

縦横方向の可能着手を All-ButNIM に変えた 竜王 NIM の一般化

末續 鴻輝^{1,a)}

概要： 竜王 NIM とは、盤上に将棋の駒である竜王を一つだけ配置し、二人のプレイヤーが交互にこの竜王を動かして、左上隅に到達させたプレイヤーが勝ちとなるゲーム（左上隅から遠ざかる着手は認められない）である。本ゲームは不偏（盤面に対する合法手がプレイヤーによって変化しない）な完全情報ゲームであり、それらの解析でよく用いられる Grundy 数を計算すると、竜王の座標に応じた興味深い関数になること、また、その変種も同様の性質を持っていることが本研究会にて報告されている。直近の発表で扱われた変種は、竜王の直進方向への移動距離を制限するものであったが、これは組合せゲーム理論の観点から考えると、二種類の制限 NIM を用いてルールを記述できる。ここで片方の制限 NIM を、制限 NIM と同様に組合せゲーム理論において重要な役割を果たす All-ButNIM に代えてゲームの性質を調べると、やはり一つ一般化として興味深い結果を得られたためここに紹介する。

キーワード： 組合せゲーム理論、不偏ゲーム、Grundy 数、All-But NIM、制限 NIM、竜王 NIM

1. 研究の背景

本研究では、Wythoff NIM の変種として研究されている竜王 NIM・制限竜王 NIM の一般化を行った。組合せゲーム理論が扱う完全情報ゲームのうち、引き分けのない正規形（最後の着手を行ったプレイヤーが勝ち）の不偏（プレイヤーに応じて、盤面に対する可能着手が異ならない）ゲームについては、盤面から Grundy 数を簡単に求めることができるかどうか、興味の対象となる。特に、Wythoff NIM については、後手必勝局面を求める閉じた式が知られていながら、その Grundy 数を求める閉じた式は長年知られておらず、関心を集めている。竜王 NIM は、Wythoff NIM とよく似ていながら、Grundy 数を完全に求める閉じた式が知られており、興味深い性質を持っているが、本研究においては、このゲームと、これまでよく知られた制限 NIM、All-But NIM との関連性を考察した。

1.1 Grundy 数

正規形の不偏ゲームの性質を解析する際に重要な要素が、局面に対して定義される Grundy 数である。詳細については [1], [2], [3] などに詳しい。本節では定理等の証明は略す。不偏ゲームの局面 g に対して、Grundy 数 $G(g)$ を

以下のように定義する。

定義 1. (Grundy 数)

$$G(g) = \text{mex}(\{G(g') \mid g' \text{ は } g \text{ の後続局面}\})$$

ただし、関数 mex の定義は以下の通り。

定義 2. (最小除外関数)

$$\text{mex}(S) = \min(\mathbb{N}_0 \setminus S)$$

なお、 $\mathbb{N}_0$ は非負整数の集合である。

引き分けのない正規形の不偏ゲームにおいて、P 局面と N 局面を以下のように再帰的に定義する。

定義 3.

- 任意の後続局面が N 局面ならば、その局面は P 局面である。
- ある後続局面が P 局面ならば、その局面は N 局面である。

この定義により、終了局面も P 局面となることに注意されたい。

さて、このとき、P 局面は後手に必勝戦略のある局面の集合、N 局面は先手に必勝戦略のある局面の集合となることが知られている。

Grundy 数の重要性の一つは、不偏ゲームの必勝戦略をどちらのプレイヤーが持っているか判定するために使えることにある。以下の事実がよく知られている。

定理 1. 不偏ゲームの局面 g は、 $G(g) = 0$ であるとき、かつその時に限り P 局面であり、そうでないとき、かつその

¹ 京都大学大学院人間・環境学研究科

^{a)} suetsugu.koki.72r@st.kyoto-u.ac.jp

ときに限り N 局面である。

さらに, Grundy 数を用いることで, ゲーム同士の和を
考えることができる。

定義 4. ゲーム A とゲーム B を並行にプレイし, プレイヤ
は自分の手番で, いずれかの盤面にのみ着手できるような
ゲームを考える. いずれの盤面にも着手できなくなったプ
レイヤの負けである. ゲーム A が局面 a であり, ゲーム B
が局面 b であるようなとき, このゲームの局面は $a + b$ で
あるという。

