Vol.2017-AL-164 No.3
2017/9/19

最小フィルイン問題に対する安全なセパレータについて

小林 靖明[1,a)]　玉木 久夫[2]

概要：木幅における安全なセパレータの概念は Bodlaender と Koster (Discrete Mathematics 2006) によって導入され，実用的な木幅の計算において最も重要な前処理のひとつとして知られている．本研究では，最小フィルイン問題に対する安全なセパレータを考える．グラフ G のセパレータを S とし，S がクリークとなるように G に辺を加えたグラフを G_S とする．S によって分離される各連結成分 W について，$W \cup S$ によって誘導される G_S の部分グラフの最小フィルイン解と G_S において加えた辺集合との和集合が G の最小フィルイン解となるとき，S が安全なセパレータと呼ぶ．最小フィルイン問題においてセパレータが安全であるための十分条件を提案し，その条件を満たすかどうかを判定する多項式時間アルゴリズムを与える．また，最小フィルイン問題のベンチマークのインスタンスにおいて，提案手法の効果を検証するための計算機実験を行った．

1. はじめに

グラフ $G = (V, E)$ において，E とは疎な辺集合 $F \subseteq \{\{u, v\} \notin E\}$ において，$G' = (V, E \cup F)$ が弦グラフとなるとき F を G の**フィルイン** (*fill-in*) と呼ぶ．本稿では**最小フィルイン問題** (*Minimum Fill-In Problem*) を扱うこととする．この問題は与えられたグラフの辺数最小のフィルインを問題であり，Gauss 消去法における非零要素数の最小化と等価であることが知られ [13]，これまでに数多くの研究が行われてきた．G の最小のフィルインの大きさを $\mathrm{mfi}(G)$ と記述する．Garey と Johnson の有名な著書である [9] では，最小フィルイン問題の計算複雑性が 12 個の未解決問題のひとつとして挙げられており，その後すぐに Yannakakis によって，この問題の NP 困難性が証明された [16].

最小フィルインと深く関わりのある概念として，グラフの**木幅** (*treewidth*) が知られており，いくつかの興味深い特徴を最小フィルインと共有している．グラフ G の木幅を求める問題は，G のフィルインを加えて得られる弦グラフのクリーク数 (最大クリークの大きさ) が最小になるようにする最適化問題と等価である．他にも，類似性は計算方法においても現れ，どちらの問題も Bouchtteé と Todinca [4] によって提案された動的計画法によって計算することが可能であり，この方法に基づくアルゴリズムが，現在最も高速な指数時間厳密アルゴリズム [7] として知られている．このアルゴリズムにおいては，**極小セパレータ** (*minimal separator*) と *pothential maximal clique* の概念が重要な役割を果たしている．

実用的な観点においては，木幅を計算する厳密アルゴリズムは数多く提案されてきた [6], [14] のに対し，最小フィルインに対する取り組みはほとんど行われてこなかった (その一方で，最小フィルイン問題に対する理論的な研究は少なからず行われてきた [1], [8], [10], [12])．Bergman ら [2] は最小フィルイン問題に対する数理計画法定式化を与え，Minimum elimination ordering に基づく定式化とくらべてこのような中で，Parameterized Algorithms and Computational Experiments Challenge 2017 (PACE Challenge 2017)[*1] では最小フィルイン問題を取り上げ，実用的な厳密アルゴリズムの研究を進める機会を与えた．

実用的な木幅計算において最も成功した概念のひとつとして**安全なセパレータ**（*safe separator*）[6] が知られている．おおまかに言うと，グラフのセパレータが安全であるとは，そのセパレータを用いて分解したいくつかのグラフのうち，それらの木幅の最大値がもとのグラフの木幅と一致するときである．Bodlaender と Koster [6] や Tamaki [14] は木幅における安全なセパレータがいくつかのベンチマークインスタンスにおいて十分にグラフのサイズを縮小できることを示し，それが木幅を合理的な時間で計算するために重要な役割を果たすことを明らかにした．

