8切りルールを含む二人単貧民の必勝判定問題

木谷 裕紀[1,a)]　大渡 勝己[b)]　小野 廣隆[1,c)]

概要：単貧民とは, 不完全情報多人数ゲームであるカードゲーム大貧民を完全情報ゲームとして簡易化したものである．本研究では札の種類を一般化した「8 切りルール」を含む二人単貧民の勝者決定について考察する．8 切りルールは人気の高い大貧民の特殊ルールの一つで「8」の札が特別な役割を果たすというルールである．8 切りルールを含む二人単貧民は完全情報性から, カードが配られた時点で先手後手のいずれかに必勝戦略が存在する．本研究では手札の枚数の総数 n に対し, ソート後 $\mathcal{O}(n)$ 時間で「8 切りルール」を含む二人単貧民の必勝プレイヤーとその必勝戦略を求めることができることを示す．

Deciding the winning player in 2-player 8-cut rule TANHINMIN game

KIYA Hironori[1,a)]　OHTO Katsuki[b)]　ONO Hirotaka[1,c)]

Abstract: TANHINMIN is a game with perfect information. which is a simplied version of card game DAIHINMIN. In this paper, we consider a 2-player generalized “8-cut rule TANHINMIN game”, where the size of deck is generalized. 8-cut rule is one of the most popular special rules of DAIHINMIN, where card “8” has a special role. Since this variant of TANHINMIN is a 2-player game with perfect information, it has a winning strategy of either the first or the second player, but it does not necessarily mean that there is a simple and easy winning strategy. We show that it can be decided in $\mathcal{O}(n)$ time which player has a winning strategy.

1. はじめに

大貧民はトランプカードゲームの中でも全国的に認知度, 人気が高い遊びであり, 大富豪とも呼ばれる．このゲームは不完全情報多人数ゲームであり, 一般には最適戦略が存在しない, あるいは求めることが困難である．近年, 将棋やオセロなどの完全情報ゲームに関する研究と共に, 大貧民のような不完全情報ゲームの研究も進んでいる．2006 年度から毎年コンピューター大貧民大会が電気通信大学で開催され, 「強い」大貧民 AI の開発を競う場となっている．2015 年, プロ棋士に対する勝利宣言がだされた将棋コンテスト同様, 日々コンピューター大貧民 AI の実力も向上しているがまだまだ成長の余地がある [4].

このような大貧民研究の一環として電気通信大学の西野は単貧民というゲームを定義した [2]. 単貧民は大貧民に

- 特殊ルールが一切存在しない,
- 1 枚出しのみを認める,
- 手札は公開で行われる,

という制約を課したものであり, 大貧民を単純化し，かつ完全情報多人数ゲーム化したものと言える．二人単貧民は完全情報型の 2 人ゲームとなるため, いずれかのプレイヤーに必勝戦略が常に存在する．しかし, 将棋や囲碁などを考えると明らかなように, 完全情報型の 2 人ゲームにおける必勝戦略の存在性とそれを具体的に知ることには大きな隔たりがある．これに対し著者らはこれまで二人単貧民においての具体的な必勝判定及び必勝戦略を与える研究を行ってきた [3].

本研究では単貧民ゲームに「8 切り」という特殊ルールを導入した単貧民に関して考える．「8 切り」は前述のコンピュータ大貧民大会にも採用されている大貧民のメジャーな特殊ルールの一つであり, 大貧民のプレイ中においていずれかのプレイヤーが 8 を出すと発動するルールである．

1　名古屋大学大学院情報学研究科 数理情報学専攻
Department of Mathematical Informatics, Graduate School of Informatics, Nagoya University
a)　kiya.hironori@gmail.com
b)　katsuki.ohto@gmail.com
c)　ono@i.nagoya-u.ac.jp

単貧民は解析の単純化のために提案された大貧民の簡易板であるが, 本研究ではこれをより通常の大貧民に近づけるためにその導入を考える.

