複数希望リスト安定結婚問題に対するNP完全性の改良

岡本 和也 [*]　宮崎 修一 [†]

1 はじめに

1.1 安定結婚問題

不完全リストを許す安定結婚問題（SMI）は，以下のように定義される．男性集合を U，女性集合を W とし，$|U| = |W|(= n)$ とする．また各男性は女性を，各女性は男性を好きな順に並べた**希望リスト**を持っている．希望リストは必ずしも異性全員を含む必要はない．全員の希望リストの集合を L と書き，人 p の L における希望リストを $L(p)$ と書く．p が q のリスト $L(q)$ に含まれている時，q は p を**受け入れ可能**という．p と q がお互いに受け入れ可能であるとき，(p, q) を**受け入れ可能ペア**と呼ぶ．

互いに受け入れ可能な男女ペアの集合で，各人が高々一度しか現れないものを**マッチング**と呼ぶ．マッチング M において男性 m と女性 w がペアになっているとき，すなわち $(m, w) \in M$ であるとき，$M(m) = w$ および $M(w) = m$ と書く．$(m, w) \in M$ であるような w が存在するとき，m は M で**マッチしている**といい，そのような w が存在しないとき，m は M で**独身である**という．女性についても独身という用語を同様に定義する．マッチング M に対し，以下の (i)〜(iii) を全て満たす (m, w) を L における M の**ブロッキングペア**という．(i) (m, w) は受け入れ可能ペアである，(ii) m は M で独身であるか，$M(m)$ より w が好きである，(iii) w は M で独身であるか，$M(w)$ より m が好きである．L における M のブロッキングペアが存在しないとき，M は L で**安定である**という．

SMI は，与えられた U, W, L から安定マッチングを求める問題である．任意の SMI 例題に，少なくとも一つの安定マッチングが存在することが知られている [3].

1.2 複数希望リスト安定結婚問題

本研究では，同じ男女集合に対して複数の希望リストが与えられるという SMI の拡張（「SMkI」と名付ける）を考える．k を正整数とするとき，SMkI の入力は $I = (U, W, L_1, L_2, \ldots, L_k)$ である．ここで，U と W はそれぞれ男性集合と女性集合，各 L_i は希望リストの集合である．SMkI は，全ての L_i で安定となるマッチング M（**共通安定マッチング**と呼ぶ）が存在するか否かを問う判定問題である．また，正整数 a, b に対し，男性の希望リストの長さが高々a，女性の希望リストの長さが高々b に制限された SMkI を (a, b)-SMkI と書く．対称性から，一般性を失うことなく $a \leq b$ とする．希望リストの長さに制限がない場合は，a や b を ∞ と書くことにする．

安定マッチングは入力サイズに対して指数個存在し得るので [5, 4, 7]，各 L_i に対して安定マッチングを列挙し全ての共通部分を求めるというアルゴリズムは，正しい答えを求めるものの多項式時間では動作しない．

著者らは最近，SMkI の計算複雑性に対して以下の結果を得た [6].

(1) 任意の $k \geq 2$ に対して $(4, 4)$-SMkI は NP 完全である．
(2) 任意の k に対して $(2, \infty)$-SMkI が $O(kn)$ 時間で解ける．

$k = 1$ の場合は通常の SMI と等価であり，答は常に yes であるためクラス P に属する．従って，$k \geq 2, \ell \geq 3$ に対する $(3, \ell)$-SMkI の複雑性が未解決となっていた．

1.3 本論文の成果

本稿では，文献 [6] の Theorem 1 の証明を変更することにより，任意の $k \geq 4$ に対して $(3, 4)$-SMkI が NP 完全であることを示す.

1.4 関連研究

本研究とは独立に，複数希望リストを取り扱う問題が最近 2 つ研究されている．Aziz ら [1] は不確実性を持つ希望リストに対して安定となる可能性の高いマッチングを求める問題を考察している．この中で，joint probability

*京都大学 医学部附属病院
†京都大学 学術情報メディアセンター

model という確率分布モデルの下で確率 1 で安定となるマッチングの存在を問う ExistsCertainlyStableMatching は我々の SMkI と同じモデルであり，Aziz らは $k = 16$ の場合に $(4, 4)$-SMkI が NP 完全であることを示している．また Chen ら [2] は希望リストが複数与えられ場合の安定性を 3 つ定義し，それらの計算複雑性を論じている．この中で globally stable matching 問題が我々の SMkI と同じモデルであり，Chen らは $k = 2$ の場合に SMkI が NP 完全であることを示しているが，希望リストの長さは制限されていない．

