

# 等価組織を除外した織物組織図の数え上げ -たて糸本数とよこ糸本数がともに素数の場合-

松浦 勇<sup>1,a)</sup>

**概要:** よこ糸本数  $m$ , たて糸本数  $n$  から成る織物組織  $W$  を考える. 一般に織物組織の個数は,  $m$  と  $n$  が大きくなるにつれて指数関数的に増加する.  $m, n$  の関数として織物組織の個数を与える数式が知られているが, この式は等価組織を除外せずに数えている. ここで, 織物組織  $W$  と  $W'$  が等価であるとは,  $W$  を単位としてそれを繰り返して製織される織物の模様と,  $W'$  を単位としてそれを繰り返して製織される織物の模様が一致する場合をいう. 等価組織を除外するために, 先行研究では特定の  $m, n$  に対して計算機を用いて織物組織の数え上げを行っている. これらの研究で, 数え上げの対象としている織物組織のよこ糸本数とたて糸本数の積  $mn$  の最大値は 18 (よこ糸 3 本, たて糸 6 本) である. 本論文では,  $m, n$  がともに素数の場合の, 等価組織を除外した織物組織の個数を与える式を示す.

キーワード: 織物組織図, 数え上げ, 等価組織

## Counting non-equivalent weave diagrams -When the numbers of warp and weft yarns are prime-

MATSUURA ISAMU<sup>1,a)</sup>

**Abstract:** In this paper, we count the number of weave diagrams consisting of  $m$  weft yarns and  $n$  warp yarns. The number of weave diagrams increases exponentially with  $m$  and  $n$ . An equation is known for counting the number of weave diagrams, but this equation counts the number including equivalent weave diagrams. Weave diagrams  $W$  and  $W'$  are equivalent if both generate fabrics of the same pattern. In preceding researches, a computer is used for counting the number of weave diagrams in order to exclude equivalent weave diagrams. The weave diagrams so far investigated are of particular(not general) size and the product of  $m$  and  $n$  is at most 18( $m = 3, n = 6$ ). In this paper, we give an equation that counts the number of non-equivalent weave diagrams for the case that both  $m$  and  $n$  are prime numbers.

**Keywords:** Weave diagram, Counting, Equivalent weave diagram

### 1. はじめに

織物製造においては, 平織, 綾織, 朱子織が三原組織と呼ばれ, 最も基本的なものである. 更に, 三原組織を基に発展した変化組織, 多重組織などが多数考案されている. 織物の設計者は, 製造する織物が満たすべき実用性能, 審

美性, 生産性などを考慮して, 糸の素材, 太さ, 糸の密度などとともに, 適切な織物組織を選択している. 本論文の目的は, 与えられたたて糸本数とよこ糸本数で構成される織物組織の個数を数え上げることである. これは, 織物組織の性質を考察する上で重要で, また理論的にも興味深い.

これまでに, よこ糸本数  $m$ , たて糸本数  $n$  の関数として織物組織の個数を与える数式が知られているが, この式では, 等価組織を除外せずに数えている. 等価組織を除外するために, 従来の研究では, 特定の  $m, n$  に対して計算機を用いて織物組織の数え上げを行っている. これらの研究

<sup>1</sup> あいち産業科学技術総合センター  
Aichi Center for Industry and Science Technology, Miyaura  
35, Yamato-cho, Ichinomiya-shi, Aichi 491-0931, Japan

a) isamu\_matsuura@aichi-inst.jp

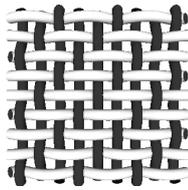


図 1 織物における糸の交錯  
Fig. 1 Yarn interlacement in fabric.

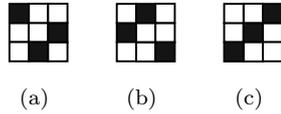


図 2 等価組織図  
Fig. 2 Equivalent weave diagrams.

で数え上げの対象としている織物組織のたて糸本数とよこ糸本数の積  $mn$  の最大値は 18 (よこ糸 3 本, たて糸 6 本) である. 本論文では, よこ糸本数  $m$  とたて糸本数  $n$  がともに素数の場合の, 等価組織を除外した織物組織の個数を数え上げる数式を示す. 具体的には,  $m \neq n$  と  $m = n$  の 2 つの場合に分けて, 2 つの式を示す. 更に, 実際に  $m \leq 7$ ,  $n \leq 7$  の場合の織物組織の個数を計算した結果を示す.

本論文の構成は次の通りである. 第 2 章で先行研究の概要について解説し, 議論に必要ないくつかの定理を示す. 第 3 章で織物組織を数え上げる数式を示し, 実際に数え上げた結果を示す. 第 4 章はまとめである.

## 2. 準備

### 2.1 組織図とブール行列

織物における糸の交錯の状態は, 通常, たて糸本数, よこ糸本数で表される大きさをひとつの単位として, その繰り返りとなっている. その最小単位を完全組織と呼ぶ. 図 1 の織物では, 黒で示すたて糸 3 本, 白色で示すよこ糸 3 本からなる完全組織が繰り返されている.