本研究では 8 切りを含む二人単貧民において, 与えられた手札の組からの必勝プレイヤー判定を札の枚数 n に対してソート済みの手札であれば $\mathcal{O}(n)$ 時間で求めることができることを示す.

2. 問題

2.1 単貧民のルール

まず本研究の基礎となる二人単貧民を以下のようにモデル化する: 各プレイヤーの**手札集合**を $[N]=\{1,2,\ldots,n\}$ の部分集合の形で与える (簡単のためそれぞれの手札集合は単純集合として説明するが, 多重集合であっても良い. また, 両プレイヤーが同じ値の札を持っていてもよい). プレイヤーに配布された札 (**手札**と呼ぶ) の札数は必ずしも等しくなくてよい. 札の番号は強さを表し, 大きいほど強いものとする. この設定の下, 以下の形でゲームを進める.

- 先手後手を決め, **先手プレイヤー**, **後手プレイヤー**の順に交代で, 手札から**場**に 1 枚ずつ札を出していく.
- 場は最初, 空である (0 の札がおかれていると考える).
- 順番のプレイヤーは, 手札の中から場の札の値よりも大きい値の札を 1 枚出すことができる. 出した札はそれまで出ていた札の上に置かれる (場に出ている札は今出した札に代わる). このとき, 順番はもう一人のプレイヤーに移る.
- 順番のプレイヤーは, 手札を出さずに順番をもう一人のプレイヤーに譲ることができる (**パス**する, という). このとき場に出ている札は空になる (改めて, 0 の札がおかれる).
- いずれかのプレイヤーの手札がなくなった時点で終了であり, このとき手札を 0 枚にしたほうが勝ちである.

ゲームを通して順番は交互に移るが, それぞれの手札を出すタイミングを**手番**, ある時点で順番が来ているプレイヤーを**手番プレイヤー**, もう一人のプレイヤーを**相手プレイヤー**と呼ぶ. また場が空の状態からいずれかのプレイヤーがパスをするまでを**巡**と呼ぶ.

本研究ではこの単貧民に更に「8 切り」という特殊ルールを取り入れる.

前述の通り 8 切りは大貧民において場に「8」の札が出たときに発動するルールであり, 場に「8」の札が出ると直ちに場は空になり「8」の札を出したプレイヤーからゲームを再開するというものである.

このように大貧民においては「8」の札に限定して 8 切りルールが適用されるが本研究では大貧民型ゲームの数理的性質を調べるため 8 切り札の集合を $\tilde{N}=\{\tilde{1},\tilde{2},\ldots,\tilde{n}\}$ としてより一般に以下のように 8 切りを定義する.

定義 1. (i) 任意の札は通常札と 8 切り札の二種類に分けられる. (ii) 各 8 切り札は適当な値を持ちその値以下の札より強い. しかし, その 8 切り札より強い札は (他の 8 切り札を含め) 存在しない. すなわち, 任意の 8 切り札が場に出されると, 相手プレイヤーはパスを選択せざるを得ない.

例えば, 通常札の「5」の値の札と 8 切り札の「5」の値の札は両方の札とも通常札の「4」の値以下の札のみに対して場に出すことができる.

以下ではこの「8 切り札」と通常札どちらも用いる単貧民に対してゲームの必勝判定を考える.

2.2 諸定義

P_0 を初期手番プレイヤー, P_1 を初期非手番プレイヤーとする. 以下では 8 切り札の集合を Y で表し初期手番プレイヤー (以下では単に先手と呼ぶ) の手札集合のうち 8 切り札集合を $Y_0\subseteq[\tilde{N}]$, 非 8 切り札 (通常札) の札集合を $X_0\subseteq[N]$, 初期非手番プレイヤーの手札集合のうち 8 切り札集合をを $Y_1\subseteq[\tilde{N}]$, 非 8 切り札 (通常札) の札集合を $X_1\subseteq[N]$ とする.

また場に最後に出された札を r とする. まだ札が出されていない空場では仮想的に 0 の札が置かれているものとし, $\{r\}=\{0\}$ とする.