2 NP 完全性

定理 2.1 任意の $k \geq 4$ に対して $(3, 4)$-*SMkI* は *NP* 完全である．

証明． 読者は文献 [6] の Theorem 1 の証明を読んでいると仮定し，そこからの変更点だけを簡潔に述べる．$(3, 4)$-SMkI が NP に属することは簡単に分かる． $k = 4$ について示せば $k \geq 5$ への拡張は容易であるので，以下では 3CNF SAT（各節にちょうど 3 つのリテラルが現れる CNF SAT）から $(3, 4)$-SM4I への帰着を示す．

f を 3CNF SAT の任意の例題とし，変数を $x_1, x_2, \ldots, x_n$，節を $C_1, C_2, \ldots, C_m$ とする．f から，$(3, 4)$-SM4I の例題 I を作成する．各 i $(1 \leq i \leq n)$ に対して，x_i の出現回数を s_i とする． 変数 x_i $(1 \leq j \leq s_i)$ の j 番目の出現に対して，2 人の**リテラル男性** $a_{i,j}, b_{i,j}$ と 2 人の**リテラル女性** $c_{i,j}, d_{i,j}$ を作る．各節 C_ℓ に対し，3 人の**節男性** u_ℓ^i $(1 \leq i \leq 3)$ と 3 人の**節女性** v_ℓ^i $(1 \leq i \leq 3)$ を作る．結果，$9m$ 人の男性と $9m$ 人の女性ができる．

リテラル男性とリテラル女性の希望リストを図 1 に示す．これらのリストにより，共通安定マッチングは $M_{i,j}^0 = \{(a_{i,j}, d_{i,j}), (b_{i,j}, c_{i,j})\}$ または $M_{i,j}^1 = \{(a_{i,j}, c_{i,j}), (b_{i,j}, d_{i,j})\}$ を部分マッチングとして含まなくてはならない．L_1〜L_3 の構造は，x_i の j 番目の出現が正リテラルか負リテラルかによって異なる．正リテラルとして現れている場合，$M_{i,j}^0$ を選ぶと男性 $b_{i,j}$ が悪い方のパートナーとマッチし，$b_{i,j}$ は $V_{i,j}^k$ とブロッキングペアを作る危険性がある．逆に負リテラルとして現れているなら，$M_{i,j}^1$ を選んだときにその危険性が生じる．

x_i の j 番目の出現が節 C_ℓ の第 t リテラルだとする．$k = t$ ならば $V_{i,j}^k = v_\ell^1$ であり，$k \neq t$ ならば $V_{i,j}^k$ は存在しないものとする．L_4 の役目は一貫性を持たせること，すなわち全ての j に対して $M_{i,j}^1 \subseteq M$ であるか，あるいは全ての j に対して $M_{i,j}^0 \subseteq M$ であるかのいずれかを保証するものである．

$L_k (1 \leq k \leq 3)$

$a_{i,j}$:	$c_{i,j}$		$d_{i,j}$	$c_{i,j}$:	$b_{i,j}$	$a_{i,j}$
$b_{i,j}$:	$d_{i,j}$	$V_{i,j}^k$	$c_{i,j}$	$d_{i,j}$:	$a_{i,j}$	$b_{i,j}$

(x_i の j 番目の出現が正リテラルの場合)

$L_k (1 \leq k \leq 3)$

$a_{i,j}$:	$d_{i,j}$		$c_{i,j}$	$c_{i,j}$:	$a_{i,j}$	$b_{i,j}$
$b_{i,j}$:	$c_{i,j}$	$V_{i,j}^k$	$d_{i,j}$	$d_{i,j}$:	$b_{i,j}$	$a_{i,j}$

(x_i の j 番目の出現が負リテラルの場合)

L_4

$a_{i,j}$:	$c_{i,j}$	$c_{i,j-1}$	$d_{i,j}$	$c_{i,j}$:	$b_{i,j}$	$a_{i,j+1}$	$a_{i,j}$
$b_{i,j}$:	$d_{i,j}$	$d_{i,j+1}$	$c_{i,j}$	$d_{i,j}$:	$a_{i,j}$	$b_{i,j-1}$	$b_{i,j}$

図 1: x_i の j 番目のリテラル $(1 \leq j \leq s_i)$ に関連した男女の希望リスト

節に関係する男女の希望リストを図 2 に示す．L_4 により，安定マッチングは $M_\ell^1 = \{(u_\ell^1, v_\ell^1), (u_\ell^2, v_\ell^2), (u_\ell^3, v_\ell^3)\}$，$M_\ell^2 = \{(u_\ell^1, v_\ell^2), (u_\ell^2, v_\ell^3), (u_\ell^3, v_\ell^1)\}$，$M_\ell^3 = \{(u_\ell^1, v_\ell^3), (u_\ell^2, v_\ell^1), (u_\ell^3, v_\ell^2)\}$ の 3 つのうちのいずれかを部分マッチングとして含むことが保証される．$t = 1, 2, 3$ について，節 C_ℓ の t 番目のリテラルが x_i の j 番目の出現だとすると，$B_{\ell,t} = b_{i,j}$ と定義する．これで帰着が完了である．帰着が多項式時間で計算できること，また男性の希望リストの長さが高々3，女性の希望リストの長さが高々4 であることが容易に確認できる．