完全組織における糸の交錯の状態は, 織物組織図 (以下, 組織図と呼ぶ) で表現される. たて糸がよこ糸の上を通っている交差点 (たて糸浮き) を ■ で表し, よこ糸がたて糸の上を通っている交差点 (よこ糸浮き) を □ で表す. 組織図は同一織物内でも位置の取り方によって違って見える. これらを本論文では等価組織と呼ぶ (文献 [1] では第一種等価組織と呼んでいる). 図 1 の織物の 3 通りの等価組織を図 2 に示す. 組織図  $D$  と  $D'$  とが等価組織であるとすると,  $D'$  は  $D$  を 2 次元的に循環シフトして得られたものになっている (これについては後で詳しく述べる).

各要素が 0 または 1 である行列をブール行列と呼ぶ. 本論文では組織図  $D$  をブール行列  $W$  で表す (組織図における ■ と □ をそれぞれ 1 と 0 で表す). また, 組織図  $D$  とブール行列  $W$  を同一視することもある.  $m$  行  $n$  列のブール行列  $W$  において,  $W$  の  $i$  行目の行ベクトルを  $W_{i,*}$ ,  $j$

列目の列ベクトルを  $W_{*,j}$  で表す. ブール行列において, すべての要素が 0 である行 (列) を 0 行 (0 列) と呼ぶ. また, すべての要素が 1 である行 (列) を 1 行 (1 列) と呼ぶことにする. 0 行 (列) と 1 行 (列) をナル行 (列) と呼ぶ. ナル行 (列) は交錯しないよこ糸 (たて糸) に対応する. 一般に, 組織図はナル行とナル列をともに含まない. また,  $m \geq 2$ ,  $n \geq 2$  である.

組織図  $W$  により生成される織物  $\mathcal{W}$  も  $m'$  行  $n'$  列のブール行列とみなす ( $m' \gg m$ ,  $n' \gg n$ ).  $\mathcal{W}$  は  $W$  を格子状に繰り返してできている.  $\mathcal{W}$  において,  $W$  を  $W_{0,0}$  と表し,  $W_{0,0}$  の右隣に繰り返される  $W$  のコピーを  $W_{0,1}$ ,  $W_{0,2}$ , ...,  $W_{0,k}$ , ... と表記する.  $W$  の真下の  $W$  のコピーを  $W_{1,0}$  と表記し,  $W_{1,0}$  の右隣に繰り返される  $W$  のコピーを  $W_{1,1}$ ,  $W_{1,2}$ , ...,  $W_{1,k}$ , ... と表記する.  $W$  の  $(0,0)$  要素を  $W$  の始点と呼ぶことにすると,  $W$  の始点が  $\mathcal{W}$  の  $(0,0)$  要素であり,  $W_{0,k}$  の始点が  $\mathcal{W}$  の  $(0, kn)$  要素である.  $\mathcal{W}$  の  $(s,t)$  要素を始点とする  $m$  行  $n$  列の行列 ( $W$  の小行列) を  $\mathcal{W}^{[s,t]}$  と表記する.

### 2.2 先行研究

Gu and Greenwood [2] は,  $m$  と  $n$  の関数として織物組織の個数  $N$  を与える数式を次のようにして得た.  $m$  行  $n$  列のブール行列のすべての場合の数は  $I = 2^{mn}$  である.  $A$  をナル行とナル列の両方を含む場合の数とする. また,  $B$  を, ナル行を含み, かつナル列を含まない場合の数とする. さらに,  $C$  を, ナル列を含み, かつナル行を含まない場合の数とすると,  $I = A + B + C + N$  である (ただし,  $N$  には等価組織が含まれている). よって

$$N = (B + N) + (C + N) - I + A \quad (1)$$

$$= (2^m - 2)^n + (2^n - 2)^m - 2^{mn} + A$$

である.  $A$  は包除原理により次式のように計算される.

$$A = 2 \sum_{q=1}^n \sum_{r=1}^m (-1)^{q+r} \frac{n! m!}{q! r! (n-q)! (m-r)!} 2^{(n-q)(m-r)} \quad (2)$$

交錯しないたて糸 (0 列) を含む場合, 交錯しないよこ糸は 0 行に限られる. 同様に, 交錯しないたて糸 (1 列) を含む場合, 交錯しないよこ糸は 1 行に限られる. 式 (2) 右辺先頭の 2 は, これらの 2 通りの場合を表している. 式 (1) に  $m = 4$ ,  $n = 4$  を代入すると,  $N = 22,874$  が得られる. ここから等価組織を除外すると, 1,446 となる [1]. つまり式 (1) で与えられる織物の個数と, 等価組織を除外した織物の個数には大きな差がある.

