

厳しい評価回数制限下における多変数問題に対するアプローチの提案

開発 拓也^{1,a)} 渡邊 真也^{†1,b)}

概要: 実世界における最適化問題には計算負荷が高く、評価回数が厳しく制限される場合が少なくない。特に、多変数や多峰性のある問題の場合、少ない評価回数で良質な解を導出することは非常に困難である一方、このような状況を想定したアルゴリズム開発はその数が非常に限られている。本研究では、計算資源の限られた状況下における多変数問題に対する新たなアプローチとして ESRS (Estimating Search area based on Random Sampling) を提案する。ESRS は、遺伝的アルゴリズムや差分進化といった手法よりも分布推定アルゴリズムに近い思想に基づいており、探索により得られた情報を次に探索する空間の範囲を推定するために用いている。ただし、従来の分布推定アルゴリズムに比べ明示的に探索範囲をコントロールする機能に特化しており、膨大な探索範囲をより計画的に探索するアプローチとなっている。また、ESRS のもう 1 つの大きな特徴として、非常に機能が簡素化されており、単純な操作により明示的に探索空間を管理した探索を実現している。ESRS の有効性を検証するため、種類の異なる代表的なベンチマーク問題に対して従来手法との比較実験を行い、その有用性を確認した。

A proposal of approach to many variable problem under severely limited function evaluation

Abstract: There are quite a few real-world high computational problems with many variables. In the case of this kind of problems, it is very difficult to optimize because the number of evaluations is strictly limited. Therefore, an optimization algorithm considering the limited number of evaluations is strongly required. However, the number of researches about such algorithms is very few. Under such a background, evolutionary computation competition 2017 was held for the purpose of developing optimization algorithm under the limited number of evaluations. In this paper, we propose a new optimization algorithm, named Estimating Search Area Based on Random Sampling (ESRS), which is specified for the problems with many variables under the limited number of evaluations. ESRS is based on an idea of Estimation of Distribution Algorithm (EDA) rather than Genetic Algorithm (GA) or Differential Evolution (DE) and designed for an efficient search on many variable problems under small computational cost. The main features of ESRS are to control a range of search space explicitly and to use a reproducing mechanism based on sampling within the limited space like EDA. In order to verify the effectiveness of ESRS, some typical benchmark problems having different features were used for computational experiments. By comparing the performance between ESRS and conventional methods, the usefulness of ESRS could be confirmed.

1. はじめに

近年の進化計算 (Evolutionary Computation, EC) は活

発に研究されており、目覚ましい発展を遂げている [1], [2]. また、計算資源の増大に伴いこれらの研究は実社会の問題、実問題に対する有効性が注目され、飛行機やエンジンなどの設計最適化問題に対応した進化計算手法及びそれらの解析の研究も行われている [3], [4], [5].

一方で、実社会における最適設計問題は多数の制約条件、設計変数を持つことが多く、そのような問題で良質な最適解及び最適解集合をより効率的に得ることができる設計最適化手法が必要とされている。Rastrigin 関数や DTLZ

¹ 室蘭工業大学大学院
The Graduate School of Engineering, Muroran Institute of Technology

^{†1} 現在、室蘭工業大学 しくみ情報系領域
Presently with College of Information and Systems, Muroran Institute of Technology

^{a)} 17043019@mmm.muroran-it.ac.jp

^{b)} sin@csse.muroran-it.ac.jp

テストスイートなどの伝統的なベンチマーク問題では、計算負荷が高く、評価回数を厳しく制限された状況を明に考慮していない。そのためより実問題に近い制約条件付きベンチマーク問題や実問題から派生したベンチマーク問題が提案され、利用されている [6], [7]。しかしながら、制約条件付きベンチマーク問題として頻繁に利用されている CDTLZ 問題や実問題を簡単な解析式でモデル化した問題では、比較的容易に実行可能解を得ることができる上、複数の制約条件を同時に違反する解が現れる頻度が少ないなどの問題点が指摘されている [8]。

このような背景から、進化計算シンポジウム 2017[9] では、マツダ (株)、宇宙航空研究開発、東京理科大学が共同で開発した「応答曲面法を用いた複数車種の同時最適化ベンチマーク問題」(以下、マツダベンチ問題と略) [10] を対象とした最適化アルゴリズムのコンペティション [11] が開催され、問題の性質が特定されているものの、高実用性を志向したアルゴリズムの開発競争が促されている。