任意の手番 t に対して, 以下のような二部グラフを定義する:

$$G_0=(X_0\cup Y_0, X_1\setminus\{\min(X_1)\}\cup\{r\}, E_0),$$

ただし,

$$E_0=\{\{i,j\}\mid i\in X_0\cup Y_0, j\in X_1\setminus\{\min(X_1)\}\cup\{r\}, i>j\}.$$

つまり, G_0 は, プレイヤー P_0 の全ての手札と P_1 の最弱札を除く全ての非 8 切り札 (通常札) と場の札の各札を点としたグラフであり, プレイヤー P_0 の各手札から, その札が勝てるプレイヤー P_1 の手札へ辺を引く形で定義されている.

このように定義したグラフ G_0 においてマッチング辺は, プレイヤー P_1 が出した札に対してプレイヤー P_0 が札を出す関係を表しており, ゲームが進むことはそれぞれのグラフにおいてマッチング辺が抜かれていく状況を表している. 本研究で提案する判定法ではこれを利用するため, G_0 の最大マッチングのサイズ μ_{G_0} を定義する.

また同様に以下のような二部グラフを定義する:

$$G_1=(X_1\cup Y_1, X_0\setminus\{\min(X_0)\}, E_1),$$

ただし,

$$E_1=\{\{i,j\}\mid i\in X_1\cup Y_1, j\in X_0\setminus\{\min(X_0)\}, i>j\}.$$

つまり, G_1 は, プレイヤー P_1 の全ての手札と P_0 の最弱札を除く全ての非 8 切り札 (通常札) と場の札の各札を点としたグラフであり, プレイヤー P_0 の各手札から, その札が勝

てるプレイヤー P_1 の手札へ辺を引く形で定義されている．同様に G_1 の最大マッチングのサイズ μ_{G_1} を定義する．

また以下の証明では μ_{G_0} を $\mu(X_0 \cup Y_0, X_1 \setminus \{\min(X_1)\} \cup \{r\}), \mu_{G_1}$ を μ_{G_1})

などマッチングを点のみで表記する．

また, $|N(Y_0)|$ を G_0 における Y_0 の隣接点の集合のサイズとする．同様に $|N(Y_1)|$ を G_1 における Y_1 の隣接点の集合のサイズとする．

3. 「8 切り」ありの単貧民

このとき以下の定理が成立する．

定理 1. 以下の条件式により拡張単貧民の必勝戦略保持者を判定可能である．

$|Y_0| > 0$ かつ $\mu(X_1 \cup Y_1, X_0) = |X_0|$ かつ $|N(Y_0)| < 2$ かつ $\max(Y_0) \leq r$ ならば P_1 必勝戦略を持つ．

上記式を満たさないとき
- $|Y_1| > 0$ かつ $\mu(X_0 \cup Y_0, X_1 \cup \{r\}) = |X_1 \cup \{r\}|$ かつ $|N(Y_1)| < 2$,
  または
- $\mu_{G_0} > \mu_{G_1}$,

ならば P_0 は必勝戦略を持つ．

また上記いずれでもないとき P_1 必勝戦略を持つ．

二部グラフの最大マッチングの計算には $\mathcal{O}(m\sqrt{n})$ 時間のアルゴリズムが知られており [1], これを用いると $\mathcal{O}(n^{2.5})$ 時間でこの条件式のチェックができる．しかし, G_0 の辺の引かれ方の特性を利用すると, G_0 を実際に構築することなく線形時間で貪欲的に最大マッチングを求めることができる．このグラフの特性を利用すると手札がソートしてさえあれば, 最大マッチングのサイズを $\mathcal{O}(n)$ で計算可能である．

以上から, 手札がソートしてある, あるいは基数ソートなどを用いることが妥当である場合, 線形時間で 8 切り単貧民の勝者判定を行うことができる．

以下ではこれを証明する．

後述するようにこの 8 切り単貧民においてはマッチング構造の他に手札の無駄な 8 切り札を消費するために空場を迎えることができるかが必勝戦略を持つかどうかに大きくかかわってくる．