これらの背景において，安全なセパレータの概念を他の計算困難な問題に対して適用することは自然であり，最小

1　京都大学
2　明治大学
a)　kobayashi@iip.ist.i.kyoto-u.ac.jp

*1　`https://pacechallenge.wordpress.com/pace-2017/track-b-minimum-fill-in/`

フィルイン問題はその適用先として最も有望な問題であろう．最小フィルイン問題における“安全性”は次節で詳しく述べるとする．著者の知る限り，これまでに最小フィルイン問題に対する安全なセパレータとして呼ぶことができる結果はふたつ存在する．そのひとつは Tarjan の古い結果 [15] であり，セパレータがクリークであるときに安全である．もうひとつは Bodlaender らの結果 [3] で，彼らは極小セパレータがある条件をみたすとき，そのセパレータに辺を加えてクリークにしても最小フィルインの最適性を失わないことを示した．この結果と Tarjan の結果を組み合わせることで，Bodlaender らの結果を安全なセパレータとして解釈することができる．

本稿では，最小フィルイン問題に対する安全なセパレータの十分条件を与え，その十分条件を満たすかどうかを判定する多項式時間アルゴリズムを与える．この十分条件は，Bodlaender ら [3] の条件を一般化しており，いくつかのベンチマークにおいて，提案する十分条件が実用上においても Bodlaender らのものと比べて優れていることを実験的に示す．

本稿の次節以降は以下のような構成である．次節において，本稿で必要な記法や概念を説明し，関連する既知の事実をいくつか紹介する．次の第 3 節では，我々が提案する最小フィルイン問題における安全なセパレータのための十分条件を与え，第 4 節で，その条件を判定する多項式時間アルゴリズムを与える．第 5 節では，提案法を実験的に評価した結果を示し，最終節において，本稿のまとめと課題を述べる．

2. 準備

本稿で扱うグラフは常に単純で無向であるとする．G をグラフとしたとき，G の頂点集合を $V(G)$，辺集合を $E(G)$ と記述する．

頂点集合 $X \subseteq V(G)$ において，X の隣接点集合を $N(X)$ で表し，$N[X] = N(X) \cup X$ とする．X が単一点 x からなるとき，$N(\{x\})$ や $N[\{x\}]$ の代わりに $N(x)$ や $N[x]$ といった記法を使用する場合がある．X によって誘導される G の部分グラフは $G[X]$ のように表す．$G[X]$ に含まれない辺集合でその端点を X に持つものを $\mu(X) = \{\{u,v\} \notin E(G[X]) : u,v \in X\}$ と表す．$F \subseteq \mu(V(G))$ において，$G+F$ で G に F のすべての辺を加えることで得られるグラフを表す．

C を G の閉路とする．C の**弦**とは，C 上で連続しない 2 点をつなぐ辺のことである．C が G の**誘導閉路**であるとは，G が C の弦を持たないときである．同様にパス P の弦とは P 上で連続しない 2 点をつなぐ辺のことであり，P が**誘導パス**であるとは，G が P の弦を持たないことである．**弦グラフ**は，長さ 4 以上の誘導閉路を持たないグラフのことである．

G を連結なグラフとする．$S \subseteq V(G)$ において，S が G の**セパレータ**であるとは，$G[V(G) \setminus S]$ がふたつ以上の連結成分を持つときである．特に，$G[V(G) \setminus S]$ において 2 頂点 $a,b \in V(G) \setminus S$ 間にパスが存在しないとき，S を G の **(a,b)-セパレータ**と呼ぶ．G が文脈より明らかなときは，単に S を (a,b)-セパレータと呼ぶ．S を (a,b)-セパレータとする．S の任意の真部分集合が (a,b)-セパレータではないとき，S を**極小 (a,b)-セパレータ**と呼び，S がいずれかの $a,b \in V(G) \setminus S$ において極小 (a,b)-セパレータであるとき，単に**極小セパレータ**と呼ぶ．ここで，極小セパレータは包含関係に関して必ずしも極小ではないことに注意する．以下の補題は極小セパレータの特徴づけとして良く用いられる．

命題 1. G を連結なグラフとする．S が G の極小セパレータであることと，$G[V(G) \setminus S]$ の連結成分のなかで，ふたつの連結成分 C, C' で $S = N(C) = N(C')$ を満たすものが存在することは等価である．

