

# 複数ばねによる質点の一次元運動シミュレーションに対する Multigrid Reduction in Time の有効性の評価

藤戸宙希<sup>†1</sup> 金子重郎<sup>†1</sup> 藤井昭宏<sup>†1</sup> 田中輝雄<sup>†1</sup> 鷺尾巧<sup>†2</sup> 岩下武史<sup>†3</sup>

**概要**：近年の大規模計算機は、多数の演算コアによる並列度の向上によって高性能化が計られている。そしてこの高並列性を活用するため、空間内だけでなく、時間方向における並列性の抽出が注目されており、この手法のひとつとして MGRIT が提案されている。この手法は、時間方向を一定間隔に区切ることで並列性を抽出しつつ、時間間隔を粗くすることにより階層構造を生成し、未来の時間ステップに情報を効率良く伝播させる手法である。しかし、複数の周波数成分を有する振動問題において、周期が MGRIT の有効性に与える影響は知られていない。そこで、本研究は複数の周期が含まれるような 1 次元のばねによる質点運動シミュレーションに MGRIT を適用し、評価を行なった。この結果、粗くなる時間幅と運動の最小周期が MGRIT の反復回数を決定することが判明し、レベル数を大きく取ると解を安定に求められないが、一定に抑えることにより安定に解けることが明らかとなった。そして、レベル数に制約をつけた安定な条件においても、MGRIT が逐次より高速になることが確認できた。

**キーワード**：時間積分, MGRIT, マルチグリッド

## 1. はじめに

近年の大規模計算機は、多数の演算コアによる並列度の向上によって高性能化が実現されている[1]。しかし、従来の時間発展型方程式の解法は、空間内のみ並列に計算を行う。つまり、空間内での並列性がすでに十分利用されていた場合、計算機の高並列性を持って余してしまう。したがって、この高並列性を活用するため、時間軸方向における並列性の抽出を検討する必要がある。

時間軸方向で並列性を抽出する手法として Parareal 法が J.-L. Lions らにより考案され[2][3]、多様なアプリケーションへの適用を行いやすくする枠組みとして R. D. Falgout らにより Multigrid Reduction in Time (MGRIT) が提案された[4][5]。これは、連立一次方程式向けの解法であるマルチグリッド法[6]を Parareal 法に適用した手法とみなすことができる。

MGRIT の適用や効果に関してはいくつかの検証がなされており、高並列環境においては従来の逐次解法よりも高速に計算可能であると報告されている[7][8][9]。特に、R. D. Falgout らによって、圧縮性流体力学シミュレーションの実アプリケーションに MGRIT を適用し、逐次解法よりも高速に計算可能となった例も報告されている [10]。しかし、物体の振動など、複数の周波数成分を有する振動を伴う問題に対し、周期が MGRIT の有効性に与える影響は知られていない。

そこで、本研究は複数の周波数成分を有する振動を伴う問題に対し MGRIT を適用し、粗くなる時間幅と周期との関係性による収束性の変化、時間ステップ数が大きくなっても収束に要する MGRIT の反復回数が一定となる条件、MGRIT の有用性に関する評価を行なった。

本論文の流れは、まず、2 章においてマルチグリッド法について、3 章において MGRIT についての説明を行う。

4 章で適用対象の問題を定式化する流れを示し、5 章にて数値実験とその結果について述べる。

## 2. マルチグリッド法

### 2.1 マルチグリッド法について

マルチグリッド法は、複数階層による離散化を行うことで微分方程式を高速に解くためのアルゴリズムである。格子を用いて離散化した偏微分方程式に対する反復解法は、格子サイズと同じ誤差が効率よく減衰し、長波長の誤差は減衰しにくいことが知られている[11]。マルチグリッド法では、細かい格子と粗い格子を組み合わせることで、各波長の誤差を一様に減衰することが可能となる。これにより解の収束が早く、大規模問題向けの解法として用いられている。

マルチグリッド法のアルゴリズムは、以下に述べるようなものである。まず、与えられた問題について緩和法と呼ばれる計算を適用し近似解を求める。近似解を求めたのち、近似解についての残差を計算し、問題を粗くする。粗くした問題と残差を用いて残差方程式を構成し、補正解を計算する。そして、補正解を近似解に足しこみ、近似解を更新する。

問題を粗くする処理や、近似解の更新に用いる階層構造には様々な形が存在する。この階層構造を用いることで、マルチグリッド法は近似解を真の解に近づけていく。

マルチグリッド法は様々な問題で一般化することが可能であり、双曲型偏微分方程式の時間発展解や、時間依存型の偏微分方程式に適用することもできる。

<sup>†1</sup> 工学院大学  
Kogakuin University  
<sup>†2</sup> 東京大学大学院新領域創成科学研究科  
Graduate School of Frontier Sciences, The University of Tokyo