定義 5. 非負整数の桁ごとの排他的論理和 $\oplus$ を以下のよう
に定義する。

$$a \oplus b = \sum_{i=0}^n ((a_i + b_i) \bmod 2) 2^i$$

$$\text{ただし, } a = \sum_{i=0}^n a_i 2^i, b = \sum_{i=0}^n b_i 2^i \text{ で, } a_i, b_i \in \{0, 1\}.$$

なお, $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ であるため, 以下ではこ
れを簡単に $a \oplus b \oplus c$ と表記する。

定理 2. 二つの不偏ゲームの局面 g と h に対して,
 $G(g + h) = G(g) \oplus G(h)$ が成り立つ。

このように, Grundy 数はゲームを複数のゲームの和と
して表せるときに強力である。

不偏ゲームの理論が単純に適用されるゲームの一つは
NIM である。

定義 6. ゲーム NIM のルールを以下のように定める。

いくつかの石でできた山が数山ある. プレイヤはいずれ
か一つの山を選び, 好きな数だけ石を取る. 盤面から石を
なくしたプレイヤの勝ちである。

Grundy 数の定義より, 直ちに以下を言える。

定理 3. 石が n 個ある山が一つだけある NIM の局面の
Grundy 数は n である。

NIM において, プレイヤはいずれかの山を一つだけ選
び, 着手を行う. 従って NIM の局面は, 一山 NIM の局面
の和であると考えることができる. このことから, 以下の
定理が導かれる。

定理 4. 石の数が $n_1, n_2, \dots, n_k$ 個の山がある NIM の
Grundy 数は $n_1 \oplus n_2 \oplus \dots \oplus n_k$ である。

ここから, 以下の補題が導ける。

補題 1. 任意の非負整数 $m < n_1 \oplus n_2 \oplus \dots \oplus n_k$ に対して, ある
非負整数 $n'_i < n_i$ があって, $m = n_1 \oplus n_2 \oplus \dots \oplus n'_i \oplus \dots \oplus n_k$
を満たすような $i (1 \leq i \leq k)$ が, 少なくとも一つ存在する。

1.2 制限 NIM と All-But NIM

次に, 制限 NIM と All-But NIM について述べる. これ
らは不偏ゲームの研究のなかでよく知られており, 詳細は
やはり [1] や [3], [4] などに詳しい。

定義 7. 正整数の集合 S に対して, 制限 NIM SUBTRAC-
TION(S) を以下のように定義する。

いくつかの石でできた山が一つあり, プレイヤはここ
から, $s \in S$ 個の石を取る. 着手できなくなったプレイヤの
負けである。

以下では, S が有限集合の場合のみ制限 NIM というこ
ととする。

定義 8. 正整数の集合 S に対して, All-But NIM ALL-
BUT(S) を以下のように定義する。

いくつかの石でできた山が一つあり, プレイヤはここ
から $s \in \mathbb{N}^+ \setminus S$ 個の石を取る. 着手できなくなったプレイ
ヤの負けである。

ただし, $\mathbb{N}^+$ は正整数の集合である。

制限 NIM や All-But NIM に対して, Grundy 数列 $G(n)$
を以下のように定義する。

定義 9. 与えられたゲームに対して, 山の石の個数が n 個
のときの Grundy 数を $G(n)$ とする. 数列 $G(0), G(1), \dots$
をそのゲームの Grundy 数列と呼ぶ。

これら Grundy 数列は, 後述するように繰り返しのある
パターンとなる. そこで以下のように周期と加法周期につ
いて定義する。

定義 10.

- Grundy 数列 $G(0), G(1), G(2), \dots$ に対して, ある非
負整数 n_0 と正整数 p が存在して, $n \geq n_0$ のとき,
 $G(n + p) = G(n)$ を満たすならば, その Grundy 数列
は周期的であるという。
- Grundy 数列 $G(0), G(1), G(2), \dots$ に対して, ある非
負整数 n_0 と正整数 p, s が存在して, $n \geq n_0$ のとき,
 $G(n + p) = G(n) + s$ を満たすならば, その Grundy
数列は加法周期的であるという。
- 特に, $n_0 = 0$ ならば, それぞれ純周期的, 純加法周
期的であるという. また, ここで p を周期, s を増分と
呼ぶ. このとき, $G(0), G(1), \dots, G(p - 1)$ を一周期と
呼ぶ。