G が長さ 4 以上の誘導閉路を持つとき，G のフィルイン F は C の弦を少なくともひとつは含まなければならない．この事実より，以下の観察が得られる．

観察 1 ([3])**.** $v_1, v_2, \dots v_l$ を G の長さ 4 以上の誘導閉路の頂点で閉路に現れる順番に沿って添え字を付けたものとし，F を G のフィルインとする．このとき，$\{v_1, v_3\} \notin F$ ならば，ある $3 \le i \le l$ において $\{v_2, v_i\} \in F$ である．

3. 最小フィルインに対する安全なセパレータ

本節では，主結果である最小フィルイン問題に対する安全なセパレータの十分条件を示す．本結果を示す前に，安全なセパレータであることの正確な定義と提案する十分条件が既存の十分条件を一般化していることを見ていく．

G のセパレータ S において，$G[V(G) \setminus S]$ の連結成分を $C_1, C_2, \dots, C_k$ とし，各 $1 \le i \le k$ において $H_i = G[C_i \cup S]$ とする．一般には $\mathrm{mfi}(G) \le \sum_{1 \le i \le k} \mathrm{mfi}(H_i + \mu(S)) + |\mu(S)|$ であることは以下のように確認できる．$G + \mu(S)$ において，S はクリークかつセパレータであるため，Tarjan [15] の結果より，$\mathrm{mfi}(G + \mu(S)) = \sum_{1 \le i \le k} \mathrm{mfi}(H_i + \mu(S))$ である．この不等式を等号で満たす，つまり $\mathrm{mfi}(G) = \sum_{1 \le i \le k} \mathrm{mfi}(H_i + \mu(S)) + |\mu(S)|$ であるとき，S を**安全なセパレータ**と呼ぶ．これらは以下のように考えることもできる．今，$\mu(S)$ を包含する最小フィルインが存在したと仮定する．このとき，S をクリークになるようにして得られるグラフを G' とし，$H'_i = G'[C_i \cup S]$ とすること，$\mathrm{mfi}(G') = \sum_{1 \le i \le k} \mathrm{mfi}(H'_i)$ である [15]．よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{mfi}(G) &= \mathrm{mfi}(G') + |\mu(S)| \\ &= \sum_{1\le i\le k} \mathrm{mfi}(H'_i) + |\mu(S)| \\ &= \sum_{1\le i\le k} \mathrm{mfi}(H_i + \mu(S)) + |\mu(S)|\end{aligned}$$

と安全なセパレータの定義が得られる．そのため，以下では次の条件を安全なセパレータであるための定義として用いる．

命題 2. S を G のセパレータとし，G の最小フィルインで $\mu(S)$ を含むものが存在したと仮定する．このとき S は安全なセパレータである．

以下の補題は Bodlaender ら [3] によって示された安全なセパレータの十分条件である．

補題 1 ([3])**.** S を G の極小セパレータで $|\mu(S)| = 1$ かつ，ある $u \in V(G)$ において $S \subseteq N(u)$ を満たすとする．このとき，$\mu(S)$ を包含する最小フィルインが存在する．

この補題では，セパレータにおいてクリークと対して欠落した辺がちょうどひとつの場合に安全であるための条件を与えている (一方，Tarjan [15] の結果はセパレータに欠落した辺が零の場合である)．欠落した辺がひとつ以上の場合に一般化するために，いくつか定義をする．$K \subseteq V(G)$ が**概ねクリーク** (*almost clique*) であるとは，$K \setminus \{x\}$ がクリークとなるような頂点 $x \in K$ が存在するときである．$A \subseteq V(G)$ とする．ここで，$G[A]$ は連結とは限らないことに注意する．$S = N(A)$ が概ねクリークであると仮定する．対 $(b, \{P_e : e \in \mu(N(A))\})$ が A の**ガード**であるとは，以下の条件を満たすときである．
- $S \subseteq N(b)$ を満たす $b \in V(G) \setminus N[A]$ が存在する．
- 各 $\{u, v\} \in \mu(S)$ について，$P_{\{u,v\}}$ は u と v の間の誘導パスで，すべての内点が A に含まれる．
- パスの集合 $\{P_e : e \in \mu(S)\}$ が内点素である．