等価組織を除外するために, 従来の研究では特定の  $m$ ,  $n$  に対して手作業, または計算機を用いて織物組織図の数え上げを行っている. これらの研究では等価組織のみでなく, 他の観点から等価だとみなせるものも除外して数え上

げを行っている [1-4]. 呉ら [4] は, よこ糸 3 本, たて糸 3 本の織物組織に対して, 等価組織とともに表裏の関係にある織物組織を除外している. 高寺ら [1] は, よこ糸 4 本, たて糸 4 本の織物組織を対象としている. よこ糸方向を  $x$  軸, たて糸方向を  $y$  軸, 織物面に垂直な面を  $z$  軸とすると,  $x$  軸,  $y$  軸,  $z$  軸それぞれの軸まわりに 180 度回転して同一となるものも, 除外している. Gu and Greenwood [2] は, よこ糸 2 本の場合に, たて糸 2 本, 3 本, 4 本, 5 本の 4 通り, よこ糸 3 本の場合に, たて糸 3 本, 4 本, 5 本の 3 通りの大きさの織物組織を対象に織物組織の数え上げを行っている. そこでは,  $x$  軸に対して対称,  $y$  軸に対して対称,  $z$  軸まわりに 180 度回転して同一となるもの, また, それぞれのたて糸浮きとよこ糸浮きとを反転させたものも同一として, 除外している. さらに, 織物組織が, より小さな織物組織の繰り返しとなっているものを除外している. Dawson [3] は, よこ糸 2 本の場合には, たて糸を 2 本から 8 本に変化させた 7 通り, よこ糸 3 本の場合には, たて糸を 3 本から 6 本に変化させた 4 通り, それに, よこ糸 4 本, たて糸 4 本の 1 通りの計 12 通りの大きさの織物組織を対象としている. Gu and Greenwood [2] の手法に加えて, よこ糸本数とたて糸本数が等しい場合には,  $z$  軸まわりの 90 度回転, 270 度回転, 2 本の対角線に対して対称となる織物組織, また, それぞれのたて糸浮きとよこ糸浮きとを反転させたものも同一として, 除外している. さらに, 織物組織が, より小さな織物組織の繰り返しとなっているものを除外している.

本論文では, 交錯しない糸を含むため織物として成立しないものと等価組織を除外した織物組織の個数を与える式を考察する.

### 2.3 整数の合同

整数全体の集合を  $\mathbb{Z}$  と書く.  $a, b \in \mathbb{Z}$  について  $b = ac$  となる  $c \in \mathbb{Z}$  が存在するとき,  $a$  は  $b$  を割り切る, あるいは整除するといい,  $a|b$  で表す. このとき,  $a$  は  $b$  の約数であるという.  $a, b$  を整数とする. 整数  $c$  が,  $c|a, c|b$  を満たすとき  $c$  を  $a, b$  の公約数と呼ぶ. 公約数の中で最大のものを最大公約数という.  $a, b$  の最大公約数を  $\gcd(a, b)$  と表す.  $a, b$  について  $\gcd(a, b) = 1$  のとき,  $a, b$  は互いに素であるという. 1 でない正整数  $p$  が 1 と  $p$  以外に正の約数をもたないとき,  $p$  は素数と呼ばれる.

次の定理はユークリッドの定理と呼ばれる [5].

**定理 2.1**  $a, b \in \mathbb{Z} (a \neq 0)$  について  $b = qa + r (0 \leq r < |a|)$  と書けるような  $q, r \in \mathbb{Z}$  がただ 1 組存在する.

定理 2.1 での  $q$  を,  $b$  を  $a$  で割ったときの商といい,  $r$  を余りという.

整数  $a, b$  について  $m|a - b$  なるとき,  $a$  は  $b$  に modulo  $m$  で合同であるといい,  $a \equiv b \pmod{m}$  と書く.  $a$  を  $m$  で割ったときの余りを  $r$  とすると  $a \equiv r \pmod{m}$  である. こ

のことを  $r = a \pmod{m}$  と書くこともある. 次の定理が知られている [5].

**定理 2.2** 正整数  $m, n$  が互いに素とする. 整数  $a$  について (等差数列的に作られる)  $m$  個の整数  $a, n + a, \dots, (m - 1)n + a$  は  $\pmod{m}$  では  $0, 1, \dots, m - 1$  を並べ替えたもの, つまり順列になっている.

### 2.4 ベクトルの循環シフト

循環シフトとは, 一次元の配列において, 配列の要素を与えられたシフト量だけ一方向にシフトし, 配列からあふれた要素を, シフトの方向と反対側に発生した空きの配列に格納する操作である.

$n$  次ベクトル  $u$  の第  $i (0 \leq i \leq n - 1)$  要素を  $u_i$  と書く. ベクトル  $u$  に対し,  $t$  要素分の循環シフトしたベクトルを  $u^t$  と書く.  $u_i^t = u_{t+i \pmod{n}}$  である. ベクトル  $u$  が行ベクトルの場合には,  $u^t$  は  $t$  要素分だけ左方向に循環シフトした行ベクトルとなり, ベクトル  $u$  が列ベクトルの場合には,  $u^s$  は  $s$  要素分だけ上方向に循環シフトした列ベクトルとなる.