<sup>†3</sup> 北海道大学  
Hokkaido University

## 2.2 Full Approximation Scheme multigrid(FAS)

マルチグリッド法には、非線形問題に対応した Full Approximation Scheme Multigrid (FAS) と呼ばれる手法がある[12]. マルチグリッド法を構成する階層構造として V-Cycle を用いた FAS を図 1 に示す. 右下についている添え字がそのレベルの番号を表し、この数字が大きいほど、格子間隔が大きく、粗い問題となっている. またここで、サイクルのうち最も数字の大きいレベルを、サイクルの最下層を呼ぶこととする.

本研究で扱うばねの振動問題は線形だが、非線形問題にも対応可能なよう、FAS を用いることとした.

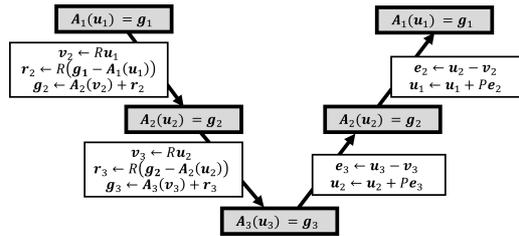


図 1 FAS Multigrid V-Cycle

## 3. Multigrid Reduction in Time(MGRIT)

### 3.1 MGRIT について

従来の時間積分では、時間発展する問題を逐次解法で時間積分しており、ある時間ステップの解を得るためには、ひとつ前の時間ステップにおける解が必要となる. つまり、すべての時間ステップにおいて時間軸方向に依存性が存在するため、並列化方向が空間軸方向に限定される.

それに対して本研究で取り扱う MGRIT では、時間軸方向に対しある一定間隔で逐次性を緩和する. これにより時間ステップごとの依存性が部分的に切れるため、時間軸方向の並列性が抽出できるようになる.

そして、緩和を行った時間軸方向に対し、マルチグリッド法を用いて時間軸方向を粗くすることで格子点を減らす. これにより、過去の格子における情報を未来の格子に伝わりやすくする. また、階層構造の各レベルにおいて用いる緩和法として、細格子緩和法および粗格子緩和法と呼ばれる緩和法を組み合わせ使用.

### 3.2 粗格子に関する方程式の生成

ここで、問題を時間軸方向に粗くする理論について述べていく. MGRIT は陰解法にも適用できるが、ここでは簡単のため陽解法を用い説明する. まず、時間軸方向の問題として、以下のような偏微分方程式を仮定する.

$$u'(t) = f(t, u(t)), u(0) = g_0, t \in [0, T] \quad (3.1)$$

$N$  が時間軸方向の問題サイズ (全タイムステップ数)、 $u(t)$  を離散化したものを  $u_i (1 \leq i \leq N)$ 、 $T$  を最終時間、時間ステップ幅を  $\delta t = T/N$  とし、1 つ前の時間ステップ用いて (3.1) を離散化すると

$$u_0 = g_0, u_i = \Phi(u_{i-1}) + g_i (1 \leq i \leq N) \quad (3.2)$$

となる. (3.2) で表れる  $\Phi$  は現在の時間ステップから次の時間ステップの解を得るときに使用するもので、 $\delta t$  を用いて生成する. (3.2) を時間ステップ毎に並べると (3.3) が得られる. (3.3) は細格子に関する方程式であり、特に  $f$  が線形な関数であるとき  $\Phi(u_{i-1}) = \Phi u_{i-1}$  で表される.

$$A(u) = \begin{pmatrix} I & & & \\ -\Phi & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\Phi & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_N \end{pmatrix} = g \quad (3.3)$$

(3.1) の数値的な解は、(3.3) を前進代入で時間発展させることにより得ることができる.

ここで、 $\Delta$  を粗格子を表す記号とし、粗格子率を表す正数を  $m$ 、 $N_\Delta = N/m$ 、 $\Delta T = m\delta t$  とする. 各レベルでの  $u$ 、 $g$  を  $m$  個飛ばしに抜き出し、(3.3) を時間軸方向に粗くすることで (3.4) が得られる. (3.4) は粗格子に関する方程式であり、マルチグリッド法における粗いレベルの問題に相当する.

$$A_\Delta(u_\Delta) = \begin{pmatrix} I & & & \\ -\Phi_\Delta & I & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\Phi_\Delta & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\Delta,0} \\ u_{\Delta,1} \\ \vdots \\ u_{\Delta,N_\Delta} \end{pmatrix} = g_\Delta \quad (3.4)$$

時間軸方向をある一定間隔  $m$  により逐次性を切ることで、時間軸方向の並列性が抽出できるようになる. また、問題を粗くすることで下のレベルでは  $\Delta t$  が  $m$  倍され、問題の解き方が粗くなる. しかし、格子点が減ることによって過去の格子点からの情報が、同じ時間幅に対し少ないステップ数で伝わる.