ガードの条件は補題 1 の条件を一般化していることは，以下のように確認できる．S を G の極小セパレータとし，$S \subseteq N(v)$ かつ $|\mu(S)| = 1$ を満たすとする．このとき，命題 1 より，$G[V(G) \setminus S]$ の連結成分 C で $S = N(C)$ かつ $v \notin C$ を満たすものが存在する．さらに，$|\mu(S)| = 1$ より，S は概ねクリークである．$\{u, w\} \in \mu(S)$ に対してパス $P_{\{u,w\}}$ は $G[C \cup \{u, w\}]$ における u と w の間の最短路として選ぶことで，$(v, \{P_{\{u,w\}}\})$ は C のガードであることが確認できる．よって，ガードの条件は (1)$\mu(S)$ がひとつ以上の辺を含む，(2)$G[A]$ は連結とは限らない，というふたつの方向へ一般化している．

以下の補題は，A のガードが存在することが，$N(A)$ のが安全であることを保証するものである．

補題 2. $A \subseteq V(G)$ がガード $(b, \{P_e : e \in \mu(N(A))\})$ を持つと仮定する．このとき，G の最小フィルインで $\mu(N(A))$ を含むものが存在する．

証明. $B = V(G) \setminus N[A]$ とし，$S = N(A)$ とする．ここで，$S \subseteq N(b)$ より $S = N(B)$ でもあることに注意する．

F を G の任意の最小フィルインとする．F を以下のように F_S, F_A, F_B, F_{AB} に分割する．
- F_S は両端点が S に含まれるような F の辺，
- F_A は両端点が $N[A]$ に含まれるような $F \setminus F_S$ の辺，
- F_B は両端点が $N[B]$ に含まれるような $F \setminus F_S$ の辺，
- F_{AB} は片方の端点が A に含まれ，もう一方の端点が B に含まれるような F の辺，

である．以下では F_{AB} から新たな辺集合 F'_A を定義し，$G[N[A]]+(F_S \cup F_A \cup F'_A)$ と $G[N[B]]+(F_B \cup \mu(S))$ のどちらも弦グラフとなり，$\mu(S) \subseteq F_S \cup F_A \cup F'_A$ であることを証明する．上を満たすと仮定すると，$F' = F_S \cup F_A \cup F_B \cup F'_A$ としたとき，$G + F'$ において S はクリークであるため，$G + F'$ は弦グラフである．さらには，$|F'_A| \le |F_{AB}|$ を満たすとき，F' も G の最小フィルインである．

F'_A は以下のように構成する．$f = \{u, v\} \in F_{AB}$ を $u \in A$ かつ $v \in B$ とする．$\alpha(f)$ を以下のように定義する．
- もし $v \ne b$ ならば，$\alpha(f) = \mathfrak{u}$ である．これは $\alpha(f)$ は未定義であることを意味する．
- $v = b$ であり，u がある P_e に属すると仮定する．$\{u, x\} \in E(G) \cup F_A$ であるならば $\alpha(f) = e$ とし，そうでないならば $\alpha(f) = \{u, x\}$ とする．
- $v = b$ であり，u がいずれの P_e にも属さないと仮定する．$\{u, x\} \in F_A$ ならば $\alpha(f) = \mathfrak{u}$ であり，そうでないならば $\alpha(f) = \{u, x\}$.

主張 1. $\mu(S) \subseteq F_S \cup F_A \cup F'_A$.

主張の証明. 任意の $e \in \mu(S) \setminus (F_S \cup F_A)$ が $e \in F'_A$ であることを示す．C_e を P_e の両端点と b を接続してできる G の誘導閉路とする．観察 1 より，$e \notin F_S \cup F_A$ であるため，F_{AB} は，$u \in V(P_e)$ であるような弦 $\{u, b\}$ を含む．P_e 上の頂点 u を，$\{u, b\} \in F_{AB}$ を満たす頂点で P_e 上で最も x に近い頂点として選ぶ．P_e における x と u 間の部分パスを Q とすると，$G + F$ が弦グラフであるためには，$\{u, x\} \in E(G)$ または $\{u, x\} \in F_A$ である．いずれの場合においても，α の定義より，$e \in F'_A$ である． □

主張 2. $G[N[B]] + (F_B \cup \mu(S))$ は弦グラフである．

主張の証明. $H = G[N[B]] + (F_B \cup \mu(S))$ とする．背理法で証明するために，H が弦グラフではないと仮定する．$G[N[B]] + F_B$ は弦グラフであるため，H の長さ 4 以上の誘導閉路は $\mu(S)$ の辺 $\{x, y\}$ を通る．P をその誘導閉路から辺 $\{x, y\}$ を取り除いて得られる誘導パスとする．b は x と y のどちらとも隣接するため，P の両端点を b に接続して得られる閉路は $G + F$ において誘導閉路となる．これは F が G のフィルインであることに反する． □

