}\}, \{n'_{2,1}, n'_{2,2}, \ldots, n'_{2,r_2}\}, \ldots, \{n'_{s,1}, n'_{s,2}, \ldots, n'_{s,r_s}\})$ で，上記の条件を満たすものが存在することを示す．まず，$\sum_i (\sum_j^{\oplus} n_{i,j}) \neq 0$ と仮定する．このとき，いくつかの i に対して，$\sum_j^{\oplus} n_{i,j} \neq 0$ である．補題 1 から，それぞれの i に対して，高々一つの j を選び，$n_{i,j}$ の値を減らすことで，その山脈のすべての山の石の個数の排他的論理和を 0 にすることができる．よって，$\sum_i (\sum_j^{\oplus} n_{i,j}) = 0$ の場合も含め，プレイヤは局面 g から，それぞれの山脈について高々一つの山から石を取るだけで，$\sum_i (\sum_j^{\oplus} n''_{i,j}) = 0$ となる局面 $g'' = (\{n''_{1,1}, n''_{1,2}, \ldots, n''_{1,r_1}\}, \{n''_{2,1}, n''_{2,2}, \ldots, n''_{2,r_2}\}, \ldots, \{n''_{s,1}, n''_{s,2}, \ldots, n''_{s,r_s}\})$ に移行することができる．皇帝 Nim のルールより，プレイヤはさらに，ある一つの山脈については，すべての山から石を取ってよかった．従って，局面 g'' から，ある山脈を選んで，そこから適当な数石を取ると，局面 g' に移行できることを示せばよい．$\sum_i^{\oplus} (\sum_j n''_{i,j}) = 0$ ならば，すでに条件は満たされているので，$\sum_i^{\oplus} (\sum_j n''_{i,j}) \neq 0$ と仮定する．このとき，補題 1 より，ある i' について，ある値 $x < \sum_j n''_{i,j}$ が存在して，$\sum_{i \neq i'}^{\oplus} (\sum_j n''_{i,j}) \oplus x = 0$ となる．ここで，任意の i について $\sum_j^{\oplus} n''_{i,j} = 0$ であるから，$\sum_j n''_{i,j}$ は偶数であり，従って $\sum_j^{\oplus} n''_{i,j} - x$ もまた偶数となる．よって，補題 3 より，g' への移行ができる着手が存在することが保証された． □

さらに，本理論は拡張することができる．証明は同様のため略す．

ゲーム 10 (k-皇帝 Nim)**.** いくつかの石でできた山が，さらにいくつか集まってできた山脈がある．プレイヤは，高々 k 個の山脈を選び，そこから，好きなように石を取り除いてよい．また，選ばなかった山脈それぞれについて，高々一つの山を選び，好きに石を取り除いてよい．

定理 13. 局面 $(\{n_{1,1}, n_{1,2}, \ldots, n_{1,r_1}\}, \{n_{2,1}, n_{2,2}, \ldots, n_{2,r_2}\}, \ldots, \{n_{s,1}, n_{s,2}, \ldots, n_{s,r_s}\})$ は，以下の条件がすべて成り立つとき，かつそのときに限り，後手必勝局面となる．

$$n_{1,1} \oplus n_{1,2} \oplus \cdots \oplus n_{1,r_1} = 0$$
$$n_{2,1} \oplus n_{2,2} \oplus \cdots \oplus n_{2,r_2} = 0$$
$$\cdots$$
$$n_{s,1} \oplus n_{s,2} \oplus \cdots \oplus n_{s,r_s} = 0$$
$$(\sum_j n_{1,j}) \oplus_{k+1} (\sum_j n_{2,j}) \oplus_{k+1} \cdots \oplus_{k+1} (\sum_j n_{s,j}) = 0$$

謝辞 第三章，皇帝 Nim に関して，東北大学助教の入江佑樹氏，および筑波大学大学院生の安福智明氏に示唆に富むご意見をいただいたことを，ここに深謝する．

参考文献

[1] 佐藤文広：石取りゲームの数学　ゲームと代数の不思議な関係，数学書房 (2014).
[2] Siegel, A. N.: *Combinatorial Game Theory*, Graduate studies in mathematics, Vol. 146, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (2013).
[3] Bouton, C. L.: Nim, a game with a complete mathematical theory, *Annals of Mathematics*, Vol. 3, No. 1/4, pp. 35–39 (1901).
[4] Sprague, R. P.: Über mathematische Kampfspiele, *Tôhoku Math. J.*, Vol. 41, pp. 438–444 (1935-36).
[5] Grundy, P. M.: Mathematics and games, *Eureka*, Vol. 2, pp. 6–9 (1939).
[6] Moore, E. H.: A generalization of the game called nim,

Annals of Mathematics, Vol. 11, No. 3, pp. 93–94 (1910).

[7] Conway, J. H.: *On numbers and games*, AK Peters/CRC Press, Natick, MA, second edition (2001).

[8] Lenstra Jr, H.: Nim multiplication, *Séminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux*, pp. 1–23 (1977).

[9] Welter, C. P.: The advancing operation in a special abelian group, *Indag. Math. (Proceedings)*, Vol. 55, No. 14, Elsevier, pp. 304–314 (1952).

[10] Welter, C. P.: The theory of a class of games on a sequence of squares, in terms of the advancing operation in a special group, *Indag. Math.*, Vol. 16, pp. 194–200 (1954).

[11] 佐藤幹夫（上野健爾記）：あるゲームについて，第 12 回代数分科会シンポジウム報告集，pp. 123–136 (1968).

[12] 榎本彦衛：Maya Game について（佐藤幹夫氏講義の記録）,『数学の歩み』15-1，pp. 73–84.

[13] 榎本彦衛：マヤゲームの数学的理論（佐藤幹夫氏講演），『計算機によるゲームとパズルの諸問題』, 数理解析研究所講究録 98，pp. 105–135 (1970).

[14] Fink, A., Fraenkel, A. S. and Santos, C.: LIM is not slim, *International Journal of Game Theory*, Vol. 43, No. 2, pp. 269–281 (2014).

[15] Dufour, M. and Heubach, S.: Circular nim games, *The Electronic Journal of Combinatorics*, Vol. 20, No. 2 (2013).

[16] Fraenkel, A. S. and Lorberbom, M.: Nimhoff games, *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, Vol. 58, No. 1, pp. 1–25 (1991).

ⓒ 2019 Information Processing Society of Japan