### 3.3 粗格子点と細格子点

前の節では問題を粗くする概要を説明したが、ここでは実際にどのように時間軸方向に問題を粗くするのかを述べていく.

時間軸を粗くする際、MGRIT では図 2 のように時間軸方向を粗格子点と細格子点に分類する. 粗格子点は初期時間  $t_0$  を基準に、 $m$  (粗格子率) 時間間隔で定める. そして、粗格子点に挟まれた点を細格子点とする.

時間軸方向に粗くする (制限演算) 際には、図 3 のように粗格子点のみを時間軸から抜き出す. このとき、粗くなった問題では再び  $m$  によって 2 種類の点に分類する. また、補正解を細かい格子点に足しこむ (補間演算) 際には図 4 のように、細かい格子点に対応する格子点の補正解を足す.

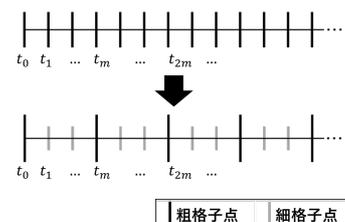


図 2 粗格子点と細格子点

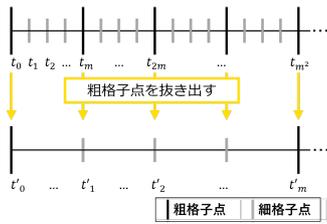


図 3 制限演算

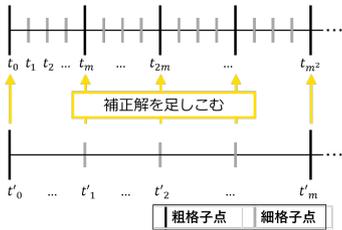


図 4 補間演算

### 3.4 粗格子緩和法と細格子緩和法

この節では、階層構造のレベル内における緩和法について説明する。MGRIT では 2 種類の緩和法が使用され、それぞれ、細格子緩和法 (F-relaxation) および粗格子緩和法 (C-relaxation) と呼ばれる。

細格子緩和法は図 5 が示すように、粗格子点から次の粗格子点までの間に存在する細格子点を、直前の粗格子点から逐次的に更新する。各粗格子点によって更新される区間は、他の区間から独立であるため、並列に計算できる。

粗格子緩和法は図 6 が示すように、粗格子点の直前の細格子点を用いて、粗格子点を更新する。各粗格子点は、他の粗格子点から独立のため、これも並列に計算できる。

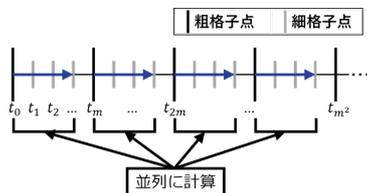


図 5 細格子緩和法 (F-relaxation)

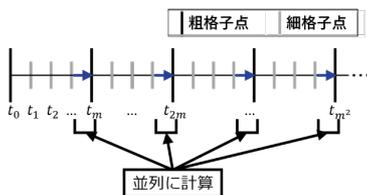


図 6 粗格子緩和法 (C-relaxation)

### 3.5 Full Approximation Scheme MGRIT

本研究では、MGRIT のサイクルとして 2.2 節にて示した Full Approximation Scheme Multigrid V-Cycle (FAS V-Cycle) を使用する。解くべき時間進展問題を  $A_1(v_1) = g_1$ 、V-Cycle の最大レベルを  $L$  とし、MGRIT のサイクルとして FAS V-Cycle を使用したアルゴリズムを図 7 に示す。ここで、変数の右下の添え字はレベルをあらわす。また、サイクルへの入力に初期値  $v_1$ 、右辺ベクトル  $g_1$ 、最大レベルの  $L$  である。

V-Cycle を下る際の緩和法 (プレスムージング) は細格子緩和法、粗格子緩和法、細格子緩和法の順に構成された

緩和法 (FCF-relaxation) を使用し、V-Cycle を登る際の緩和法 (ポストスムージング) は、細格子緩和法 (F-relaxation) を使用する。この際、緩和法への入力として、初期値及び右辺ベクトルを用いる。これらの動作はアルゴリズム中、プレスムージングが最初のループに対応し、ポストスムージングが後ろのループに対応する。また、最下層部の逐次計算は、6 行目に対応する。