主張 3. $G[N[A]] + (F_S \cup F_A \cup F'_A)$ は弦グラフである．

主張の証明． $H = G[N[A]] + (F_S \cup F_A \cup F'_A)$ とする．背理法で証明するために，H が弦グラフではないと仮定する．C を H の長さ 4 以上の任意の誘導閉路とする．このとき，$G[N[A]] + (F_S \cup F_A)$ は弦グラフであるため，C は F'_A の辺を少なくともひとつは含む．また，F'_A の任意の辺は x に接続するため，C は高々ふたつの F'_A の辺を含むことができる．以下では C が F'_A の辺をちょうどひとつ含む場合とちょうどふたつ含む場合を分けて考える．

C が F'_A の辺をちょうどひとつ含むと仮定し，それを $f = \{u, x\}$ と置く．$f' = \{a, b\}$ が $\alpha(f') = f$ を満たす辺とすると，$f \in \mu(S)$ または $u = a$ のいずれかを満たす．$f \in \mu(S)$ である場合，α の定義より，$\{a, x\} \in E(G) \cup F_A$ である．そうでない場合，つまり $u = a$ の場合，$\{u, b\} \in F_{AB}$ である．いずれの場合においても，u と x はどちらも $G+F$ において b と隣接する．C から f を除き $\{u, b\}$ と $\{x, b\}$ を加えてできる閉路を C' とする．$V(C')$ で誘導される $G+F$ の部分グラフは弦グラフであるため，観察 1 より，F のなかに C' の弦で b に接続されるものが存在する．また，C は H において誘導サイクルであるため，C' の $G+F$ における任意の弦は b と隣接する．このような弦のうち，b ではない端点が x と隣接しないものを $\{a', b\} \in F$ とすると，$\alpha(\{a', b\}) = \{a', x\}$ が F'_A に含まれるため，C が H の誘導閉路であることに反する．よって矛盾が生じる．

次に，C がちょうどふたつの F'_A の辺を含むと仮定し，それぞれを $\{u, x\}, \{v, x\}$ とする．H において S はクリークであるため，u と v の少なくとも一方は A に含まれる．ここでは，一般性を失うこと無く $u \in A$ と仮定する．C が F'_A の辺をひとつ含む場合と同様に，$G + F$ において u と v はどちらも b と隣接する．C から x を削除し u と v を b に隣接させてできる閉路を C' とすると，$V(C')$ によって誘導される $G + F$ の部分グラフは弦グラフなので，観察 1 より $\{u, v\} \in E(G) \cup F_A$ または b と隣接するような C' の弦が F_{AB} に存在する．前者の場合，C が H の誘導閉路であることに反し，後者の場合，上と同様の議論を用いることで，$\alpha(\{a', b\}) = \{a', x\}$ が F'_A にふくまれるような C の弦が存在し，このことが矛盾となる． □

よって，補題が示された． □

4. 安全性検査のためのアルゴリズム

本節では，$A \subseteq V(G)$ が与えられたとき，A のガード $(b, \{P_e : e \in \mu(N(A))\})$ が存在するかどうかを判定する多項式時間アルゴリズムを与える．G' を $G[N[A]]$ から両端点が $N(A)$ に含まれるような辺をすべて削除して得られるグラフとする．この節の残りにおいては，G' において，内点素誘導パス $\{P_e : e \in \mu(N(A))\}$ が存在するかどうかに注目する．これは，それ以外の条件は明らかに多項式時間で検査できるためである．

補題 3. G' を上で定義したグラフとする．このとき内点素誘導パス $\{P_e : e \in \mu(N(A))\}$ が G' に存在することと，(誘導とは限らない) 内点素パス $\{P'_e : e \in \mu(N(A))\}$ が G' に存在することは等価である．