それを踏まえて次の順に証明を行う:

(i) 条件 K の下で条件 A が成り立つとき, 後手必勝であることを示す．これに対応するのが補題 1 である．

(ii) 条件 K, 条件 A がいずれか成り立たないとき条件 B が成り立つならば先手必勝であることを示すこれに対応するのが補題 2 である．

(iii) 条件 K, A のいずれかが成り立たないとき条件 B が成り立たないのであれば後手必勝であることを示す．これに対応するのが補題 3 である．

ただし各条件は以下のように設定する．
1. 条件 K:$|Y_0| > 0$ かつ $|N(Y_0)| < 2$ かつ $\max(Y_0) \leq r$.
2. 条件 A:$\mu(X_1 \cup Y_1, X_0) = |X_0|$ または $\mu_{G_0} \leq \mu_{G_1}$.
3. 条件 B:$|Y_1| > 0$ かつ $\mu(X_0 \cup Y_0, X_1 \cup \{r\}) = |X_1 \cup \{r\}|$ かつ $|N(Y_1)| < 2$, または $\mu_{G_0} > \mu_{G_1}$.

まず, 以下の補題が成立する．

補題 1. $|Y_0| > 0$ かつ $|N(Y_0)| < 2$ かつ $\max(Y_0) \leq r$ のとき $\mu_{G_0} \leq \mu_{G_1}$ または, $\mu(X_1 \cup Y_1, X_0) = |X_0|$ ならば P_1 は必勝戦略を持つ．

証明. $|X_0|$ に関する帰納法により証明する．

(基礎ステップ)$|X_0| = 0$ のとき:$\mu_{G_0} \leq \mu_{G_1}$ が成立するとき, また $\mu(X_1 \cup Y_1, X_0) = |X_0|$ が成立するときのそれぞれに対して P_1 が必勝戦略を持つことを示す．

(1) $\mu_{G_0} \leq \mu_{G_1}$ のとき P_1 が必勝戦略を持つことを示す．$\mu_{G_0} \leq \mu_{G_1} \leq |X_0|$ が成立するので $\mu_{G_0} = 0$ が成立する．このとき $|X_0| = 0$ より P_0 は 8 切り札しか持たない．また P_0 の持つ札は $\max(Y_0) \leq r$(条件 K) が成立しているため場に対して勝つことができる札を一枚も持っていない．従って P_0 は初期盤面においてパスをすることしかできない．また P_1 の手札のうち P_0 が勝つことができる札は高々 1 枚なのでそれ以外の札を全て出し終えた後最後にその札を出すことによって P_0 が手札に Y をかかえたまま空場をむかえることなく P_1 が勝つことができる．

(2)$\mu(X_1 \cup Y_1, X_0) = |X_0| = 0$ のとき: このとき $|X_0| = 0$ より, P_0 は 8 切り札しか持たない．また $\max(Y_0) \leq r$(条件 K) が成立しているため, P_0 は場に対して勝つことができる札を一枚も持っていないので P_0 は初期盤面において, パスをすることしかできない．また P_1 の手札のうち P_0 が勝つことができる札は高々 1 枚なのでそれ以外の札を全て出し終えた後最後にその札を出すことによって P_0 が手札に Y をかかえたまま空場をむかえることなく P_1 が勝つことができる．

(1)(2) より $|X_0| = 0$ のときいずれも P_1 が必勝戦略を持つことがわかる．

$|X_0| = k$ のとき成立すると仮定する．

(帰納ステップ)$|X_0| = k + 1$ のとき:

まず, 戦略 α を定義する：$\min X_1$ を除く手の中から出せる札のうち最小の手を選択する．

この戦略 α を取ることによって P_1 必勝であることを示す．ここでは以下の事実を用いる．

条件 K($|N(Y_0)| < 2$) より P_1 の出す手札のうち 8 切り札で勝つことができるのは高々 1 枚である．また, 手札の値は順序構造を持っているため 8 切り札で勝つことができる札があればそれは $\min\{X_1\}$ である．従って戦略 α を取る限り 8 切り札は相手の手札がなくなっているとき, あるいは空場においてのみ出すことができる．

まずこの盤面に対し (i)P_0 が何かしらの札を場に出した場合 (ii)P_0 がパスを選択した場合の場合分けを行いどちらの場合も P_1 が勝つことを示す.