MGRIT ではこの V-Cycle を、残差が一定以下になるまで反復的に実行する。

Algorithm FAS_MGRIT_VCycle ( $v_1, g_1, L$ )	
1.	for $l = 1$ to $L - 1$
2.	Set $u_l \leftarrow FCF\_relax(v_l, g_l)$
3.	Set $v_{l+1} \leftarrow Ru_l$ ,
4.	Set $r_{l+1} \leftarrow R(g_l - A_l(u_l))$
5.	Set $g_{l+1} \leftarrow A_{l+1}(v_{l+1}) + r_{l+1}$
6.	Solve $A_l(v_l) = g_l$
7.	for $l = L$ to 1
8.	Set $e_l \leftarrow v_l - u_l$
9.	Set $u_{l-1} \leftarrow u_{l-1} + Pe_l$
10.	Set $u_{l-1} \leftarrow F\_relax(u_{l-1}, g_{l-1})$

図 7 FAS MGRIT V-Cycle のアルゴリズム

## 4. 対象とする 1 次元の質点運動問題

### 4.1 問題の支配方程式

この節では、本研究で MGRIT を適用する 1 次元のばねによる質点の運動シミュレーションの支配方程式について述べる。まず、問題を以下の図 8 で表すような系とする。ここで  $k_i$  はバネ定数を、 $m_i$  はそれぞれの質点の質量をあらわし、変数の右下の添え字は系における番号をあらわす。また、質点数・ばね数は  $N$  とする。

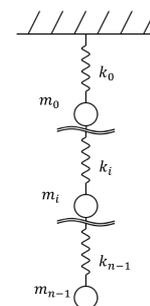


図 8 対象問題の系

この問題の支配方程式は以下の式(4.1)から式(4.3)である。これらの式は、ニューマーク  $\beta$  法を用い、運動を質点の加速度、速度、変位の関係から解くものである。ここで、 ${}^t u_i, {}^t \dot{u}_i, {}^t \ddot{u}_i$  は質点  $i$  の変位、速度、加速度をあらわし、変数の左上の添え字は時刻をあらわす。また、 $\alpha, \beta, \gamma$  は定数であり、時刻  $t + \Delta t$  の計算においては  ${}^t u_i, {}^t \dot{u}_i, {}^t \ddot{u}_i$  は既知とする。

$$m_i {}^{t+\Delta t} \ddot{u}_i = -k_i ({}^{t+\Delta t} u_i - {}^{t+\Delta t} u_{i-1}) + k_{i+1} ({}^{t+\Delta t} u_{i+1} - {}^{t+\Delta t} u_i) - \alpha {}^{t+\Delta t} \dot{u}_i \quad (4.1)$$

$${}^{t+\Delta t} \dot{u}_i = \dot{u}_i + \Delta t \{ \gamma {}^{t+\Delta t} \ddot{u}_i + (1 - \gamma) {}^t \ddot{u}_i \} \quad (4.2)$$

$${}^{t+\Delta t} u_i = u_i + \Delta t \dot{u}_i + \Delta t^2 \{ \beta {}^{t+\Delta t} \ddot{u}_i + (0.5 - \beta) {}^t \ddot{u}_i \} \quad (4.3)$$





どのような関係があるかを調査する実験。ここでは単一質点の問題を用いる(目的3,4の検証)。

実験4. 実験3で求めた収束に必要なとされる条件を、複数質点に対しても同様の結果が得られるか調査する実験。(目的1の検証)。

以下、それぞれの実験の詳細及び結果を節ごと解説する。

## 5.2 対象問題及びMGRITのパラメタについて

今回の実験を行うにあたり、対象問題のパラメタは以下のような設定とした。また、初期状態は、固定端から最も遠い質点のみを正の方向に2だけ引き伸ばした状態とした。

表2 対象問題のパラメタ

シミュレーション時間長	実験によって可変
タイムステップ数	実験によって可変
質点数	6 (実験3のみ1)
ばね定数	$k_0$ から順に 5, 4, 2, 2, 3, 4 (実験3は可変)
質量	$m_0$ から順に 2, 5, 5, 1, 1, 5 (実験3は可変)

MGRITのパラメタである粗格子率とレベル数は各々の実験によって異なるため、各節ごとに記載する。また、全実験共通でMGRITの反復回数は1024回を上限とした。

## 5.3 実験1

### 5.3.1 実験内容

まず、MGRITにおけるレベル数と粗格子率を変化させ、その際の反復回数を調査した。このとき、対象問題のシミュレーション時間長は16、タイムステップ数は4096とした。