さらに, 本研究では繰り返される部分に, より細かい繰
り返しが存在することに着目する. そこで, 以下に内周期
を定義する。

定義 11. Grundy 数列が純周期的, または純加法周期的
であるとき, その一周期 $G(0), G(1), \dots, G(p - 1)$ に着目
する。

ある p の約数 p' が存在して, 純加法周期的な場合は増分
 s も p' の倍数であり, $0 \leq k < p$ に対して, $G(k) \bmod p' = k \bmod p'$ が成り立ち, かつ $k \bmod p' \neq p' - 1$ ならば
 $G(k + 1) = G(k) + 1$ が成り立つならば, その Grundy 数
列は内周期 p' を持つということとする。

補題 2. $G(n)$ が内周期 p を持つとする. $0 \leq x_1, x_2 \leq p - 1$
のとき, 任意の非負整数 x に対して, $\lfloor \frac{G(px + x_1)}{p} \rfloor = \lfloor \frac{G(px + x_2)}{p} \rfloor$
である。

Proof. 内周期の性質より, $G(px + x_1) = G(px) + x_1, G(px + x_2) = G(px) + x_2, G(px)$ は p の倍数. 従っ
て, $\lfloor \frac{G(px + x_1)}{p} \rfloor = \lfloor \frac{G(px + x_2)}{p} \rfloor$ である。

ただし, $\lfloor \rfloor$ は切り捨て関数である。□

制限 NIM と All-But NIM について、以下の性質が知られている。

定理 5. 制限 NIM の Grundy 数列は周期的となる。

定理 6. All-But NIM の Grundy 数列は加法周期的となる。

1.3 竜王 NIM と制限竜王 NIM

不偏ゲームの Grundy 数は、ゲームの局面から Grundy 数を求める閉じた式が知られているものもあれば、そうでないものもある。Wythoff NIM はそのようなゲームの中でも有名なものの一つである。後手必勝局面を求める閉じた式については知られているが、局面から Grundy 数を求める閉じた式は知られておらず、興味深い未解決問題となっている。そのため、様々な関連研究がなされている。詳細は [2], [3] などに詳しい。

竜王 NIM もそのような関連研究の一つである。古くは [5] に同様のゲームが定義され、P 局面を求める閉じた式が求められている。さらにこのゲームの Grundy 数は [6], [7] において閉じた式が求められ、また将棋の竜王を用いてゲームの意味付けができるために、竜王 NIM の名が与えられた。

定義 12. Wythoff Nim のルールを以下のように定義する。いくつかの石でできた山が二つある。プレイヤーはいずれかの山から任意の個数の石を取るか、二つの山から同時に同じ数だけ石を取る。石を取れなくなったプレイヤーの負けである。

Wythoff NIM については以下のように、P 局面を表す閉じた式が知られている。

定理 7. 片方の山に x 個、もう片方の山に y 個の石があるとき、この局面が P 局面となるのは

ある非負整数 n に対して、

$(x, y) = ([n\phi], [n\phi + n])$ または $(x, y) = ([n\phi + n], [n\phi])$ となるとき、かつそのときに限る。

ただし、 ϕ は黄金比である。

Wythoff NIM の Grundy 数を表す閉じた式は、長年にわたり未解決となっている。一方、以下に示す竜王 NIM は、Wythoff NIM と似た側面を持ちながら、Grundy 数を表す閉じた式が特定されている。

定義 13. 非負整数 p に対して、竜王 NIM(p) のルールを以下のように定める。いくつかの石でできた山が数個ある。プレイヤーはいずれかの山から任意の個数石を取るか、両方の山から合計 p 個未満石を取る。石を取れなくなったプレイヤーの負けである。

定理 8. (宮寺ら 2016)

竜王 NIM(p) の片方の山に石が x 個、もう片方の山に石が y 個あるとき、Grundy 数は

$p(\lfloor \frac{x}{p} \rfloor \oplus \lfloor \frac{y}{p} \rfloor) + ((x + y) \bmod p)$ となる。