第 3 章での議論に備えてひとつの補題を示す.

**補題 2.1** 正整数  $n$  が素数であるとし,  $u$  をナル行でない  $n$  次行ベクトルとする.  $u$  から構成した  $n$  個の行ベクトル  $u^t (0 \leq t \leq n - 1)$  はすべて互いに異なる.

【補題 2.1 の証明】ある  $t (1 \leq t \leq n - 1)$  について  $u = u^t$  であったとする.  $u$  の第 0 要素に着目する. この要素は  $u^t$  においては第  $-t \pmod{n}$  要素に移動する.  $u^t = u$  であるため,  $u^t$  をさらに  $t$  要素分左方向に循環シフトした  $u^{2t}$  もまた  $u$  に等しい.  $u^{2t}$  において, この要素は第  $-2t \pmod{n}$  要素に移動する. この議論を続けると,  $n$  と  $-t (1 \leq t \leq n - 1)$  は互いに素であるので, 定理 2.2 により,  $0, -t, -2t, \dots, -(n - 1)t$  は  $\pmod{n}$  で  $0, 1, \dots, n - 1$  を並べ替えたものである. つまり, 行ベクトルのすべての要素は等しい. そのため, 行ベクトルがナル行でないという前提に反する. つまり,  $u$  と  $u^t (1 \leq t \leq n - 1)$  とは互いに異なる. この関係は  $u^j$  と  $(u^j)^t (1 \leq t \leq n - 1)$  の間にも同様に成り立つ.  $j$  を 1 から  $n - 1$  にまで変化させることにより,  $j_1 \neq j_2$  であれば,  $u^{j_1} \neq u^{j_2}$  となる. つまり,  $u$  から構成される  $n$  個の行ベクトル  $u^t$  はすべて互いに異なる. ■

### 2.5 行列の循環シフト

ここではベクトルの循環シフトを行列の循環シフトに拡張する.  $m$  行  $n$  列のブール行列  $W$  を考える (列は左から順に第 0 列,  $\dots$ , 第  $n - 1$  列とし, 行は上から順に第 0 行,  $\dots$ , 第  $m - 1$  行とする). 2 つの数  $s (0 \leq s \leq m - 1), t (0 \leq t \leq n - 1)$  に対しブール行列  $W$  を  $(s, t)$  だけ “循環シフト” する. つまり, ブール行列  $W$  の各列をそれぞれ  $s$  要素分だけ上方向に循環シフトし, 次に, 結果の行列の各行をそれぞれ  $t$  要素分だけ左方向に循環シフトする. この

ように行列  $W$  を  $(s, t)$  循環シフトした行列を  $W^{(s,t)}$  と表記する. このとき,  $W$  の  $(s, t)$  要素は  $W^{(s,t)}$  の  $(0, 0)$  要素になる. 等価組織の定義より, 次の補題を得る.

**補題 2.2**  $W, V$  を  $m$  行  $n$  列のブール行列とする.  $W$  と  $V$  が等価組織であるとする. ある整数  $s(0 \leq s \leq m-1)$  と  $t(0 \leq t \leq n-1)$  が存在し,  $V = W^{(s,t)}$  である.

【補題 2.2 の証明】  $W$  を単位として格子状 (上下左右) に繰り返し得られる織物と  $V$  を単位として格子状に繰り返し得られる織物の模様が一致する. つまり, これら 2 枚の織物は位置をずらして重ねると模様が完全に一致する. この重ね合わせにおいて  $V$  の  $(0, 0)$  要素が  $W$  の  $(s, t)$  要素に対応しているとする.  $0 \leq s \leq m-1, 0 \leq t \leq n-1$  として一般性を失わない. ここで,  $V$  の第  $i(0 \leq i \leq m-1)$  行は  $W$  の  $(i+s) \bmod m$  行を  $t$  要素分左方向に循環シフトした行ベクトルである. つまり,  $V_{i*} = W_{((i+s) \bmod m)*}^t$  である. また  $V$  の第  $j(0 \leq j \leq n-1)$  列は  $W$  の  $(j+t) \bmod n$  行を  $s$  要素分上方向に循環シフトした列ベクトルである. つまり,  $V_{*j} = W_{*(j+t) \bmod n}^s$  である. よって  $V = W^{(s,t)}$  である. ■

補題 2.2 の証明より, 次の 2 つの観察を得る.

**観察 2.1**  $W$  を  $m$  行  $n$  列のブール行列とする. 2 つの数  $s(0 \leq s \leq m-1), t(0 \leq t \leq n-1)$  に対し,  $W$  をシフト量  $(s, t)$  の循環シフトにより得られた  $W^{(s,t)}$  は  $W$  の等価組織である.