帰着の正当性の証明は，[6] の Theorem 1 とほぼ同様であるため割愛する． □

3 終わりに

本稿では，k 個の希望リスト集合 $L_1, L_2, \ldots, L_k$ が与えられ，全ての L_i で安定となるマッチングが存在するか否かを問う判定問題の計算複雑性を議論した．本研究では，任意の $k \geq 4$ に対して $(3, 4)$-SMkI が NP 完全であることを示した．先行研究 [6] と合わせると，$k = 2, 3$ かつ $\ell \geq 3$ に対する $(3, \ell)$-SMkI と，$k \geq 4$ に対する $(3, 3)$-SMkI の計算複雑さが未解決であるので，これらを今後の研究課題としたい．

謝辞． 本研究は JSPS 科研費 16K00017 の助成を受けたものである．

L_1

u_ℓ^1:	v_ℓ^1	v_ℓ^2	v_ℓ^3	v_ℓ^1:	u_ℓ^2	u_ℓ^3	$B_{\ell,1}$	u_ℓ^1
u_ℓ^2:	v_ℓ^2	v_ℓ^3	v_ℓ^1	v_ℓ^2:	u_ℓ^3	u_ℓ^1		u_ℓ^2
u_ℓ^3:	v_ℓ^3	v_ℓ^1	v_ℓ^2	v_ℓ^3:	u_ℓ^1	u_ℓ^2		u_ℓ^3

L_2

u_ℓ^1:	v_ℓ^3	v_ℓ^1	v_ℓ^2	v_ℓ^1:	u_ℓ^3	u_ℓ^1	$B_{\ell,2}$	u_ℓ^2
u_ℓ^2:	v_ℓ^1	v_ℓ^2	v_ℓ^3	v_ℓ^2:	u_ℓ^1	u_ℓ^2		u_ℓ^3
u_ℓ^3:	v_ℓ^2	v_ℓ^3	v_ℓ^1	v_ℓ^3:	u_ℓ^2	u_ℓ^3		u_ℓ^1

L_3

u_ℓ^1:	v_ℓ^2	v_ℓ^3	v_ℓ^1	v_ℓ^1:	u_ℓ^1	u_ℓ^2	$B_{\ell,3}$	u_ℓ^3
u_ℓ^2:	v_ℓ^3	v_ℓ^1	v_ℓ^2	v_ℓ^2:	u_ℓ^2	u_ℓ^3		u_ℓ^1
u_ℓ^3:	v_ℓ^1	v_ℓ^2	v_ℓ^3	v_ℓ^3:	u_ℓ^3	u_ℓ^1		u_ℓ^2

L_4

u_ℓ^1:	v_ℓ^1	v_ℓ^2	v_ℓ^3	v_ℓ^1:	u_ℓ^2	u_ℓ^3	u_ℓ^1
u_ℓ^2:	v_ℓ^2	v_ℓ^3	v_ℓ^1	v_ℓ^2:	u_ℓ^3	u_ℓ^1	u_ℓ^2
u_ℓ^3:	v_ℓ^3	v_ℓ^1	v_ℓ^2	v_ℓ^3:	u_ℓ^1	u_ℓ^2	u_ℓ^3

図 2: ℓ 番目の節 C_ℓ に対応する男女の希望リスト

参考文献

[1] H. Aziz, P. Biro, S. Gaspers, R. de Haan, N. Mattei, and B. Rastegari, "Stable matching with uncertain linear preferences," Proc. *SAGT 2016*, LNCS 9928, pp. 195-206, 2016.

[2] J. Chen, R. Niedermeier, P. Skowron, "Stable marriage with multi-modal preferences," Proc. *EC 2018*, pp. 269-286, 2018.

[3] D. Gale and L. S. Shapley, "College admissions and the stability of marriage," *Amer. Math. Monthly*, Vol.69, No. 1, pp. 9–15, 1962.

[4] D. Gusfield and R. W. Irving, The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms, MIT Press, Boston, MA, 1989.

[5] R. W. Irving and P. Leather, "The complexity of counting stable marriages," *SIAM Journal on Computing*, Vol.15, pp. 655–667, 1986.

[6] S. Miyazaki and K. Okamoto, "Jointly stable matchings", Proc. *ISAAC 2017*, pp. 56:1-56:12, 2017.

[7] E. G. Thurber, "Concerning the maximum number of stable matchings in the stable marriage problem," *Discrete Mathematics*, Vol. 248, Issues 1–3, pp. 195–219, 2002.