マツダベンチ問題は、超多変数という特徴を有する一方、1 回の評価のための計算負荷が非常に高い場合を想定し、最適化のために費やすことのできる総評価回数を厳しく制限している。そのため、マツダベンチ問題において高い性能を出すためには、膨大な計算空間の中から有望な探索領域をいかに効率よく探し出すかが大きなポイントとなる。

本論文では、マツダベンチ問題のように厳しく評価回数が制限された環境下における多変数問題に対する効果的なアプローチとして ESRS (Estimating Search area based on Random Sampling) を提案する。多変数問題に対する高効率な探索を実現するため、ESRS は次の 3 つの特徴を有している。まず、(1) 探索空間を陽にコントロールした探索であること、次に、(2) 新規個体の生成が一般的な進化計算における交差や突然変異ではなく分布推定アルゴリズムによるある限定された領域に対するサンプリングに基づいていること、そして、(3) 最近の高性能アルゴリズムと比ベメカニズム全体がシンプルであることである。

以下、本稿における構成について述べる。まず 2 章では、提案する手法に対する周辺研究について触れ、3 章では提案するアルゴリズムについて詳細に説明する。4 章では上記アルゴリズムの性能を確かめる為に、代表的なベンチマーク関数を用いた数値実験から有効性を示し、5 章でまとめを述べる。

2. 周辺研究

通常の遺伝的アルゴリズム (Genetic Algorithm:GA) や差分進化 (Differential Evolution:DE) のような手法では、探索空間が広大な多変数問題に対してあまり有効ではない事が一般に知られている [12]。これは探索空間が広大であるために探索における有望な領域の発見が困難である事が要因である。そのため探索領域を限定する為に協調型共進

化 (Cooperative Coevolution:CC) アルゴリズムを取り入れた部分問題化によるアプローチが盛んに研究されている [13], [14]。しかしこれらの手法は計算資源が潤沢である事を基準に設計されているため、計算資源が限定された場合における有効な手段とはいえない。

また、Bayesian Optimization Algorithm (BOA) [15] に代表される分布推定アルゴリズム (Estimation of Distribution Algorithms: EDA) [16], [17] なども多変数問題に対するアプローチとして知られているが、こちらについてもやはり計算資源が確保できている事が前提である事が多く、計算資源が限定された場合を陽に扱ったアルゴリズムは少ない。

3. 提案手法

実世界における問題には、計算資源が厳しく制限される場合がしばしば発生する。また、実問題は多峰性や変数依存など複雑なランドスケープを有する事があり、限られた評価回数で、超多変数、多峰性などの特徴の強い問題に対し有効なアプローチを開発する必要がある。

上記の問題を解決するためには、膨大な探索空間を効率的に探索するため、計画的に探索領域を限定する必要がある。そこで本論分では、多変数かつ小評価回数という限られた環境におけるランダムサンプリングを用いた探索領域の推定法を提案する。ここでは提案手法をその特徴から ESRS (Estimate Search area based on Random Sampling) と呼ぶ。

3.1 提案手法の流れ

ESRS は、GA などに代表されるような集団的降下法に基づき構成されている。つまり、個体数 M の母集団を形成し、母集団の情報を元に次世代の母集団を形成するというステップを繰り返す事で探索母集団を進化させる。しかしながら、GA や DE に見られる交叉や突然変異などの遺伝的操作ではなく、分布推定アルゴリズムを単純化した方法により新規個体を生成する。