次に、得られた反復回数を用い、4.4節に記述した、MGRITを適用した場合と、逐次的に実行した場合との実行時間の比率を計算した。この比較には、実際の実行時間ではなく並列性が潤沢に使用可能と仮定した際の理論上の計算時間を用いた。これにより、MGRITが逐次に対し、最大でどの程度の有用性を発揮できるのかについての考察が可能となる。

### 5.3.2 結果

レベル数と粗格子率を変化させた際の、MGRITの反復回数を表3に示す。表3から、全ての粗格子率において、サイクルのレベル数を大きくすると反復回数が増加することがわかる。

ここで、得られた反復回数を用い、MGRITの理論上の計算時間を算出する。計算にあたっては、最大でどの程度の高速化が可能かという比較を行うため、並列性が潤沢に存在し、並列可能な区間において最大限の並列度を活用するという条件を設けた。この条件のもと、逐次的に時間進展を行う計算時間を1とした際の、MGRITの計算時間を表

4に示す(値が小さい方が計算時間は短い)。

表4からは、レベルを増やすと計算時間が短くなる傾向が読み取れる。これは、最下層部の逐次部分は時間方向に並列化できないため、この計算量の比率が大きいためだと考えられる。つまり、サイクルのレベル数を大きくとった方が並列度を効率的に利用でき、計算時間が短くなるということがわかった。

表3 レベル数と粗格子率を変化させた際の反復回数

		レベル															
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
粗 格 子 率	2	2	2	2	3	3	4	5	7	10	14	23	22	22	22	22	
	4	2	3	4	7	14	19	19									
	8	2	4	10	18	18											
	16	3	7	14	14												

表4 逐次を1とした際の、MGRITの理論上の計算時間

		レベル															
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
粗 格 子 率	2	1.00	0.50	0.25	0.19	0.09	0.06	0.04	0.03	0.03	0.02	0.03	0.02	0.02	0.02	0.02	
	4	0.50	0.19	0.06	0.03	0.02	0.02	0.02									
	8	0.25	0.07	0.03	0.03	0.03											
	16	0.19	0.04	0.03	0.04												

実験1により、以下のことが判明した。

- サイクルのレベル数を増やすと反復回数は増加するが、実行時間の観点から見ると、レベル数は可能な限り大きくする
- 今回のパラメタにおいて、高速化率は最大で数十倍

## 5.4 実験2

### 5.4.1 実験内容

実験2では、対象問題のシミュレーション時間長を延ばし、MGRITの反復回数がどのように変化するか調査する。このとき、対象問題の時間幅は一定とし、 $\Delta t = 16/4096$ に固定して時間ステップ数を増やした。また、反復回数が一定となる条件が存在するかについても調査した。

先の実験1により、サイクルのレベル数はなるべく大きくとった方が良いと分かった。よって、まずはサイクルのレベル数は取りうる値のうち最も大きい値とし、実験を行なった。

### 5.4.2 結果

対象問題の時間幅を固定し、シミュレーション時間長を伸ばした際の反復回数のグラフを図9に示す。この図より、レベルを最大とする今回の設定においては、シミュレーション時間が長くなると反復回数が増大し、時間長が256において収束しなくなることがわかった。

ここで、対象問題のシミュレーション時間長を増加させても一定の回数で収束するような条件が存在するか調査した。調査にあたり、サイクルのレベル数を一定に抑え、最下層の時間幅がシミュレーション時間長によらず一定となるような条件で実験を行なった。この実験の結果を図10に示す。この図より、サイクルのレベル数を抑え、時間長を延ばしても反復回数がほぼ一定に抑えられることが

判明した。以上より、最下層部の時間幅が MGRIT の収束性に影響を与えることが分かった。

また、反復回数が何によって決定されるかを確認するため、最下層部の時間幅が一定となる問題を複数用意し、先と同様の実験を行なった。具体的には、対象問題の時間幅を細かくし、それに応じてサイクルのレベル数を増加させることで、最下層部の時間幅を一定とした3つの問題である。この結果を図 11 に示す。この図より、最下層部の時間幅が同一の条件では、MGRIT の反復回数がほぼ同一となることがわかった。