証明． $\{P_e : e \in \mu(N(A))\}$ は内点素パスでもあるため，以下では逆側の方向を示す．各 P'_e において，P'_e が G' に弦をもつ限りその弦とその弦の両端点によって定義される P'_e の部分パスを置き換えることによって得られるパスを P_e とする．このとき，明らかに P_e は誘導パスである．また，$V(P_e) \subseteq V(P'_e)$ であるため，$\{P_e : e \in \mu(N(A))\}$ は内点素である．よって補題が証明された． □

この補題より，内点素誘導パス $\{P_e : e \in \mu(N(A))\}$ が存在するかどうかを判定する代わりに，内点素パス $\{P'_e : e \in \mu(N(A))\}$ を見つければ十分であることがわかる．一般に，与えられた頂点対集合間の点素パスを見つめる問題は NP 完全 [11] であるが，この場合においては，$N(A)$ が概ねクリークであるため，$\mu(N(A))$ に含まれる辺は端点として x を必ず持つ．そのため，通常の増加路アルゴリズムによって，内点素パスが存在するかどうかは多項式時間で判定可能である．

5. 計算機実験

本節では，補題 2 の効果を確かめるための実験について説明し，実験結果を示す．すべての計算機実験は Intel Xeon Quad-Core 3.2GHz，16GB メモリを搭載する Mac Pro 上で行い，アルゴリズムは Java 1.8 で実装し，実行時には 8GB のヒープメモリを割り当てた． 実験では，PACE Challenge 2017 の Track B: Minimum Fill-in において公開されている 100 個のグラフから飛び抜けて大きいひとつのインスタンス (15.graph) を除いた 99 個とグリッドグラフについて，Bodlaender ら [3] の条件と提案する十分条件の効果を測定した．効果については，その条件で加えられた辺の数と実行時間の観点と，それぞれの手法を適用したあとでどのくらいインスタンスが簡略化されたかを比較した．

PACE Challenge 2017 Track B の 99 個のインスタンスの中で 47 個のインスタンス (そのうち 20 個のインスタンスは弦グラフ) はいずれの条件を用いた場合でも加えられる辺の数が 0 であったため，それを除いた 52 個のインスタンスに関して抜き出した結果が表 1 である．safe と書かれた列は，それぞれの十分条件において加えられる辺の数を表し，time は実行時間 (ミリ秒) を表す．実行時間においてはほぼ同程度から最大でも 2 倍以内であるにも関わらず，52 個のインスタンスのうち 42 個のインスタンスにお

			既存手法 [3]		提案手法					既存手法 [3]		提案手法	
name	$\|V(G)\|$	$\|E(G)\|$	safe	time	safe	time	name	$\|V(G)\|$	$\|E(G)\|$	safe	time	safe	time
2.graph	129	4943	2	39	2	50	59.graph	251	2746	1	35	13	41
5.graph	101	110	21	10	21	14	62.graph	85	2516	1	30	1	39
9.graph	27	254	1	10	4	15	67.graph	276	346	105	24	131	58
11.graph	126	1095	1	16	1	18	68.graph	5357	101169	0	15533	6	15237
13.graph	119	161	38	14	59	32	70.graph	301	362	101	25	106	49
17.graph	1000	1960	171	150	352	282	71.graph	301	11593	0	414	8133	374
18.graph	150	259	29	15	44	31	72.graph	301	5510	0	124	2	132
19.graph	300	617	56	37	120	72	75.graph	40	539	1	12	3	14
20.graph	50	59	2	9	2	9	76.graph	72	1121	1	17	1	21
21.graph	3391	4600	274	174	479	391	79.graph	120	4941	2	46	2	54
23.graph	200	661	27	34	46	60	80.graph	1454	1923	504	206	730	551
24.graph	75	158	11	11	27	20	84.graph	76	83	15	8	15	10
25.graph	1612	2106	530	222	767	561	86.graph	76	132	5	18	64	31
28.graph	151	1522	4	29	29	50	88.graph	5300	8271	1913	11404	3311	18141
29.graph	151	316	2	31	4	36	89.graph	138	6338	1	55	1	59
30.graph	151	2376	0	58	11	60	90.graph	1174	1417	460	105	579	326
31.graph	100	207	16	18	40	32	91.graph	205	421	12	29	92	49
32.graph	500	1653	86	101	100	181	92.graph	132	255	14	20	56	39
34.graph	9532	35023	1176	16411	2438	30741	93.graph	690	1029	113	142	516	238
36.graph	175	199	42	13	46	18	94.graph	357	6225	2	137	10	140
38.graph	176	378	3	36	9	46	95.graph	465	1004	78	106	203	134
42.graph	66	1460	3	21	3	21	96.graph	247	804	14	46	62	75
50.graph	30	349	0	12	3	11	97.graph	298	780	22	47	100	95
52.graph	226	501	3	43	9	59	98.graph	213	380	19	26	83	48
56.graph	276	20850	0	121	4465	270	99.graph	166	396	5	25	59	41
57.graph	1624	2213	519	329	767	666	100.graph	152	377	3	23	40	39