提案手法の流れを図.1 に示すと共に、以下に各フローにおける処理について概説する。

Step1. 初期化

各個体について設計変数をランダムに初期化する。

Step2. 評価

各個体を評価し、母集団中最小の評価値をもつ個体をベスト解として保持する。

Step3. 探索領域の推定

母集団中の評価値の良い n 個の個体を用いて、各設計変数の平均と標準偏差を求める。

Step4. 新規個体の生成

Step3. で求めた各設計変数の平均と標準偏差を基に、正規分布を用いて新規個体の設計変数を設定する。

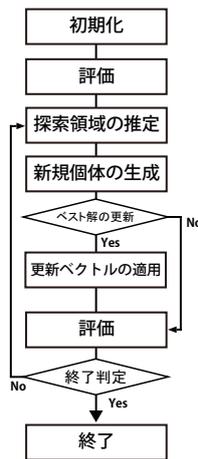


図 1: Flowchart of the proposed method

Step5. ベスト解の更新

$t-1$ 世代から t 世代においてベスト解を更新した場合は Step6. へ、そうでない場合は Step7. へ遷移する。

Step6. 更新ベクトルの適用

$t-1$ 世代までのベスト解を更新した際の設計変数ベクトルを更新ベクトルとし、母集団中の全個体に適用する。その後 Step7. へ遷移する。

Step7. 評価

新しく生成した各個体を評価する。新しく生成した個体の評価値がベスト解を上回る場合、ベスト解を更新し更新ベクトルを計算する。

Step8. 終了判定

終了条件を満たした場合アルゴリズムを終了する。そうでない場合は Step3. に戻る。

以上の様に EDA を単純化した、探索領域を限定する操作に基づく探索を行っている。これは、探索空間の広い問題では、一般的な EC アルゴリズムでは比較的初期の段階で母集団が一定の範囲に収束する、もしくは広すぎる空間に対して適切な絞り込みが行えないなど、限られた評価回数の中で広い空間を計画的に探索する事が難しいためである。また一般的な EDA アルゴリズムは、限られた評価回数下での実行が陽に考慮されておらず、空間の絞り込みの管理が難しい上、各手法特有のメカニズムが計算資源が限定された状況下では効率の悪化に繋がる危険性が高いことから、より単純で空間の絞り込みを実現する方法として上記に示す実装とした。

本手法における重要な点は、Step3. における「探索領域の推定」と、Step6. における「更新ベクトルの適用」の2つである。これらの2点について詳細に述べる。

3.2 探索領域の推定と新規個体の生成

次世代の探索領域の推定は、現世代の母集団における評価値の良い上位 n 個の個体を用いて、それらの各設計変数の平均及び標準偏差から行う。図.2 左図の点線は探索領域

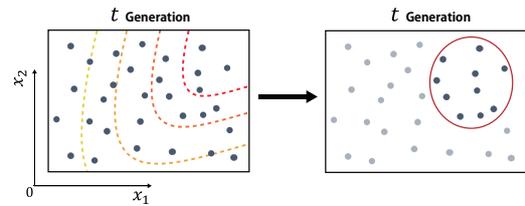


図 2: The concept figure of extract fine evaluation individuals

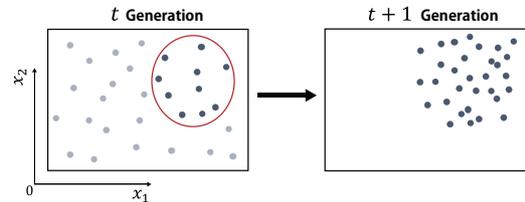


図 3: The concept figure of estimate searching area

の勾配を示しており、色が濃くなるほど評価値の良い領域であることを表している。探索領域内に生成された個体群から、図.2 右図のように赤丸で囲われた評価値の優れた個体を選択する。この領域内の個体から、設計変数毎の平均値、および標準偏差値を求める。

求めた平均値及び標準偏差値を用いて、 $t+1$ 世代の個体群を式 (1) に従って生成する。

$$x_i^{t+1} = N(ave_i^t, std_i^t), \forall i = 1, \dots, d \quad (1)$$

式中の d は次元数を、 N は正規分布、 ave_i^t および std_i^t はそれぞれ t 世代における i 次元目の設計変数の平均、標準偏差を表す。生成される各個体の設計変数は、 t 世代の評価値が優良な個体群における各設計変数の平均値と標準偏差から、正規分布を用いてランダムに決定される。 $t+1$ 世代の個体の生成領域のイメージを図.3 に示す。 t 世代の個体から推定した有望な探索領域を左図の赤枠で示しており、この赤枠の付近に $t+1$ 世代の個体が生成される。

3.3 更新ベクトルの適用

少ない評価回数で良質な解を得るためには、何らかの方法を用いて探索方向をより明確に示す必要がある。つまりただ探索領域を推定するのではなく、良質な解が見つかる可能性が高い方向を示唆する事で探索速度を高める事が期待できる。