このゲームが竜王 NIM と呼ばれる所以は、 $p = 3$ の時に、将棋の竜王の駒を将棋盤の上に置き、お互いのプレイ

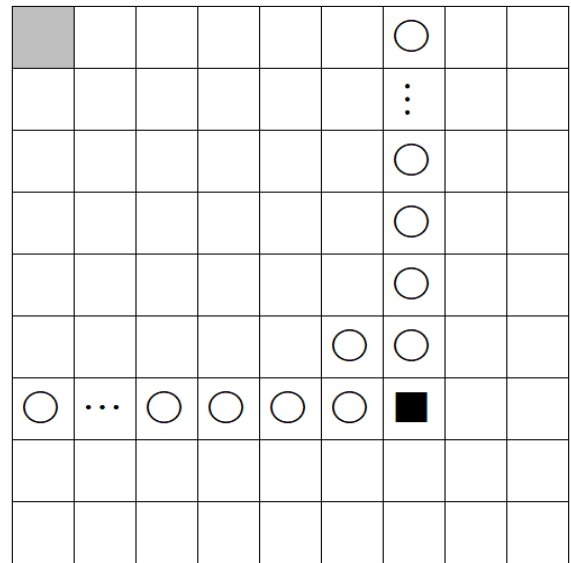


図 1 竜王 NIM(3) の意味付け。左、上、左上方向にしか動けない竜王を盤面に置き交互に動かし、左上マスに到達したプレイヤーの勝ちとなる。

$y \setminus x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	0	4	5	3	7	8	6
2	2	0	1	5	3	4	8	6	7
3	3	4	5	0	1	2	9	10	11
4	4	5	3	1	2	0	10	11	9
5	5	3	4	2	0	1	11	9	10
6	6	7	8	9	10	11	0	1	2
7	7	8	6	10	11	9	1	2	0
8	8	6	7	11	9	10	2	0	1

表 1 $0 \leq x, y \leq 8$ の範囲における、竜王 NIM(3) の Grundy 数を表す表。

ヤが交互にその駒を左上のマス目指して動かしていくようなゲームと同値となるからである (図 1, 表 1 を参照のこと)。

これは、Wythoff NIM が同様の考え方で、竜王ではなくクイーンを用いる場合と対比的である。

更に、それぞれの山から取れる石の個数を制限したときも、以下のような結果がある [8]。

定義 14. 制限竜王 NIM(p, q) のルールを以下に定める。竜王 NIM(p) において、一つだけの山を選択したとき、 q 個

未満の石を取ることにしか許されていないゲームを制限竜王 NIM(p, q) と呼ぶ。

定理 9. (末續, 福井 2017)

制限竜王 NIM(p, q) について, 片方の山に x 個, もう片方の山に y 個石があるとすると, p が q の約数のとき, この盤面の Grundy 数は $p(\lfloor \frac{x \bmod q}{p} \rfloor \oplus \lfloor \frac{y \bmod q}{p} \rfloor) + ((x+y) \bmod p)$ となる。

2. 本研究について

上述した制限竜王 NIM は, 見方を変えれば, それぞれの山について制限 NIM として扱うか, 二つの山を合わせた大きな山と考えて制限 NIM の着手を行うかの二通りが許されたゲームと考えることもできる。本研究では, この考え方を一般化する。

本研究では, 以下のように新しいゲームを定義する。

定義 15. ゲーム $RGAME(GAME_0; GAME_1, GAME_2)$ のルールについて, 以下のように定義する。ここで, $GAME_0$, $GAME_1$, $GAME_2$ にはある制限 NIM かある All-But NIM のルールが入るとする。いくつかの石でできた二つの山 1 と山 2 がある。プレイヤーは, 山 1 を選んで, $GAME_1$ に従って着手するか, 山 2 を選んで, $GAME_2$ に従って着手するか, 二つの山を一つの大きな山とみなして, $GAME_0$ に従って着手を行う。着手ができなくなったプレイヤーの負けである。

制限竜王 NIM はこの表記を用いて表現できる。

例 1. 制限竜王 NIM(3,6) は,

$RGAME(\text{SUBTRACTION}(\{1,2\});$
 $\text{SUBTRACTION}(\{1,2,3,4,5\}),$
 $\text{SUBTRACTION}(\{1,2,3,4,5\}))$ として表される。