表 1 PACE Challenge 2017 Track B の公開インスタンスにおける既存手法 [3] と提案手法の効果と実行時間.

いて，加えられる辺の数が真に増加した．

また，この 99 個のインスタンスのうち，既に弦グラフであるような 20 個のインスタンスを除いた 79 個のインスタンスに対し，各手法を適用したあとのグラフに非クリークであるような極小セパレータがいくつ存在するかを計算し，それらが各手法を適用することでどれだけ減少するかを計測した．極小セパレータを用いることの理由は，$|\Delta(G)|$ を G の極小セパレータの個数とすると，最小フィルイン問題は $O(|\Delta(G)|^2 n)$ 時間で計算可能 [4], [5] であるため，最小フィルイン問題がどれだけ容易になるかを示す観点では，単純に頂点数を用いるよりも極小セパレータ数で比較することが望ましい [*2]．計測した結果を表 2 に示す．79 個のインスタンスのなかで表に無い 37 個のインスタンスについては，いずれの手法を適用しても非クリークな極小セパレータの数が 200 万個以上であった．

注目すべき点は 56.graph と 71.graph においては，既存手法 [3] を適用しても 200 万個以上の非クリーク極小セパレータが存在したが，提案手法を適用したところ，この前処理のみで最小フィルインが計算された．

表 3 は，グリッドグラフにおける既存手法 [3] と提案手法の比較である．Grid の後の数字はグリッドの大きさを表し，具体的には Grid$x$_y は $x \times y$ グリッドを表す．すべてのインスタンスにおいて，その実行時間は既存手法，提案手法ともに 80 ミリ秒未満であった．最も小さいグラフを除いて，既存手法より提案す手法が真に効果的であることがわかるが，大きなグラフでも追加できる辺の数は 20 であるため，効果は限定的であるといえる．

6. おわりに

本研究では，最小フィルイン問題に対する安全なセパレータを考え，その十分条件をひとつ与えた．この十分条件は Bodlaender ら [3] の条件を一般化しており，計算機実験においても多くのインスタンスにおいて効果があることが確認できた．また，提案した十分条件は多項式時間で判定できることを示した．提案した十分条件のさらなる一般

[*2] 実際には，$|\Pi(G)|$ を G の pothential maximal clique の数としたとき，$O((|\Delta(G)| + |\Pi(G)|)n)$ 時間で最小フィルイン問題を解くことができるので，$|\Delta(G)| + |\Pi(G)|$ を計測することが望ましいが，一般に pothential maximal clique を列挙することは，極小セパレータを列挙することよりも実用的な観点で難しいため，今回は $|\Pi(G)| = O(|\Delta(G)|^2)$ であることを利用して，極小セパレータの個数のみを考慮した．

name	適用なし	既存手法 [3]	提案手法	name	適用なし	既存手法 [3]	提案手法
2.graph	136	128	128	44.graph	878	878	878
3.graph	186	186	186	50.graph	4	4	0
5.graph	96	0	0	51.graph	7	7	7
8.graph	776	776	776	56.graph	>2000000	>2000000	0
9.graph	15	11	6	62.graph	132	130	130
10.graph	2944	2944	2944	67.graph	>2000000	280039	9512
11.graph	2487	2485	2485	69.graph	5115	5115	5115
13.graph	638952	8219	397	70.graph	>2000000	138357	64756
16.graph	22753	22753	22753	71.graph	>2000000	>2000000	0
18.graph	314666	4976	1537	72.graph	136275	136275	136271
20.graph	4	0	0	75.graph	4	2	0
22.graph	30470	30470	30470	76.graph	31	29	29
24.graph	1158	548	164	77.graph	2386	2386	2386
26.graph	2549	2549	2549	78.graph	7780	7780	7780
28.graph	7840	7785	4624	79.graph	385	380	380
30.graph	412	412	355	81.graph	207596	207596	207596
31.graph	1080140	203797	21372	83.graph	7381	7381	7381
33.graph	1186219	1186219	1186219	84.graph	51	0	0
36.graph	1212	5	0	86.graph	12287	10481	1430
40.graph	8019	8019	8019	89.graph	1687	1685	1685
42.graph	16	10	10	92.graph	>2000000	>2000000	736879