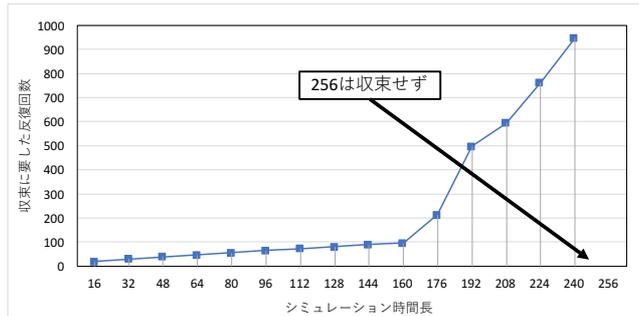


図 9 対象問題の時間長を伸ばした際の反復回数

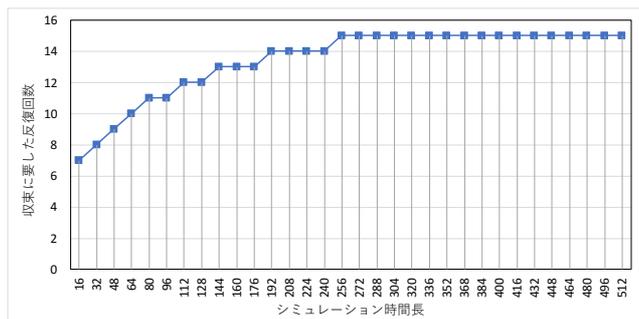


図 10 レベル数一定で時間長を伸ばした際の反復回数

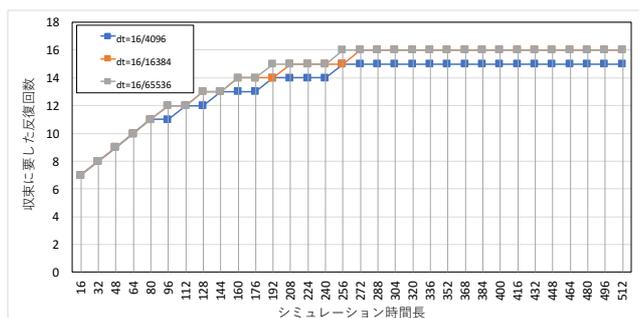


図 11 最下層部の時間幅を一定とした3問題の反復回数

以上より、実験 2 でわかったことは以下の通りである。

- 対象問題のシミュレーション時間長を伸ばす際、サイクルのレベル数を最大まで大きくすると収束しなくなる
- サイクルのレベル数を一定以下に抑えようと、シミュレーション時間を伸ばしても収束する
- MGRIT の反復回数はサイクル最下層部における時間幅に依存している

これらより、反復回数は運動に含まれる周期と MGRIT の最下層部の時間幅に依存しているのではないかと、という仮定が考えられる。これについて明らかにするため、実験 3 では単一質点の問題を用い、運動の周期と時間幅の観点から MGRIT の収束性を検証した。

### 5.5 実験 3

#### 5.5.1 実験内容

実験 3 では、MGRIT の反復回数が何によって決定されるかを明らかにする。実験 2 より、反復回数が運動に含まれる周期と最下層部の時間幅に依存しているのではないかと、という仮定が得られた。よって、本実験は単一質点のばねを用い、運動の周期と時間幅との関係による、反復回数の変化を確認する。

また、シミュレーション時間長を増加させる際には、対象問題の時間幅は一定とし、 $\Delta t = 16/4096$  に固定して時間ステップ数を増やした。

#### 5.5.2 結果

まず、シミュレーション時間長を伸ばしても反復回数が一定となるレベルと、そうでないレベルの境を確認する。

図 12 に、サイクルのレベル数を変化させた際、反復回数がどのように変化するかを調査した結果を示す。この図より、本問題ではレベル 5 と 6 が収束するか否かの境になっていることがわかる。

ここで、周期長と時間幅のより細かい分析を行うため、レベル 5 と同等の設定のもと、質点の質量を減少させ、周期を短くした際の反復回数を調査した。この結果を表 5 に示す。この表は、縦方向が周期の違い、横方向はその周期においてシミュレーション時間長を伸ばした際の反復回数を示している。また、最も右の列は、最下層部で 1 周期内に含まれる格子点数を表している。この表より、今回の実験では最下層部において 1 周期内の格子点数が 4 点以上あれば反復回数は大きな変化がなく、4 点未満になると反復回数が大きく増加し、収束しなくなることがわかった。

