

ポリオミノの isohedral タイリング数の解析

佐藤大河* 天野一幸

1 概要

タイリング上のどの2つを選んでもそれらが同値であるタイリングは isohedral タイリング (図 1) と呼ばれており, Langerman[1] らは, ポリオミノが isohedral タイリング可能な条件を示している.

本研究では, ポリオミノに用いる正方形の数を N とし, まず $N = 17$ までのポリオミノの isohedral タイリングを全探索し, その結果から isohedral タイリングの 1 種である Type-1 reflection において, 1 つのポリオミノの取り得るタイリングの種類の最大数について考察した.

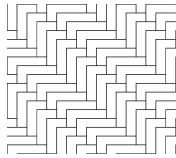


図 1: isohedral タイリング (Type-1 reflection) の例

2 導入

ポリオミノが isohedral タイリング可能かどうかは, ポリオミノの外周を文字列で表し, その文字列が特定の因数分解のパターンにあてはまるかどうかで判断することができる [1]. 本研究では, ポリオミノの外周を, 上下左右を表す $\{u, d, l, r\}$ の 4 文字を用いて表す. Type-1 reflection の因数分解はポリオミノの外周の文字列を W とすると, $W = ABf_{\Theta}B\hat{A}Cf_{\Phi}C$ (ただし, Θ, Φ は $-45^\circ, 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ のいずれか) となる. ここで, $f_{\Theta}X$ は, 文字列 X を x 軸から半時計回りに角度 Θ の直線で反射させて得られる文字を表す (例: $f_{-45^\circ}(r) = d$). また, $\hat{X}$ は, 文字列 X のバックトラック, つまり逆順にたどった文字列を表す (例: $X = rrurd$ ならば $\hat{X} = uldll$). 例として図 1 のタイリングにおけるポリオミノの文字列は, $W = rrrrdllldluu$ であり (図 2), Type-1 reflection の因数分解にあてはめると, $A = urrr, B = r, f_{-45^\circ}B = d, \hat{A} = llld, C = l, f_{-45^\circ}C = u$ となる.

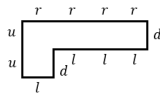


図 2: ポリオミノの外周の文字列

3 実験と結果

3.1 $N = 17$ までのポリオミノの Type-1 reflection の全探索

$N = 17$ までのポリオミノの外周を全て文字列化し, Type-1 reflection の因数分解を満たすかどうか全探索した結果は表 1 のようになった. なお, 総数はそれぞれの N での Type-1 reflection のタイリングの合計を表し, 最大数は, 1 つのポリオミノが持つ Type-1 reflection のタイリングの最大数を意味する.

表 1: $N = 17$ までのポリオミノの Type-1 reflection の探索結果

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
総数	1	2	3	11	12	49	43	181	210	666
最大数	1	2	2	3	2	4	2	3	3	4

N	11	12	13	14	15	16	17
総数	509	3399	1778	8897	13113	37471	23064
最大数	2	3	2	4	3	3	2

表 1 より, N の増加に従って Type-1 reflection の総数は増加するが, N の増加に関わらず最大数は 4 となっている. 1 つのポリオミノの Type-1 reflection の最大数が 4 となっている $N = 6, 10, 14$ のポリオミノを探索すると図 3 のような結果となった.

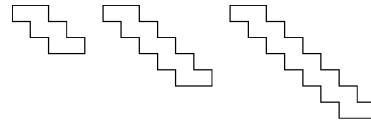


図 3: 1 つのポリオミノで Type-1 reflection を 4 つもつポリオミノ (左から $N = 6, 9, 14$)

Type-1 reflection の因数分解を, 例として図 3 の $N = 6$ のポリオミノに当てはめると, $W = rrrdrdrlllululu$ であるから, 4 種類の因数分解は,

1. $W = (r)(rdr)(drd)(l)(lul)(ulu)$ ($\Theta, \Phi = -45^\circ$)
2. $W = (drdrd)(l)(l)(ululu)(r)(r)$ ($\Theta, \Phi = 0^\circ$)
3. $W = (rdrdr)(d)(l)(lulul)(u)(r)$ ($\Theta, \Phi = 45^\circ$)
4. $W = (rdr)(dr)(dl)(lul)(ul)(ur)$ ($\Theta, \Phi = 90^\circ$)

のようになり, 1 つの角度に対して 1 種類の因数分解が対応する結果となった. $N = 10, 14$ の時の因数分解も同様に 1 つの角度に対して 1 種類の因数分解が対応した. $N = 6$ のポリオミノの実際のタイリングは図 4 のようになった.