本研究の主要な結果は, $GAME_1$ と $GAME_2$ を All-But NIM にしても, 一定の条件を満たせば制限竜王 NIM のときと同様の結果を得られるということである。以下にその結果を示す。

定理 10. $RGAME(GAME_0; GAME_1, GAME_2)$ について, $GAME_0$ は $\text{SUBTRACTION}(\{1, 2, \dots, p-1\})$ であるとする。

$GAME_1$ と $GAME_2$ が同じ内周期 p を持つとき, 山 1 に石が x 個, 山 2 に石が y 個ある局面の Grundy 数を $g(x, y)$ とすると, 以下が成り立つ。

$$g(x, y) = p(\lfloor \frac{G_1(x)}{p} \rfloor \oplus \lfloor \frac{G_2(y)}{p} \rfloor) + ((x+y) \bmod p)$$

ただし, $G_1(n)$ は $GAME_1$ に対する Grundy 数列, $G_2(n)$ は $GAME_2$ に対する Grundy 数列とする。

Proof. $x+y$ に関する帰納法によって示す。

$k = p(\lfloor \frac{G_1(x)}{p} \rfloor \oplus \lfloor \frac{G_2(y)}{p} \rfloor) + ((x+y) \bmod p)$ とおく。任意の $k' < k$ に対して, $g(x, y)$ が k' にならないことを示す。すなわち, もとの局面から遷移可能な局面で, Grundy 数が k' となるものが存在することを示す。

$k_1 = p(\lfloor \frac{G_1(x)}{p} \rfloor \oplus \lfloor \frac{G_2(y)}{p} \rfloor), k_2 = (x+y) \bmod p$ とおく。
 $k = k_1 + k_2$ である。

- $k_1 \leq k' < k$ のとき。

$k' = k_1 + k'_2$ とおく。 $k'_2 < k_2$ である。 $x \bmod p = x_p, y \bmod p = y_p$ とおくと, $k_2 = (x_p + y_p) \bmod p \leq x_p + y_p$ 。ここで, $k'_2 < k_2 \leq x_p + y_p$ より, $0 < k_2 - k'_2 \leq x_p + y_p$ 。また, $k_2 < p$ から, $k_2 - k'_2 < p$ でもあるから, ある α と β が存在して, $\alpha + \beta = k_2 - k'_2 < p, 0 \leq \alpha \leq x_p, 0 \leq \beta \leq y_p$ とできる。従って, $GAME_0$ に従い二つの山の石の個数を, x から $x - \alpha$, y から $y - \beta$ とすることができ, またその結果の Grundy 数は帰納法の仮定から,

$$\begin{aligned} g(x - \alpha, y - \beta) &= p(\lfloor \frac{G_1(x - \alpha)}{p} \rfloor \oplus \lfloor \frac{G_2(y - \beta)}{p} \rfloor) + ((x - \alpha + y - \beta) \bmod p) \\ &= p(\lfloor \frac{G_1(x)}{p} \rfloor \oplus \lfloor \frac{G_2(y)}{p} \rfloor) + (((x+y) - (k_2 - k'_2)) \bmod p) \\ &= k_1 + k'_2 \\ &= k' \text{ となる。} \end{aligned}$$

なお, 二行目から三行目への式変形で補題 2 を用いた。

- $k' < k_1$ のとき。

$\lfloor \frac{k'}{p} \rfloor < \lfloor \frac{G_1(x)}{p} \rfloor \oplus \lfloor \frac{G_2(y)}{p} \rfloor$ だから, 補題 1 より, ある非負整数 $X < \lfloor \frac{G_1(x)}{p} \rfloor \oplus \lfloor \frac{G_2(y)}{p} \rfloor$ があって, $\lfloor \frac{k'}{p} \rfloor = X \oplus \lfloor \frac{G_2(y)}{p} \rfloor$ または, ある非負整数 $Y < \lfloor \frac{G_2(y)}{p} \rfloor$ があって, $\lfloor \frac{k'}{p} \rfloor = \lfloor \frac{G_1(x)}{p} \rfloor \oplus Y$ の少なくともいずれかが成り立つ。 X が存在するとして一般性を失わない。