(i)P_0 が何かしらの札を場に出した場合

仮定より P_0 は k + 1 枚の非 8 切り札と 8 切り札しか持たない. かつ場に対して勝つことができる 8 切り札を持っていない. また戦略 α をとっているため P_0 が何かしらの札を場に出した場合仮定よりその札は 8 切り札でない. また, その札に対し出せる札のうち最小の手を選択することによってその直後の場の状態は $|Y_0| > 0$ かつ $|N(Y_0)| < 2$ かつ $\max(Y_0) \leq \{r\}$ かつ $\mu(X_1 \cup Y_1, X_0) = |X_0| = k$ となるため仮定より P_1 の必勝である.

(ii)P_0 がパスを選択した場合

$|Y_0| > 0$ かつ $|N(Y_0)| < 2$ かつ $\max(Y_0) \leq \{r\}$ かつ $|X_0| = k+1$ の状態で P_1 の手番を迎える. このときやはり上記戦略 α をとることで $\mu_{G_0} \leq |X_0| - 1$ $\mu_{G_1} = |X_0| - 1$ となるので $\mu_{G_0} \leq \mu_{G_1}$ が成立する. したがって P_1 の手番であり局面 $|Y_0| > 0$ かつ $|N(Y_0)| < 2$ かつ $\mu_{G_0} \leq \mu_{G_1}$ かつ $|X_0| = k+1$ となる. この局面が後手必勝であることを $|X_1|$ に関する帰納法で示す.

(基礎ステップ) $|X_1| = 0$ のとき P_1 の手札には 8 切り札しかない. また上記より戦略 α において 8 切り札以外の札は出せないので成立. $|X_1| = s$ のとき成立すると仮定する. (帰納ステップ) $|X_1| = s+1$ のとき P_1 が空場であれば弱い札から二番目の札を出すという戦略をとる P_1 必勝であることを示す. P_0 がその札に対して何らかの札を出すとする. すると $|Y_0| > 0$ かつ $|N(Y_0)| < 2$ かつ $\max(Y_0) \leq \{r\}$ かつ $|X_0| = k+1$ かつ $\mu_{G_0} \leq \mu_{G_1}$ となり P_1 必勝である. また P_0 がパスを選択をしたとすると仮定よりこの局面もまた P_1 必勝であるしたがって任意の $|X_1|$ で $|Y_0| > 0$ かつ $|N(Y_0)| < 2$ かつ $\mu_{G_0} \leq \mu_{G_1}$ かつ $|X_0| = k+1$ となる局面が P_1 必勝である.

したがって $|Y_0| > 0$ かつ $|N(Y_0)| < 2$ かつ $\mu_{G_0} \leq \mu_{G_1}$ かつ $|X_0| = k+1$ のとき P_1 必勝が示された. したがって (i)P_0 が何かしらの札を場に出した場合 (ii)P_0 がパスを選択した場合どちらの場合も P_1 が勝つことが示された. したがって帰納法より本補題は示された. □

また以下の補題が成立する.

補題 2. $|Y_0| = 0, |N(Y_0)| > 1, \max(Y_0) > \{r\}, \mu(X_1 \cup Y_1, X_0) < |X_0|$ のいずれかが成立するとき $|Y_1| > 0$ かつ $\mu(X_0 \cup Y_0, X_1 \cup \{r\}) = |X_1 \cup \{r\}|$ かつ $|N(Y_1)| < 2$ または $\mu_{G_0} > \mu_{G_1}$ ならば P_0 必勝である.