*群馬大学大学院理工学府理工学専攻電子情報・数理教育プログラム
Mail:t171d044@gunma-u.ac.jp

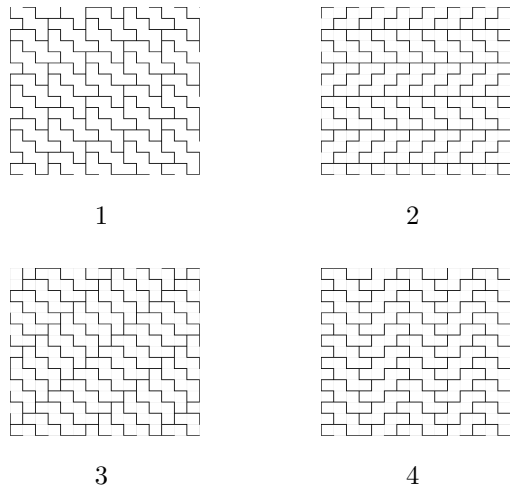


図 4: 図 3 の $N = 6$ の Type-1 reflection

3.2 Type-1 reflection の最大数の解析

実験 1 の結果から、次に 1 つのポリオミノ、1 つの角度に対して Type-1 reflection が最大何種類できるか考察した。 $N = 17$ までのポリオミノの Type-1 reflection の全探索により、1 つのポリオミノ、1 つの角度で Type-1 reflection の因数分解をもつものとして 2 種類できるものを発見した。それらは図 5 のようなパターンとなった。

①

B	$f_{\Theta}B$	$\bar{A}$	C	$f_{\Phi}C$	A
B	$f_{\Theta}B$	$\bar{A}$	C	$f_{\Phi}C$	A

$|B| = |C|$

②

B	$f_{\Theta}B$	$\bar{A}$	C	$f_{\Phi}C$	A
B	$f_{\Theta}B$	$\bar{A}$	C	$f_{\Phi}C$	A

$|B| = |C|$

③

B	$f_{\Theta}B$	$\bar{A}$	C	$f_{\Phi}C$	A
B	$f_{\Theta}B$	$\bar{A}$	C	$f_{\Phi}C$	A

$|B| \neq |C|$

図 5: 1 つのポリオミノ、1 つの角度で Type-1 reflection が 2 種類できるパターン

現在のところ、1 つのポリオミノ、1 つの角度で Type-1 reflection は最大 2 種類できると分かっているため、3 種類できると仮定すると、図 5 に現れる $B, f_{\Theta}B$ (または $C, f_{\Phi}C$) は図 6 のようなパターンとなる。

<table border="1"><tr><td>B</td><td>$f_{\Theta}B$</td></tr><tr><td>B</td><td>$f_{\Theta}B$</td></tr><tr><td>B</td><td>$f_{\Theta}B$</td></tr></table>	B	$f_{\Theta}B$	B	$f_{\Theta}B$	B	$f_{\Theta}B$	<table border="1"><tr><td>B</td><td>$f_{\Theta}B$</td></tr><tr><td>B</td><td>$f_{\Theta}B$</td></tr><tr><td>B</td><td>$f_{\Theta}B$</td></tr></table>	B	$f_{\Theta}B$	B	$f_{\Theta}B$	B	$f_{\Theta}B$
B	$f_{\Theta}B$												
B	$f_{\Theta}B$												
B	$f_{\Theta}B$												
B	$f_{\Theta}B$												
B	$f_{\Theta}B$												
B	$f_{\Theta}B$												

図 6: 1 つのポリオミノ、1 つの角度で Type-1 reflection が 3 種類できるときの $B, f_{\Theta}B$ (または $C, f_{\Phi}C$)

ここで、 $\hat{A}$ と A はバックトラックの関係であり、 $\hat{A}$ の先頭の文字は A の末尾の位置の文字と対応するため、 B の先頭の文字と $\hat{A}$ の先頭の文字は異なる文字でなければならない。例えば、 $\hat{A}$ の先頭の文字が r のとき A の末尾の位置の文字は l となるため、 B の先頭の文字も r であれば外周として成り立たない文字列になってしまうためである。また、3 種類とも $\hat{A}$ と A の対応を取るために、2 段目の $\hat{A}$ の先頭から 1 段目の $f_{\Theta}B$ の文字列と、その文字列の長さ分の 3 段目の $\hat{A}$ の先頭からの文字列が等しくなければならない (図 7)。



図 7: 1 つのポリオミノ、1 つの角度で Type-1 reflection が 3 種類できる条件

この 2 つの条件を図 6 の 2 パターンの $B, f_{\Theta}B$ (または $C, f_{\Phi}C$) に与え、取り得るパターンを探索した。図 6 の左のパターンでは 1 段目の $B, f_{\Theta}B$ (または $C, f_{\Phi}C$) の長さを L とすると、 $L=46$ まで探索でき、3 種類持つパターンは 0、図 6 の右のパターンでは $L=44$ まで探索でき、同じく 3 種類持つパターンは 0 という結果となった。

4 考察と今後の課題

実験の結果より、1 つのポリオミノ、1 つの角度で Type-1 reflection は 2 種類まで作成可能であることが予想される。これにより、角度が 4 種類あることから 1 つのポリオミノが取り得る Type-1 reflection の最大数は 8 であることが予想される。

今後の課題としては、 $N \geq 17$ のポリオミノの isohedral タイリングの探索、1 つのポリオミノの Type-1 reflection の最大数の証明、実験で発見したタイリングパターン以外の探索等が挙げられる。

参考文献

- [1] S. Langerman and A. Winslow, A quasilinear-time algorithm for tiling the plane isohedrally with a polyomino, Proc. of 32nd International Symposium on Computational Geometry (SoCG 2016), 50:1-50:15 (2016).