このとき, α を適当にとると, $0 \leq \alpha < p$ かつ, $(y + \alpha) \bmod p = k' \bmod p$ とできるので, $G_x = pX + \alpha$ とすると, $G_x < G_1(x)$ から, ある $x' < x$ が存在して $G_1(x') = G_x$ かつ $GAME_1$ に従って x を x' に変える着手が存在する。このとき, $g(x', y)$
 $= p(\lfloor \frac{G_1(x')}{p} \rfloor \oplus \lfloor \frac{G_2(y)}{p} \rfloor) + ((x' + y) \bmod p)$
 $= p(X \oplus \lfloor \frac{G_2(y)}{p} \rfloor) + ((\alpha + y) \bmod p)$
 $= p(\lfloor \frac{k'}{p} \rfloor) + (k' \bmod p)$
 $= k' \text{ となる。}$

次に, もとの局面から遷移可能な局面で, Grundy 数が k となる局面が存在しないことを示す。 x を $GAME_1$ に従い x' に変える着手では, $G_1(x) \neq G_1(x')$ が成り立つので, $\lfloor \frac{G_1(x')}{p} \rfloor \oplus \lfloor \frac{G_2(y)}{p} \rfloor \neq k_1$ または $(G_1(x') + G_2(y)) \bmod p = (x' + y) \bmod p \neq k_2$ の少なくともいずれかが成り立つ。従って, 帰納法の仮定より, $g(x', y) = p(\lfloor \frac{G_1(x')}{p} \rfloor \oplus \lfloor \frac{G_2(y)}{p} \rfloor) + ((x' + y) \bmod p) \neq k$ である。

y を $GAME_2$ に従い y' に変える着手も同様である。

また, x と y を $GAME_0$ に従い同時に減らし x', y' とする着手については, $GAME_0$ は $\text{SUBTRACTION}(\{1, 2, \dots, p-1\})$ であるから, $(x+y) \bmod p \neq (x'+y') \bmod p$ ゆえに, 帰納法の仮定より, $g(x', y') = p(\lfloor \frac{G_1(x')}{p} \rfloor \oplus \lfloor \frac{G_2(y')}{p} \rfloor) + ((x' + y') \bmod p) \neq k$ となる。

以上により, $g(x, y) = k$ となることが示された。

☐

内周期を持つ All-But NIM は多くあるが，特に集合の位数が 2 までの場合は必ずその条件を満たすことが Siegel によって示されている [4]．その結果は以下の通りである．

定理 11. (Siegel,2005)

ALLBUT($\{k\}$) の Grundy 数列は純加法周期的で、増分 k 周期 $2k$ で一周期が $012 \dots (k-1)012 \dots (k-1)$ となる.

ALLBUT($\{k, m\}$) の Grundy 数列は純加法周期的で,

- $m = 2k$ のとき, 増分 k 周期 $3k$ で一周期が $012 \dots (k-1)012 \dots (k-1)012 \dots (k-1)$ となる.
- それ以外のとき, 増分 k 周期 $2k$ で一周期が $012 \dots (k-1)012 \dots (k-1)$ となる.

この非負整数から Grundy 数への関数は，表記を変えれば以下のように書ける。

系 1. ALLBUT($\{k\}$) について, Grundy 数列 $G(n)$ は,
 $G(n) = (n \bmod k) + k \lfloor \frac{n}{2k} \rfloor$ となる.

ALLBUT($\{k,m\}$) の Grundy 数列 $G(n)$ は,

- $m = 2k$ のとき, $G(n) = (n \bmod k) + k\lceil \frac{n}{3k} \rceil$ となり,
 - それ以外のとき, $G(n) = (n \bmod k) + k\lceil \frac{n}{2k} \rceil$ となる.
- これらの知見を活かせば,

RGAME(SUBTRACTION($\{1,2,3\}$);ALLBUT($\{8\}$), ALLBUT($\{4,8\}$)) (表 2, 図 2 を参照) などのゲームも, Grundy 数を表す閉じた式を得ることができる.