ESRS では、その具体的な表現方法として、最良解を更新した際の更新ベクトルを推定した解に加算するメカニズムを組み込んだ。更新ベクトルの定義を式 (2) に示す。

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}_{best}^t - \mathbf{x}_{best}^{t-1} \quad (2)$$

ここで示す \mathbf{x}_{best}^t は t 世代における最良の設計変数ベクトル、 \mathbf{x}_{best}^{t-1} は t 世代までにおける最良の設計変数ベクトルを表す。各世代ごとの最良解を比較することで向かうべき探索の更新ベクトルを定め、より探索を有利に進めるための指針として用いる。

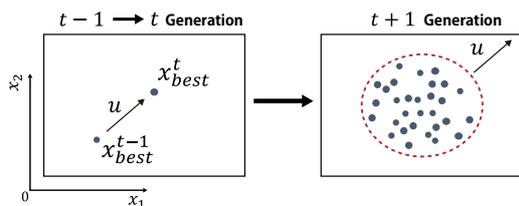


図 4: The concept figure of updateVector

この更新ベクトルを用いて、各個体を式 (3) に従って生成する。

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{estimate} + \mathbf{u} \quad (3)$$

上記式において、 $\mathbf{x}_{estimate}$ は Step4. において生成された個体 (推定個体) を示す。図.4 に示すように、母集団中の各個体にベスト解が更新された際の方向を明確に示す事で、推定した領域内で生成された個体を更に評価値の改善が期待できる方向に移動させる事が目的である。

4. 数値実験

提案手法の有効性を検証するために、いくつかの代表的な最適化ベンチマーク関数を用いて数値実験を行った。数値実験における問題設定に関しては、マツダベンチ問題に則り 222 変数、30000 評価を上限として設定した。数値実験の結果を以下の観点から分析する。

実験 1: ESRS と既存の最適化アルゴリズムの比較

実験 2: ESRS における各メカニズムの有効性の分析

比較対象とする既存の最適化アルゴリズムには、DE の改良手法として CEC2013 や CEC2014 で高い探索性能を示している SHADE[18] と、ESRS の基となっているランダムサンプリングを選択した。SHADE の詳細については、文献 [18], [19] を参照されたい。

4.1 ベンチマーク問題

本数値実験では多峰性、変数依存性などの特性を有するベンチマーク問題を複数用いることで、アルゴリズムの汎用性についての考察を行う。実験に用いたベンチマーク問題を表 1 に示す。

4.2 各種設定パラメータ

設定パラメータに関する事前調査に基づき、各種パラメータを表 2 のように設定した。なお、表 2 に示すパラメータを用いて全ての数値実験を行った。探索領域の推定

表 1: Test Problems

	Function	modal	dependency
f_1	Rastrigin Function	multimodal	×
f_2	Rosenbrock Function	unimodal	○
f_3	Schwefel Function	multimodal	×
f_4	Rotated Rastrigin Function	multimodal	○

に用いる個体数は Extraction Population Size と表記している。

4.3 実験 1

実験 1 では、ESRS と既存のアルゴリズムの性能比較を行う。表 3 に実験結果を示す。実験結果から、SHADE に比べ ESRS が有効である結果も得る事が出来た。これから結果について考察を行う。

探索空間の可視化をしたものを図.5 に示す。探索空間全体の可視化は不可能であるため、ここでは特にアルゴリズム間の差が顕著に現れた f_3 における x_1, x_2 のみの可視化を行う。図.5 を参照すると分かる通り、SHADE が探索空間全体をある程度均一に探索していることに対し、ESRS では探索領域にかなりの偏りがある。SHADE は探索領域をある程度均一に探索し、その後徐々に探索領域を狭めるために評価回数が少ない場合にあまり有効ではない。一方 ESRS は探索序盤から積極的に探索領域の絞り込みを行っているため評価回数が限定された場合においても有望領域への探索性能が優れている。これにより無駄な探索を削減し、常に評価値の良い方向に注目した探索が実現できていると考える。