以上の結果より、以下のことが判明した。

- 周期的な運動を含む対象問題に対する MGRIT の適用では、最下層部において 1 周期内に複数点の格子点が必要

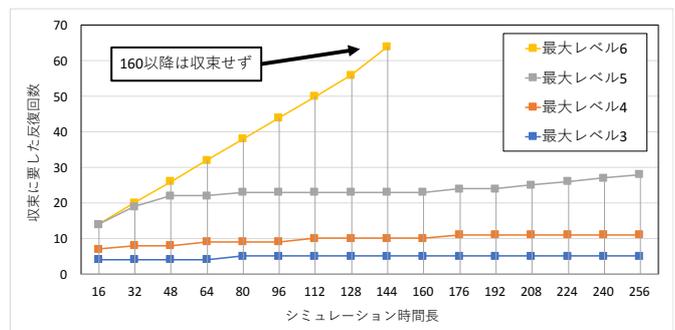


図 12 サイクルのレベル数を変化させた際の反復回数

表 5 周期と時間長を変化させた際の反復回数

	シミュレーション時間長																											
	16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240	256	①											
6.28	14	19	22	22	23	23	23	23	23	23	24	24	25	26	27	28	6.3											
5.88	14	19	21	22	22	22	22	23	24	25	26	27	29	30	31	32	5.9											
5.44	14	19	20	20	21	23	24	26	27	29	30	32	33	35	36	38	5.4											
4.97	14	18	20	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	46	5.0											
4.44	14	22	26	29	32	35	38	41	43	46	48	51	53	55	58	60	4.4											
3.85	16	24	33	42	51	60	69	77	86	95	104	113	121	130	139	148	3.8											
3.14	20	33	46	58	70	128	N/A	3.1																				
2.22	25	39	52	64	76	89	133	238	N/A	2.2																		

表中①：最下層部において1周期内に含まれる格子点の数

## 5.6 実験 4

### 5.6.1 実験内容

実験 4 では、先の実験 3 で確認した結果が複数質点の問題においても同様となるか検証する。

こちらの実験も、対象問題の時間幅は一定とし、 $\Delta t = 16/4096$ に固定して時間ステップ数を増やした。

### 5.6.2 結果

こちら先と同様、シミュレーション時間長を延ばしても反復回数が一定となるレベルと、そうでないレベルの境を確認する。図 13 に、サイクルのレベル数を変化させ、反復回数について調査した結果を示す。この図から、サイクルのレベル数が 4 と 5 の間に、その境があることがわかる。複数質点の問題では、単一質点のように周期を細かく分析することができなかつたため、こちらは実際のシミュレーション結果から読み取った周期長との比較を行なう。

比較にあたっては、シミュレーション時間長が 16 の実行結果を用いた。このパラメタにおける実行結果のうち、質点の変位を図 14 に示す。この図より、u4 (黄色の線) が最も細かい周期であることがわかる。この質点は時間長 16 の中でおよそ 8 つの周期が存在している。このことから、サイクルの最下層部における周期内の格子点数を考える。サイクルのレベル数は 4 であるため、最下層部の時間幅は  $0.25 (= 16/4^3)$  となる。時間長 16 に 8 つの周期が存在するため、1 周期あたりの時間長は 2 となり、最下層部では周期内に 8 ( $= 2/0.25$ ) つの格子点が存在する。

そして、同様にレベル 5 について考えると、こちらは最下層部において 1 周期あたり 2 つの格子点が存在する。

したがって、複数質点の問題も単一質点の問題と同様な結果であることがわかった。

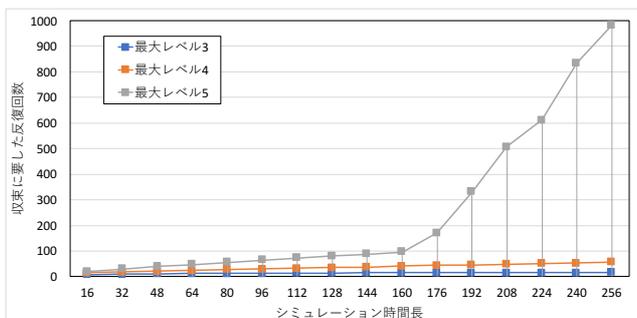


図 13 サイクルのレベル数を変化させた際の反復回数

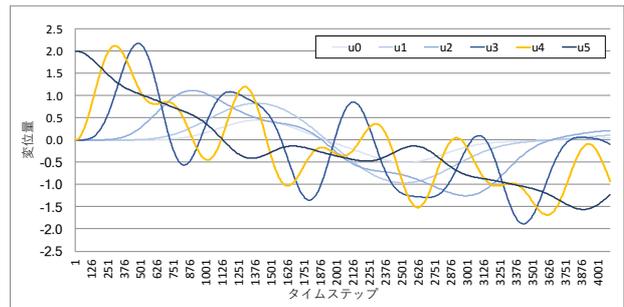


図 14 実行結果における質点の変位

以上より、実験 4 で判明したことは以下の通りである。

- 複数質点のばね問題においても、任意の時間長で反復回数が一定の範囲内で必ず収束するには、最下層部の最も時間幅が大きいところでも周期内に格子点が複数個必要。
- 複数の周期が含まれる振動問題では、最も周波数の高い周期内に格子点を複数打つ必要がある。

## 6. おわりに

本研究では、1次元に並んだ複数の質点とばねによる振動現象を、ニューマーク  $\beta$  法によりシミュレーションする際の、MGRIT の有用性、性質を分析した。