例 2. $\text{RGAME}(\text{SUBTRACTION}(\{1,2,3\}); \text{ALLBUT}(\{8\}), \text{ALLBUT}(\{4,8\}))$ において, 山 1 に x 個, 山 2 に y 個石があるときの Grundy 数 $g(x, y)$ は,

$$g(x, y) = p(\lceil \frac{G_1(x)}{4} \rceil \oplus \lceil \frac{G_2(y)}{4} \rceil) + ((x + y) \bmod 4)$$

ただし, $G_1(x) = (x \bmod 8) + 8[\frac{x}{16}]$,

$$G_2(y) = (y \bmod 4) + 4\lceil \frac{y}{12} \rceil \text{ である.}$$

また, 山の数を 3 以上にしても定理 10 と同様の議論を行うことで, 以下の結果を得ることができる.

定理 12. 新しいゲームとして,

$RGAMES(GAME_0; GAME_1, GAME_2, \dots, GAME_m)$ を以下のように定める．いくつかの石でできた山が m 個あり，プレイヤーは山 1 に対して $GAME_1$ のルールに従って着手するか，山 2 に対して $GAME_2$ のルールに従って着手するか， $\dots$ ，山 m に対して $GAME_m$ のルールに従って着手するか，全ての山の石を合計して一つの山とみなして $GAME_0$ のルールに従って着手する．どの山にも着手できなくなったプレイヤーの負けである．

$GAME_1, GAME_2, \dots, GAME_m$ が同じ内周期 p を持つとき, $GAME_0$ が $SUBTRACTION(\{1, 2, \dots, p-1\})$ ならば, 山 1, 山 2, $\dots$, 山 m に $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 個石がある局面の Grundy 数は

$$p\left(\left[\frac{G_1(x_1)}{p}\right] \oplus \left[\frac{G_2(x_2)}{p}\right] \oplus \cdots \oplus \left[\frac{G_m(x_m)}{p}\right]\right) + ((x_1 + x_2 + \cdots + x_m) \bmod p)$$

となる。

[illegible]

図 2 駒を動かすゲームとみなした場合の
 $\text{RGAME}(\text{SUBTRACTION}(\{1,2,3\}); \text{ALLBUT}(\{8\}),$
 $\text{ALLBUT}(\{4,8\}))$ に対応する駒.

ただし, $G_1(n), G_2(n), \dots, G_m(n)$ はそれぞれ $GAME_1, GAME_2, \dots, GAME_m$ の Grundy 数列であるとする.

3. まとめと今後の課題

本研究においては、これまで知られていた All-But NIM や制限 NIM の理論と、竜王 NIM の理論を組合せて新たな結果を得た。複数の山を用いるゲームについては、これまでそれぞれの山が完全に独立した場合についてよく知られていたわけであるが、本研究においては二つの山から同時に石を減らす場合も考慮し、竜王 NIM や Wythoff NIM の議論を拡張することができた。このように二つの山を同時に動かすこともできるようなゲームについては未解明な部分も多く、今後も引き続き研究を進めたい。

参考文献

- [1] M. H. Albert, R. J. Nowakowski, D. Wolfe(川辺 浩之訳): 組合せゲーム理論入門 勝利の方程式, 共立出版 (2011)
- [2] Aaron N. Siegel, *Combinatorial Game Theory (Graduate Studies in Mathematics)*, American Mathematical Society(2013)
- [3] 佐藤 文広: 石取りゲームの数学 ゲームと代数の不思議な関係, 数学書房 (2014)
- [4] Angela Siegel, Finite excluded subtraction sets and infinite modular Nim, Master's thesis, Dolhousie University(2006)
- [5] J. C. Holladay, Some generalizations of Wythoff's game and other related games, *Amer. Math. Monthly*, Vol.41, pp.7-13(1968)
- [6] 宮寺良平, 福井昌則, 井上理哲人, 中屋悠資, 戸國友貴: Corner the Queen problem の変種についての研究, 情報処理学会研究報告, Vol. 2016-GI-35, No.6, pp.1-6(2016)
- [7] Ryhohei Mivadera, Masanori Fukui, Yushi Nakaya, Yuki