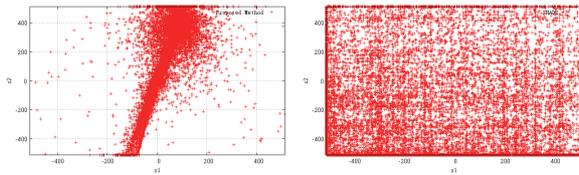
また、探索における最良解の推移を図.6 に示す。図.6 では横軸が評価回数、縦軸が評価値であり、赤線は ESRS、緑線は SHADE の最良解の推移を示す。図中にある探索中

表 2: Parameters of experiments

#Dimension	222
Max Function evaluation	30000
#Trial	25
Extraction Population Size	30
Population size	100

表 3: Comparison results of experiments by each algorithm

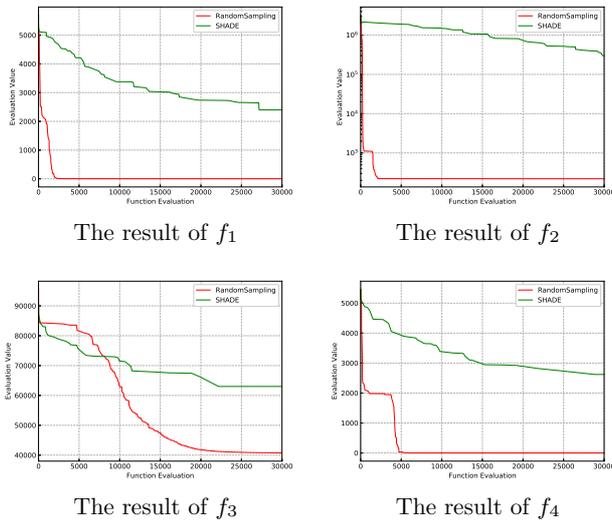
		ESRS	SHADE	Random
f_1	Best	0	2398.13672	4301.34139
	Med.	0	2581.24497	4529.48352
	Avg.	0	2570.67883	4517.88910
	Std.	0	63.89462	82.45257
f_2	Best	219.83133	300696.65951	1941082.04575
	Med.	219.95749	392904.22554	2116626.76715
	Avg.	220.00389	388489.76325	2122311.23567
	Std.	0.15729	36354.15857	56082.65074
f_3	Best	40728.92976	63007.62438	79126.36379
	Med.	80915.00934	64689.68973	81339.84865
	Avg.	69997.23138	64779.71812	81130.73848
	Std.	16731.21976	937.80276	929.52237
f_4	Best	0	2620.16132	4249.23005
	Med.	0	2732.43978	4553.70692
	Avg.	230.39054	2738.05025	4530.67390
	Std.	624.00628	55.52225	82.18881



The result of ESRS

The result of SHADE

図 5: The result of f_3 design variable(x_1, x_2)



The result of f_1

The result of f_2

The result of f_3

The result of f_4

図 6: Comparison of transition of best solution in each function by each method

の最良解の推移を見ても、探索序盤から良質な解を得る事ができ、積極的な解更新が認められる。SHADEについても解更新は認められるが、ESRSは解更新における幅が広く、探索領域の限定が探索効率の向上に貢献している事が分かる。

4.4 実験 2

実験 2 では、ESRS におけるどのメカニズムが探索に有効に働いたかについての分析を行う。実験内容としては、

- 探索領域の推定のみ (Estimate mechanism)
- 更新ベクトルのみ (UpdateVector mechanism)

の 2 種類の実験を行う。探索アルゴリズムのベースとなるものはランダムサンプリングであり、推定を行わない場合は毎世代各変数の上下限値内でランダムに値を決定する。また、参考として ESRS の実験結果も併記する。

表 4 に実験結果を示す。実験結果から、推定メカニズムの Median 及び Average の値が更新ベクトルメカニズムに比べ良好な値を示し、推定メカニズムが探索に対する貢献度の高いメカニズムであることが分かった。

f_1, f_2 について、推定メカニズムと更新ベクトルメカニズムの結果が大きく異なる。更新ベクトルメカニズムに比べ推定メカニズムの方が std が小さく、アルゴリズムの安定性を示しているといえる。一部の結果は SHADE よりも