**観察 2.2** 任意の  $s(0 \leq s \leq m-1), t(0 \leq t \leq n-1)$  に対し,  $W^{[s,t]} = W^{(s,t)}$  である.

**補題 2.3**  $W$  をたて糸  $n$  本, よこ糸  $m$  本の組織図 (完全組織) に対応するブール行列とする.  $W = W^{(s,t)}$  であるシフト量  $(s, t)(1 \leq s \leq m-1, 1 \leq t \leq n-1)$  が存在するとする. このような  $s, t$  の対が複数存在する場合には  $s$  が最小である  $s, t$  の対を考える. このとき,  $s|m$  である. さらに,  $m$  を  $s$  で割った商を  $q$  とすると,  $qt \bmod n = 0$  である.

【補題 2.3 の証明】  $s|m$  でないと仮定し,  $m$  を  $s$  で割った商を  $q$ , 余りを  $s'(\neq 0)$  とする. 観察 2.2 より,  $W^{[s,t]} = W^{(s,t)}$  である.  $W = W^{(s,t)}$  であることから  $W^{[qs,t]} = W$  であり,  $W$  の  $(s, t)$  要素を始点とする新たな  $W$  を考えると,  $W^{[2s,2t]}$  も  $W$  と等しいことがわかる. この議論を繰り返すと  $W^{[qs,qt]}$  もまた  $W$  に等しい. つまり  $W = W^{[qs,qt]}$  である. ただし,  $qt > n$  となりうるが, このとき,  $W^{[qs,qt]}$  の始点はある  $W_{0,k}$  の要素に一致している. このとき  $W$  において  $W_{0,k+1}$  の直下の  $W$  のコピーは  $W_{1,k+1}$  である.  $W^{[qs,qt]}$  の始点を新たに  $W$  の始点と考えると  $W_{1,k+1}$  は  $W^{[qs,qt]}$  と等価である. よって  $W = W^{(s',t')}$  となる循環シフト量  $(s', t')$  が存在することになる.  $s' < s$  のため, 最小の  $s$  を選択したという前提に反する. そのため,  $s|m$  である.

$qt \bmod n = r(\neq 0)$  と仮定する. 前段の議論によ

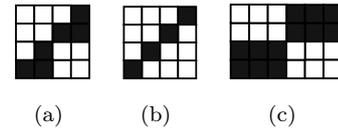


図 3 行列の循環シフトによりもとの組織図と一致する例  
Fig. 3 Examples of weave diagrams that are coincident to the original one by cyclic shifts for matrix.

り,  $W^{[qs,qt]} = W$  であり,  $qs = m$  である. そのため,  $W^{[m,qt]} = W$  となる. このとき,  $W$  において  $W^{[m,qt]}$  の始点はある  $W_{1,k}$  の第 0 行の第  $r$  要素に一致している. このことは  $W = W^{(0,r)}$  を意味している. しかし, これは  $W$  の最小単位が  $W$  であるという前提に反する. そのため,  $qt \bmod n = 0$  である.

■

$W^{(s,t)} = W$  となるシフト量  $(s, t)$  が存在する組織図  $W$  の例を図 3 に示す. 同図 (a) の場合,  $W^{(2,2)} = W$  である. 同図 (b) の場合,  $W^{(1,3)} = W^{(2,2)} = W^{(3,1)} = W$  である. 同図 (c) では  $W^{(2,3)} = W$  である.

### 3. 等価組織を除外した組織図の数え上げ

$W$  を, よこ糸  $m$  本, たて糸  $n$  本の組織図 (完全組織) に対応するブール行列とする. つまり,  $m \geq 2, n \geq 2$  であり,  $W$  にはナル行とナル列のどちらも含まず, かつ,  $W$  は同一の小行列から構成された行列でない.

#### 3.1 $m$ と $n$ がともに素数で $m \neq n$ の場合

**定理 3.1** 正整数  $m, n$  が異なる素数であるとする.  $W$  の  $mn$  個の等価組織  $W^{(s,t)}(0 \leq s \leq m-1, 0 \leq t \leq n-1)$  はすべて異なる.

【定理 3.1 の証明】ある  $s(0 \leq s \leq m-1)$  と  $t(0 \leq t \leq n-1)$  について  $W = W^{(s,t)}$  であつたとする. すると, 補題 2.3 より  $s|m$  であるが,  $m$  が素数なので  $s = 1$  であり, さらに, 補題 2.3 より  $mt \bmod n = 0$  が成り立つ.  $m$  と  $n$  は異なる 2 つの素数であるため, この式が成り立つのは  $t$  が  $n$  の倍数のときに限る. しかし, これはシフト量  $t$  が 1 以上  $n-1$  以下であるという前提に反する. そのため,  $W = W^{(1,t)}(1 \leq t \leq n-1)$  となることはない. よって,  $W$  の等価組織  $W^{(s,t)}(0 \leq s \leq m-1, 0 \leq t \leq n-1)$  から  $W^{(0,0)}$  を除いた  $mn-1$  個の等価組織  $W^{(s,t)}$  と組織図  $W(= W^{(0,0)})$  とは互いに異なる. この議論は  $W^{(i,j)}$  と,  $W^{(i',j')}$  を除いた  $mn-1$  個の等価組織との間にも同様に成り立つ.  $i$  を 0 から  $m-1$ ,  $j$  を 0 から  $n-1$  まで変化させることにより,  $i_1 \neq i_2$  または  $j_1 \neq j_2$  であれば  $W^{(i_1,j_1)} \neq W^{(i_2,j_2)}$  であることがわかる. つまり  $W$  から構成される  $mn$  個の等価組織はすべて互いに異なり, 組織図  $W$  を含めてちょうど  $mn$  個の等価組織が存在する. ■