$y \backslash x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
0	0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	2	3	0	5	6	7	4	1	2	3	0	5	6	7	4	9	10	11	8	13	14	15	12	9	10	11	8	13	14	15	12
2	2	3	0	1	6	7	4	5	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13	10	11	8	9	14	15	12	13
3	3	0	1	2	7	4	5	6	3	0	1	2	7	4	5	6	11	8	9	10	15	12	13	14	11	8	9	10	15	12	13	14
4	0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	8	9	10	11	12	13	14	15
5	1	2	3	0	5	6	7	4	1	2	3	0	5	6	7	4	9	10	11	8	13	14	15	12	9	10	11	8	13	14	15	12
6	2	3	0	1	6	7	4	5	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13	10	11	8	9	14	15	12	13
7	3	0	1	2	7	4	5	6	3	0	1	2	7	4	5	6	11	8	9	10	15	12	13	14	11	8	9	10	15	12	13	14
8	0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	8	9	10	11	12	13	14	15
9	1	2	3	0	5	6	7	4	1	2	3	0	5	6	7	4	9	10	11	8	13	14	15	12	9	10	11	8	13	14	15	12
10	2	3	0	1	6	7	4	5	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13	10	11	8	9	14	15	12	13
11	3	0	1	2	7	4	5	6	3	0	1	2	7	4	5	6	11	8	9	10	15	12	13	14	11	8	9	10	15	12	13	14
12	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11	12	13	14	15	8	9	10	11
13	5	6	7	4	1	2	3	0	5	6	7	4	1	2	3	0	13	14	15	12	9	10	11	8	13	14	15	12	9	10	11	8
14	6	7	4	5	2	3	0	1	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9	14	15	12	13	10	11	8	9
15	7	4	5	6	3	0	1	2	7	4	5	6	3	0	1	2	15	12	13	14	11	8	9	10	15	12	13	14	11	8	9	10
16	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11	12	13	14	15	8	9	10	11
17	5	6	7	4	1	2	3	0	5	6	7	4	1	2	3	0	13	14	15	12	9	10	11	8	13	14	15	12	9	10	11	8
18	6	7	4	5	2	3	0	1	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9	14	15	12	13	10	11	8	9
19	7	4	5	6	3	0	1	2	7	4	5	6	3	0	1	2	15	12	13	14	11	8	9	10	15	12	13	14	11	8	9	10
20	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11	12	13	14	15	8	9	10	11
21	5	6	7	4	1	2	3	0	5	6	7	4	1	2	3	0	13	14	15	12	9	10	11	8	13	14	15	12	9	10	11	8
22	6	7	4	5	2	3	0	1	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9	14	15	12	13	10	11	8	9
23	7	4	5	6	3	0	1	2	7	4	5	6	3	0	1	2	15	12	13	14	11	8	9	10	15	12	13	14	11	8	9	10
24	8	9	10	11	12	13	14	15	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	6	7
25	9	10	11	8	13	14	15	12	9	10	11	8	13	14	15	12	1	2	3	0	5	6	7	4	1	2	3	0	5	6	7	4
26	10	11	8	9	14	15	12	13	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5	2	3	0	1	6	7	4	5
27	11	8	9	10	15	12	13	14	11	8	9	10	15	12	13	14	3	0	1	2	7	4	5	6	3	0	1	2	7	4	5	6
28	8	9	10	11	12	13	14	15	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2	3	4	5	6	7
29	9	10	11	8	13	14	15	12	9	10	11	8	13	14	15	12	1	2	3	0	5	6	7	4	1	2	3	0	5	6	7	4
30	10	11	8	9	14	15	12	13	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5	2	3	0	1	6	7	4	5
31	11	8	9	10	15	12	13	14	11	8	9	10	15	12	13	14	3	0	1	2	7	4	5	6	3	0	1	2	7	4	5	6

表 2 $0 \leq x, y \leq 31$ の範囲における, $\text{RGAME}(\text{SUBTRACTION}(\{1,2,3\}); \text{ALLBUT}(\{8\}), \text{ALLBUT}(\{4,8\}))$ の Grundy 数を表す表. 内周期 4 に対応して, 4×4 の繰り返し部分が現れることが確認できる.

Tokuni, A generalized Ryuoh-Nim: A variant of the classical game of Wythoff Nim, 情報処理学会研究報告, Vol. 2016-GI-36, No.14, pp.1-3(2016)

- [8] 末續鴻輝, 福井昌則: 駒の動きを制限した Wythoff NIM の変種に関する研究, 情報処理学会研究報告, Vol. 2017-GI-38, No.3, pp.1-4(2017)