良い事から、推定メカニズムが提案手法の根幹となっている事がいえる。

f_3 においては、領域推定メカニズムが更新ベクトルメカニズムに劣る結果を記録したが、これは更新ベクトルメカニズムがランダムサンプリングによる探索がベースになっているためと考える。つまり、領域推定メカニズムが探索領域を限定して探索するため局所解に寄ってしまう事に対し、更新ベクトルメカニズムは探索空間全体を探索できる為に局所解に惑わされず良解を発見できたと思われる。

各メカニズムの探索結果の推移を図.7 に示す。推定メカニズムは探索序盤から探索終了まで解の更新が行われている事に対し、更新ベクトルメカニズムは探索序盤での解更新以降に更新が行われなくなる。これは、ランダムサンプリングと組み合わせているため、新規の解に対して更新ベクトルが有効に作用していないためと思われる。

以上のことから、更新ベクトルメカニズムは単体ではあまり有効性を示せず、推定メカニズムと組み合わせる事でその効果を発揮するメカニズムであるといえる。推定メカニズムによって形成された探索領域に対して更新ベクトルを適用する事で、常に解更新が行われ更にその探索を後押しすることで解探索能力を向上させている事から、本提案の設計思想どおりの挙動を示す事が確認できた。

5. おわりに

本論文では、厳しく限定された評価回数下における多変数問題に対する新たなアプローチとして ESRS を提案した。提案アルゴリズムである ESRS は探索空間の中で探索すべき領域を推定し、解の更新情報を基に探索方向を定める事で、多変数小評価回数な環境において良解を発見する

表 4: Comparison results of experiments for each mechanisms

		Estimate	UpdateVector	ESRS
f_1	Best	295.26701	2214.85071	0
	Med.	369.73693	2539.20048	0
	Avg.	376.49206	2566.99427	0
	Std.	36.81771	188.74679	0
f_2	Best	866.52620	648.99464	219.83133
	Med.	1196.23128	207419.53806	219.95749
	Avg.	1211.59462	192991.79216	220.00389
	Std.	202.99996	101364.51893	0.15729
f_3	Best	81191.22531	79197.02751	40728.92976
	Med.	83128.09350	81111.04794	80915.00934
	Avg.	82975.93718	81008.48209	69997.23138
	Std.	749.58578	804.45341	16731.21976
f_4	Best	2180.01609	2272.56905	0
	Med.	2235.31978	2391.20805	0
	Avg.	2240.5978	2433.12364	230.39054
	Std.	39.59231	122.39471	624.00628

Estimate = Estimate mechanism

UpdateVector = UpdateVecgtor mechanism

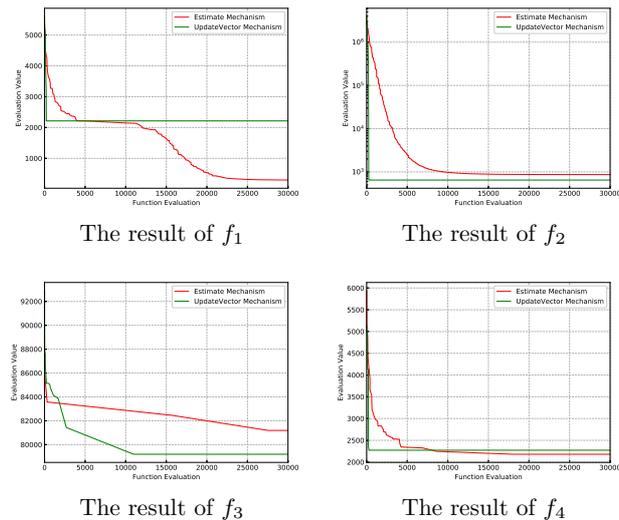


図 7: Comparison of transition of best solution in each function by each mechanism

ことを目的としている．数値実験を通し既存のアルゴリズムと比較することで，ESRS の有効性を示すとともに，探索における挙動の詳細な分析からなぜ優れた性能を示すかを考察した．

分析の結果，探索領域の推定が多変数を有する最適化問題に対して有効なアルゴリズムであることが分かった．従来の交叉を基準とした探索法では探索空間が広大であるため有望領域への収束が遅く，多変数かつ評価回数が限定されているような場合にあまり有効な手段ではない．一方で探索領域を各世代の結果から推定することにより，少ない評価回数で探索空間における有望領域を推定，探索できることが確認できた．