定理 3.1 により組織図  $W$  には  $W$  自身を含めてちょうど  $mn$  個の等価組織が存在する. そのため, 式 (1) で得られ

表 1 よこ糸本数  $m$ , たて糸本数  $n$  ( $m \neq n$ ) の場合の  $N$ (第 (1) 式) と  $N_W$

**Table 1** The number of weave diagrams  $N$ (equation (1)) and the number of non-equivalent weave diagrams  $N_W$  for the case that weave diagram consisting of  $m$  weft yarns and  $n$  warp yarns( $m \neq n$ .)

$m$	$n$	$N$	$N_W$
2	3	6	1
	5	30	3
	7	126	9
3	5	6,510	434
	7	267,582	12,742
5	7	20,218,802,310	577,680,066

た  $N$  を  $mn$  で割ることにより, 等価組織を除外した組織図の個数  $N_W$  を求めることができる. つまり,  $N_W$  は次式で表される.

$$N_W = \frac{N}{mn} \quad (3)$$

表 1 に, 異なる 2 つの素数である  $m, n$  ( $2 \leq m, n \leq 7$ ) の組合せにおける  $N$  と  $N_W$  を示す.

### 3.2 $m$ と $n$ がともに素数で $m = n$ の場合

ある  $s$  ( $0 \leq s \leq m - 1$ ) と  $t$  ( $0 \leq t \leq n - 1$ ) について  $W = W^{(s,t)}$  であったとする. すると, 補題 2.3 より  $s|m$  であるが,  $m$  が素数なので  $s = 1$  である. さらに, 補題 2.3 より  $mt \bmod n = 0$  であるが,  $n$  と  $m$  は等しいため, 任意の  $t$  ( $1 \leq t \leq n - 1$ ) に対して, この式は成り立つ.

たて糸  $n$  本, よこ糸  $n$  本からなる組織図の集合を  $S$  とする.  $S$  のうち,  $W = W^{(1,t)}$  のような  $t$  ( $1 \leq t \leq n - 1$ ) が存在する組織図  $W$  の集合を  $S_I$  とする. また,  $S$  に含まれる組織図のうち,  $S_I$  に含まれない組織図からなる集合を  $S_{II}$  とする.

$S_I$  に含まれる組織図の個数を次のようにして数える.  $n$  次行ベクトルと, その行を循環シフトした行を, あわせて  $n$  個並べることにより構成したブール行列の個数を数え上げる. そこで, はじめに行の 패턴の個数を数える. 各パターンに対し, それを右方向に  $t$  要素分循環シフトさせたものをはじめの行の下に配置する. その下に, 更に右方向に  $t$  要素分循環シフトさせた行を配置する. これを繰り返してブール行列を構成する (詳しくは 3.2.2 節参照). これらのブール行列は, それぞれ異なる行パターンを基に構成しており, また, 隣り合う行の循環シフト量  $t$  が異なる. そのため, これらの中には等価なものが存在しない.

#### 3.2.1 行パターンの個数

各要素が 0 または 1 の  $n$  次行ベクトルを考える.  $n$  個の要素のうちちょうど  $k$  個が 1 だとする. 行ベクトルの個数は  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$  である. 組織図における等価組織を除外するため, ここではベクトルを円順列とみなす. 行ベクトルを円

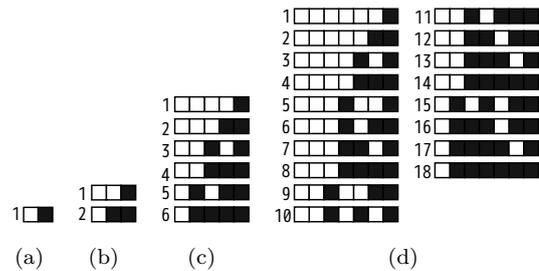


図 4  $n$  次ベクトルの行パターン (a)1 通り ( $n = 2$ ), (b) 2 通り ( $n = 3$ ), (c) 6 通り ( $n=5$ ), (d) 18 通り ( $n = 7$ )

**Fig. 4**  $n$  order vector row patterns. (a)one row pattern( $n = 2$ ), (b)Two row patterns( $n = 3$ ), (c)Six row patterns( $n = 5$ ), (d), Eighteen row patterns( $n = 7$ ).