実験の結果、任意のシミュレーション時間長で MGRIT が収束するためには、最も時間ステップ幅が大きくなるレベルにおいて、振動の 1 周期内に複数の格子点が必要であることがわかった。

そして、MGRIT の収束が保証できる中で、最も高速に動作すると考えられるパラメタ設定の方針についても明らかにした。それは、レベル数を最大化すれば良いという方針である。これは、実験 1 にて分かったサイクルのレベル数は取りうる中で最大のものが実行時間的に最も有利という条件と、実験 4 で分かった、最下層部において周期内には複数の格子点が必要という条件から導き出せる。

また、このようにレベル数に制約をつけた安定な条件でも逐次より高速になることが確認できた。今回扱った複数質点の振動問題では、粗格子率が 4 の場合、レベル数は 4 まで安定に解けるとことがわかった。ここから、表 4 より MGRIT は逐次に比較して最大 15 倍の速度で時間積分を計算できることを明らかにした。

しかし、マルチグリッド法は通常、サイクルの階層は最大までとり、最下層の計算を非常に小さくする。これにより、最下層部の計算が問題サイズに影響されない手法である。しかし、今回の結果より、MGRIT では最大のレベルとすることがこのままでは難しいとわかり、サイクルの最下層部が問題サイズに比例して大きくなってしまふことが分かった。

したがって、今後の課題としては、サイクルのレベル数をさらに大きくとっても収束するような解決策の検討があ

げられる。特に、近年は STMG と呼ばれる時間軸方向だけでなく、空間も同時に粗くする手法が提案されている。よって、こういった手法の適用により、これらの課題が解決できるかなどについて調査することが、今後の課題といえる。

## 参考文献

- [1] Global Supercomputing Capacity Creeps Up as Petascale Systems Blanket Top 100, <https://www.top500.org/news/global-supercomputing-capacity-creeps-up-as-petascale-systems-blanket-top-100/> (accessed 2017-2-11).
- [2] J.-L. Lions, Y. Maday, G. Turinici: A "parareal" in time discretization of PDE's. C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. I, Math. 332 (7), pp.661-668 (2001).
- [3] M. J. Gander, S. Vandewalle: Analysis of The Parareal Time-Parareal Time- Integration Method: SIAM J. Sci. Comput. Vol. 29, No. 2, pp. 556-578 (2007). <http://www.unige.ch/~gander/Preprints/parareal.pdf> (accessed 2016-1-25).
- [4] R. D. Falgout, A. Katz, Tz. V. Kolev, J. B. Schroder, A. Wissink, U. M. Yang: Parallel time integration with multigrid, SIAM J. Sci. Comput., 36(6), C635-661 (2014).
- [5] R. D. Falgout, S. Friedhoff, Tz. V. Kolev, S. P. Maclachlan, J. B. Schroder, S. Vandewalle: Multigrid Methods with Space-Time Concurrency, Multigrid Methods with Space-Time Concurrency. SIAM J. Sci. Comput. LLNL-JRNL-678572 (2015).
- [6] W. L. Briggs, V. E. Henson, S. F. McCormick: A multigrid Tutorial Second Edition, SIAM (2000).
- [7] 金子 重郎, 田口悠太, 野村直也, 藤井昭宏, 田中輝雄: Multigrid Reduction in Time のレベル間自由度に関する考察, 情報処理学会第 78 回全国大会, No.2G-06. (2015).
- [8] 田口 悠太, 金子 重郎, 野村 直也, 藤井 昭宏, 田中輝雄: 時間発展非線形偏微分方程式への Multigrid Reduction in Time の適用における特性評価, ハイパフォーマンスコンピューティング研究会, 研究報告 Vol.2016-HPC-153, No.19, pp.1-7 (2015).
- [9] 金子重郎, 藤戸宙希, 藤井昭宏, 田中輝雄, 岩下武史: 非線形熱拡散方程式を対象とした時間方向の並列化手法における補正手法の比較—MGRIT と TSC—, ハイパフォーマンスコンピューティング研究会, 研究報告 Vol.2017-HPC-161 (2016).
- [10] R. D. Falgout, A. Katz, Tz. V. Kolev, J. B. Schroder, A. Wissink, U. M. Yang: Parallel Time Integration with Multigrid Reduction for a Compressible Fluid Dynamics Application, LLNL T. R. LLNL-JRNL-663416 (2015).
- [11] 室田 一雄, 杉原正顕, 線形計算の数理: 岩波書店 pp.106-141 (2009).
- [12] V. Henson: Multigrid methods for nonlinear problems: An overview, Proc. of the SPIE, pp. 36-48 (2003).