今後の課題としては，評価回数が潤沢に与えられた場合の探索能力の分析や，他のアルゴリズムとの組み合わせについてが挙げられる．提案手法は小評価回数な環境において十分に効果を発揮するように設計されているため，多評価回数な環境でも本論分の報告どおりの有効性を示すとは限らない．また，多評価回数な環境においても，本アルゴリズムを探索初期解の生成メカニズムとして用いることで既存のアルゴリズムの探索性能を向上させるなどが挙げられる．

参考文献

[1] Storn, R. and Price, K.: *Differential Evolution: A Simple and Efficient Adaptive Scheme for Global Optimization Over Continuous Spaces*, TR: International Computer Science Institute, ICSI (1995).
 [2] K. Deb: *Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms*, Chichester, UK: Wiley (2001).
 [3] 大林 茂: 航空機の多目的最適設計, 人工知能学会誌, Vol. 18, No. 5, pp. 495–501 (2003).
 [4] 渡邊真也, 湊亮二郎: 多数非劣解集合からの設計支援手法の開発, 人工知能学会論文誌, Vol. 24, No. 1, pp. 1–12

(2009).
 [5] 工藤文也, 吉川大弘, 古橋 武: ハイブリッドロケットエンジンの概念設計最適化問題におけるパレート解の解析に関する一考察, 人工知能学会論文誌, Vol. 27, No. 2, pp. 46–51 (2012).
 [6] Li, K., Deb, K., Zhang, Q. and Kwong, S.: An Evolutionary Many-Objective Optimization Algorithm Based on Dominance and Decomposition, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, Vol. 19, No. 5, pp. 694–716 (2015).
 [7] Ray, T., Tai, K. and Seow, C.: An evolutionary algorithm for multiobjective optimization, *Eng. Optim.*, Vol. 33, No. 3, pp. 399–424 (2001).
 [8] 田邊遼司, 大山 聖: 制約付き多目的最適化ベンチマーク問題の問題点 (2016).
 [9] : <http://www.jpnsoc.org/symposium201703.html> (2017).
 [10] 小平剛央, 鈿持寛正, 大山 聖, 立川智章: 応答曲面法を用いた複数車種の同時最適化ベンチマーク問題の提案, 進化計算学会論文誌, Vol. 8, No. 1, pp. 11–21 (2017).
 [11] : <http://is-csse-muroran.sakura.ne.jp/ec2017/EC2017compe.html> (2017).
 [12] 渡邊真也: パレート解分析のための技術動向, システム/制御/情報 = Systems, control and information: システム制御情報学会誌, Vol. 60, No. 7, pp. 272–277 (2016).
 [13] Yang, Z., Tang, K. and Yao, X.: Large scale evolutionary optimization using cooperative coevolution, *Information Sciences*, Vol. 178, No. 15, pp. 2985–2999 (2008).
 [14] Yang, Z., Tang, K. and Yao, X.: Differential evolution for high-dimensional function optimization, *Evolutionary Computation, 2007. CEC 2007. IEEE Congress on, IEEE*, pp. 3523–3530 (2007).
 [15] Pelikan, M., Goldberg, D. E. and Cantú-Paz, E.: BOA: The Bayesian Optimization Algorithm, *Proceedings of the 1st Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation - Volume 1, GECCO'99*, Morgan Kaufmann Publishers Inc., pp. 525–532 (1999).
 [16] Mühlenbein, H. and Paaß, G.: From recombination of genes to the estimation of distributions I. Binary parameters, *Parallel Problem Solving from Nature — PPSN IV* (Voigt, H.-M., Ebeling, W., Rechenberg, I. and Schwefel, H.-P., eds.), Springer Berlin Heidelberg, pp. 178–187 (1996).
 [17] Larrañaga, P. and Lozano, J. A.: *Estimation of distribution algorithms: A new tool for evolutionary computation*, Vol. 2, Springer Science & Business Media (2001).
 [18] Tanabe, R. and Fukunaga, A.: Success-history based parameter adaptation for Differential Evolution, *Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation, CEC 2013, Cancun, Mexico, June 20-23, 2013*, pp. 71–78 (2013).
 [19] Tanabe, R. and Fukunaga, A. S.: Improving the search performance of SHADE using linear population size reduction, *2014 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC)*, pp. 1658–1665 (2014).