順列とみなしたときに等しい行ベクトルは同じ行パターンをもつという. 補題 2.1 により,  $n$  が素数であれば, ひとつの行ベクトルにはそれ自身を含めて同じ行パターンをもつ行ベクトルがちょうど  $n$  個存在する. そのため, 行パターンの個数は  $\frac{n!}{n}$  である. よって,  $k$  を 1 から  $n - 1$  まで変化させた場合の, すべての行パターンの個数  $n_p$  は次式で計算できる.

$$n_p = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (4)$$

表 2 に 2 以上 7 以下の 4 個の素数  $n = 2, 3, 5, 7$  それぞれの場合の  $n_p$  の値を示す. また, それぞれの場合の行パターンを図 4 に示す.

#### 3.2.2 行パターンを基にしたブール行列の構成

0 または 1 を要素とする, ナル行でない,  $n$  次行ベクトル  $u$  と, あるシフト量  $t$  ( $1 \leq t \leq n - 1$ ) を考える. 第 0 行を  $W_{0*} = u$  として, 第  $i$  行を,  $u$  を右方向に  $it \bmod n$  要素分循環シフトした行と定義する. つまり,  $W_{i*} = u^{-it \bmod n}$  ( $1 \leq i \leq n - 1$ ) と定義する. このようにして構成したブール行列を  $W_u^t$  と表す.  $u$  の第  $j$  要素, つまり  $W_u^t$  の第 0 行の第  $j$  要素に着目する. この要素は  $W_u^t$  の第 1 行では  $j + t$  の位置に移動し, 更に下の行では,  $j + 2t \bmod n, j + 3t \bmod n, \dots, j + (n - 1)t \bmod n$  の位置に移動する.  $n$  と  $t$  ( $1 \leq t \leq n - 1$ ) は互いに素であるので, 定理 2.2 により  $j, j + t, j + 2t \dots j + (n - 1)t$  は  $\bmod n$  で  $0, 1, \dots, n - 1$  を並べ替えたものである. よって, 基とする行  $u$  の第  $j$  ( $0 \leq j \leq n - 1$ ) 要素は,  $W$  において同じ列に存在することはない. つまり, 基とする行がナル行でないため,  $W_u^t$  にナル列が含まれることがない.  $u_1 = (001), u_2 = (011)$  を基にし, シフト量  $t = 1, 2$  で構成した組織図を図 5 に示す.  $W_{u_1}^1, W_{u_1}^2, W_{u_2}^1, W_{u_2}^2$  の 4 個の組織図はすべて綾織である.

なお, このように, あるパターンを持つ行を基にシフト量  $t$  を定めて, 隣りあう行を  $t$  だけ循環シフトさせた行を配置して組織図を構成する方法は文献 [1] においても用いられている.

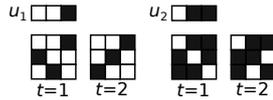


図 5  $u_1 = (001)$  と  $u_2 = (011)$  を基にシフト量  $t = 1, 2$  で構成した 4 通りの組織図  $W_{u_1}^1, W_{u_1}^2, W_{u_3}^1, W_{u_3}^2$

Fig. 5 Four weave diagrams  $W_{u_1}^1, W_{u_1}^2, W_{u_3}^1, W_{u_3}^2$  constructed from  $u_1 = (001)$  and  $u_2 = (011)$  with  $t = 1, 2$

### 3.2.3 等価組織を除外した組織図の個数

$\mathcal{S}_I \cup \mathcal{S}_{II} = \mathcal{S}$ , かつ  $\mathcal{S}_I \cap \mathcal{S}_{II} = \emptyset$  であるため, 式 (1) で得られる  $N$  は,  $N = |\mathcal{S}_I| + |\mathcal{S}_{II}|$  と表すことができる.  $\mathcal{S}_I$  から等価組織を除外した組織図の個数を  $N_W^I$  とする.  $N_W^I$  は, あるパターンの行を基に, 隣り合う行を  $t (1 \leq t \leq n-1)$  要素分循環シフトして配置して構成した組織図の個数である. よって  $N_W^I = n_p(n-1)$  である. このように構成した組織図  $W$  には,  $W$  と, 例えば行方向に循環シフトした  $W^{(0,t)} (1 \leq t \leq n-1)$  によって得られる  $n-1$  個の組織図をあわせて, ちょうど  $n$  個の異なる等価組織が存在するため,  $|\mathcal{S}_I| = n_p(n-1)n$  である.

次に,  $\mathcal{S}_{II}$  から等価組織を除外した組織図の個数  $N_W^{II}$  を考える.  $|\mathcal{S}_{II}| = N - |\mathcal{S}_I|$  である. 任意の  $W \in \mathcal{S}_{II}$  には組織図を描き始める起点を変えて,  $W$  自身を含めてちょうど  $n^2$  個の異なる等価組織が存在する. そのため,  $N_W^{II} = \frac{N - |\mathcal{S}_I|}{n^2}$  である. よって, 等価組織を除外した組織図の総数は次式で表される.