証明. (基礎ステップ)$|X_1| = 0$ のとき:(1)$\mu(X_1 \cup Y_1, X_0) = |X_0|$ が成立するとき, $|Y_1| > 0$ かつ $\mu(X_0 \cup Y_0, X_1 \cup \{r\}) = |X_1 \cup \{r\}|$ かつ $|N(Y_1)| < 2$, また (2)$\mu_{G_0} > \mu_{G_1}$ が成立するときいずれも P_0 必勝であることを示す.

まず, 戦略 β を定義する：$\min(X_0)$ を除く手の中から出せる札のうち最小の手を選択する. この戦略 β を有効に使うことによって, P_0 必勝であることを示す. (1)$|Y_1| > 0$ かつ $\mu(X_0 \cup Y_0, X_1 \cup \{r\}) = |X_1 \cup \{r\}|$ かつ $|N(Y_1)| < 2$ のとき $\mu(X_0 \cup Y_0, X_1 \cup \{r\}) = |X_1 \cup \{r\}|$ より, P_0 は場の札 r に対して必ず勝つ手札を持っている. また, $|X_1| = 0$, $|N(Y_1)| < 2$ より P_1 は P_0 の手札のうち最も弱い札以外に対して勝つことができない. したがって P_0 が戦略 β を取ることによって P_1 は 8 切り札を出すことができない.

(2)$\mu_{G_0} > \mu_{G_1}$ が成立するとき μ_{G_1} は非負の値しか取らないので $\mu_{G_0} \geq 1$ になる. また, $|X_1| = 0$ より μ_{G_0} は高々 1 であり, かつ必ず場に対して勝てる札を 1 枚以上持っている. その札を場に出すことによって, 以降 $\mu_{G_1} = 0$ より P_1 は出すことができる札がないので P_0 は必勝戦略を持つ. (1)(2) より $|X_1| = 0$ のときいずれも P_0 が必勝戦略を持つことがわかる.

$|X_1| = k$ のとき成立すると仮定する.

(帰納ステップ)$|X_1| = k+1$ のとき:(1)$|Y_1| > 0$ かつ $\mu(X_0 \cup Y_0, X_1 \cup \{r\}) = |X_1 \cup \{r\}|$ かつ $|N(Y_1)| < 2$ が成立するとき, また (2)$\mu_{G_0} > \mu_{G_1}$ が成立するときいずれも P_0 必勝であることを示す. (1)$\mu(X_0 \cup Y_0, X_1 \cup \{r\}) = |X_1 \cup \{r\}|$ かつ $|N(Y_1)| < 2$ が成立するとき , P_0 が戦略 β を取ることによって後手必勝であることを示す. 仮定より P_1 は k + 1 枚の非 8 切り札と 8 切り札しか持たない. かつ P_0 が戦略 β を取り続ける限り場に対して勝つことができる 8 切り札を持っていない.

したがって先手が戦略 β をとった場面において $|Y_1| > 0$ かつ $|N(Y_1)| < 2$ かつ $\max(Y_1) \leq \{r\}$ かつ $\mu(X_0 \cup Y_0, X_1) = |X_1|$ が成立. したがって $|Y_1| > 0$ かつ $\mu(X_0 \cup Y_0, X_1 \cup \{r\}) = |X_1 \cup \{r\}|$ かつ $|N(Y_1)| < 2$ が成立するので P_0 必勝である. (2)$\mu_{G_0} > \mu_{G_1}$ が成立するとき, 戦略 γ を以下のように定義する:$\max(Y_0) > r|N(Y_0)| < 2$ であれば出すことのできる 8 切り札を出す. それ以外ならば出すことのできる札のうち最小の強さの札を選択する. この戦略をとることによって必勝であることを示す.

(i)P_1 が何らかの X_1 札を場に出した場合その局面は $|Y_0| = 0, |N(Y_0)| > 1, \max(Y_0) > \{r\}, \mu(X_1 \cup Y_1, X_0) < |X_0|$ のいずれかが成立し, $|X_1| = k$ かつ $\mu_{G_0} > \mu_{G_1}$ が成立するため P_0 は必勝戦略を持つ.