$$N_W = N_W^I + N_W^{II} = n_p(n-1) + \frac{N - n_p(n-1)n}{n^2} \quad (5)$$

2 以上 7 以下の 4 個の素数  $n = 2, 3, 5, 7$  の場合の  $N, n_p, N_W$  を表 2 に示す.  $n = 2$  の場合,  $N_W = 1$  であり, これは平織である.  $n = 3$  の場合,  $N_W = 14$  となる [4]. この中には図 5 に示した 4 通りの綾織が含まれている.  $n = 5$  の場合,  $N_W = 705,366$  である. 例として図 6(a) に, 行パターン  $u_1 = (00001)$  を基にして, 行の右方向に  $t (1 \leq t \leq 4)$  要素分の循環シフトにより構成した 5 通りの行パターンを並べて構成した 4 通りの組織図を示す.  $W_{u_1}^1$  と  $W_{u_1}^4$  は綾織であり,  $W_{u_1}^2$  と  $W_{u_1}^3$  は朱子織である.  $n = 7$  の場合,  $N_W$  は  $9 \times 10^{12}$  を超える莫大な数となる. 例として同図 (b) に, 行パターン  $u_{15} = (0101011)$  を基にして, 行の右方向に  $t (1 \leq t \leq 6)$  要素分の循環シフトにより構成した 6 通りの組織図  $W_{u_{15}}^t (1 \leq t \leq 6)$  を示す.

## 4. まとめ

本論文では, よこ糸本数とたて糸本数がともに素数の場合の, 等価組織を除外した織物組織の個数を数え上げる数式を示した. この数式を使い, よこ糸本数, たて糸本数がともに 7 本以下の場合の, 等価組織を除外した織物組織の個数を計算した. よこ糸本数, たて糸本数がともに 7 本の

表 2 よこ糸本数とたて糸本数がともに  $n$  の場合の  $N$  (第 (1) 式), 列パターンの個数  $n_p$ , 等価組織を除外した織物組織の個数  $N_W$

Table 2 The number of weave diagrams  $N$  (equation (1)), the number of row patterns  $n_p$  and the number of non-equivalent weave diagrams  $N_W$  for the case that weave diagram consisting of  $n$  weft yarns and  $n$  warp yarns.

$n$	$N$	$n_p$	$N_W$
2	2	1	1
3	102	2	14
5	17,633,670	6	705,366
7	451,575,174,961,302	18	9,215,819,897,262

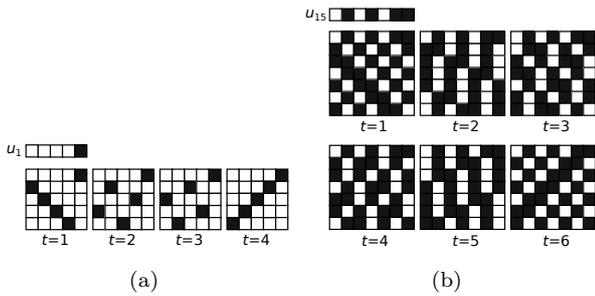


図 6 (a) $u_1 = (00001)$  を基にシフト量  $t = 1, 2, 3, 4$  で構成した 4 通りの組織図  $W_{u_1}^1, W_{u_1}^2, W_{u_1}^3, W_{u_1}^4$ , (b) $u_{15} = (0101011)$  を基にシフト量  $t(1 \leq t \leq 6)$  で構成した 6 通りの組織図  $W_{u_{15}}^t(1 \leq t \leq 6)$

Fig. 6 (a)Four weave diagrams  $W_{u_1}^1, W_{u_1}^2, W_{u_1}^3, W_{u_1}^4$  constructed from  $u_1 = (00001)$  with  $t = 1, 2, 3, 4$ , (b)Six weave diagrams  $W_{u_{15}}^t(1 \leq t \leq 6)$  constructed from  $u_{15} = (0101011)$  with  $t(1 \leq t \leq 6)$

場合には、等価組織を除外した織物組織の個数は  $9 \times 10^{12}$  を超える莫大な数となるが、正確に数え上げることができた。今後の課題は、たて糸本数およびよこ糸本数が合成数の場合の、等価組織を除外した織物組織の個数を与える数式について考察することである。

#### 参考文献

- [1] 高寺政行, 篠原 昭: 織物組織に関する研究 (3) 4 枚組織の数学的性質, 繊維学会昭和 61 年度年次大会研究発表会講演要旨集, p. 194 (1986).
- [2] Gu, P. and Greenwood, K.: The Scope for Fabric Engineering of the Weave, *Journal of Textile Institute*, Vol. 77, No. 2, pp. 88–103 (1986).
- [3] Dawson, R. M.: Enumeration and Identification by Elimination of Weave Families of Given Repeat Size, *Textile Research Journal*, Vol. 70, No. 4, pp. 304–310 (2000).
- [4] 呉 祐吉, 松橋房江, 篠原 昭: 織物組織に関する基礎的研究 第 2 報織物組織の正則と不規則, 繊維学会誌, Vol. 17, No. 10, pp. 989–993 (1961).
- [5] 渡辺 豊: 初歩からの数論, 牧野書店, 東京 (2011).