.(ii)P_1 が何らかの Y_1 札を場に出した場合その後の空場において最初に P_1 が非 8 切り札を出した局面においてその局面は $|Y_0| = 0, |N(Y_0)| > 1, \max(Y_0) > \{r\}, \mu(X_1 \cup Y_1, X_0) < |X_0|$ のいずれかが成立し, $|X_1| = k$ かつ $\mu_{G_0} > \mu_{G_1}$ が成立するため P_0 は必勝戦略を持つ.

(iii)P_1 がパスを選択した場合その後の局面で最初に P_1 が非 8 切り札を出した局面においてその局面は $|Y_0| = 0, |N(Y_0)| > 1, \max(Y_0) > \{r\}, \mu(X_1 \cup Y_1, X_0) < |X_0|$ のいずれかが成立し, $|X_1| = k$ かつ $\mu_{G_0} > \mu_{G_1}$ が成立するた

め P_0 は必勝戦略を持つ．したがって本補題は示された． □

補題 3. P_0 が先手プレイヤーとする．$|Y_1| = 0, \mu(X_0 \cup Y_0, X_1 \cup \{r\}) < |X_1 \cup \{r\}|, |N(Y_1)| > 1$ のいずれかが成立するとき $\mu_{G_0} \leq \mu_{G_1}$ ならば P_1 必勝である．

証明. 帰納法により示す (基本ステップ)$|X_0| = 0$ のとき P_1 が出せる札のうち $\min(X_1)$ を除く最小の手を常に選択する．という戦略をとるとき $\mu_{G_0} \leq \mu_{G_1} = 0$ より先手は常に場に出すことができる札がないので P_1 必勝である．(帰納ステップ)$|X_0| > 0$ のときこの局面において (iv)P_0 が非 8 切り札を出す, またはパスを選択した場合, その局面は $|Y_1| = 0, |N(Y_1)| > 1, \max(Y_1) > \{r\}, \mu(X_0 \cup Y_0, X_1) < |X_1|$ のいずれかが成立し, $\mu_{G_1} \cup \{r\}) > \mu(X_0 \cup Y_0, X_1 \setminus \min(X_1))$ が成立するため P_1 必勝である． (v)P_0 が 8 切り札を出した場合 P_0 がその後最初に非 8 切り札を出す, またはパスを選択した局面において $|Y_1| = 0, |N(Y_1)| > 1, \max(Y_1) > \{r\}, \mu(X_0 \cup Y_0, X_1) < |X_1|$ のいずれかが成立し, $\mu_{G_1} \cup \{r\}) > \mu(X_0 \cup Y_0, X_1 \setminus \min(X_1))$ が成立するため P_1 必勝である．したがって本補題は成立する． □

以上より定理 1 が成立する．

4. まとめ

本研究では, 組合せゲームである二人 8 切り単貧民の必勝プレイヤー判定とその必勝戦略導出を扱った．単貧民自体は大貧民解析のための足がかりとして定義された簡易版であり, また真の困難性は多人数版にあるが, そういった, より一般化した設定でのアルゴリズム設計に, 本研究で提案したアルゴリズムがサブルーチンとして有効に機能することを期待している．

参考文献

[1] Hopcroft, J. E and Karp, R.M. : An $n^{2.5}$ Algorithm for Maximum Matchings in Bipartite Graphs, SIAM J. comput., Vol. 2, pp. 225-231 1973

[2] 西野順二: 単貧民における多人数完全情報展開型ゲームの考察 (“An analysis on TANHINMIN game”), ゲームプログラミングワークショップ 2007 論文集, pp. 66 – 73, 2007.

[3] 木谷裕紀, 小野廣隆: 単貧民における必勝戦略と必勝判定問題に関する考察, 火の国情報シンポジウム 2016 論文集, 3B-3, 2016.

[4] K. Ayabe, S. Okubo, T. Nishino: Cluster analysis using N-gram statistics for daihinmin programs and performance evaluations. International Journal of Software Innovation, 4(2), 3357, 2016