表 2 PACE Challenge 2017 Track B の公開インスタンスにおける非クリーク極小セパレータの個数と，既存手法 [3] と提案手法適用後の極小セパレータの個数．“>2000000” と記載されているセルは極小セパレータの個数が 200 万を超えるケースである．

化や別の十分条件の存在は興味深い問題である．提案した条件はセパレータが概ねクリークである場合に成立しうる条件であるため，提案手法では発見できないような疎なセパレータにも適用可能な条件は有用であろう．

Bodlaender ら [3] の結果は，実験的な研究のために提案されたのではなく，理論的なアルゴリズムの計算量を下げるために利用された．本結果をそのような理論的な結果に適用することが可能かどうかは興味深い問題である．

また，本研究では実用的なアルゴリズムのための前処理を与えたが，最小フィルイン問題を解く実用的な厳密アルゴリズムの研究は多くなされているとはいい難い．そのような研究と本研究の前処理を組合せることで，実際の問題をどれだけ解決できるようになるかが今後の課題である．

参考文献

[1] A. Agrawal, P. N. Klein, R. Ravi: Cutting down on fill using nested dissection: Provably good elimination orderings. In Proc. of Graph Theory and Sparse Matrix Computation, vol. 56 of The IMA Volumes in Mathematics and its Applications, pp. 31–55, 1993.

[2] D. Bergman, C. H. Cardonha, A. A. Cire, A. U. Raghunathan: On the minimum chordal completion polytope. arXiv:1612.01966, 2016.

[3] H. L. Bodlaender, P. Heggernes, Y. Villanger: Faster parameterized algorithms for minimum fill-in. Algorithmica 61(4), 817-838, 2011.

[4] V. Bouchitté, I. Todinca: Treewidth and Minimum Fill-in: Grouping the Minimal Separators. SIAM Journal on Computing 31(1), 212–232, 2001.

[5] V. Bouchitté, I. Todinca: Listing all pothential maximal cliques of a graph. Theoretical Computer Science 276, 17–32, 2002.

[6] H. L. Bodlaender, A. M. C. A. Koster: Safe separators for treewidth. Discrete Mathematics 306(3), 337-350, 2006.

[7] F. V. Fomin, Y. Villanger: Treewidth computation and extreamal combinatorics. Combinatorica 32(3), 289–308, 2012.

[8] F. V. Fomin, Y. Villanger: Subexponential parameterized algorithm for minimum fill-in. SIAM Journal on Computing 42(6), 2197–2216, 2013.

[9] M. R. Garey, D. S. Johnson: Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. W. H. Freeman & Co. New York, 1979.

[10] H. Kaplan, R. Shamir, R. E. Tarjan: Tractability of parameterized completion problems on chordal, strongly chordal, and proper interval graphs. SIAM Journal on Computing 28(5), 1906–1922, 1999.

[11] R. M. Karp: On the computational complexity of combinatorial problems. Networks 5, 45–68, 1975.

[12] A. Natanzon, R. Shamir, R. Sharan: A polynomial approximation algorithm for the minimum fill-in problem. SIAM Journal on Computing 30(4), 1067–1079, 2000.

[13] D. J. Rose: Triangulated graphs and the elimination process. Journal of Mathematical Analysis and Applications 32, 597 – 609, 1970.

[14] H. Tamaki: Positive-instance driven dynamic programming for treewidth. arXiv:1704.05286, 2017.

[15] R. E. Tarjan: Decomposition by clique separators. Discrete Mathematics 55(2), 221–232, 1985.

[16] M. Yannakakis: Computing the minimum fill-in is NP-complete. Society for Industrial and Applied Mathemat-

		safe		非クリーク極小セパレータ数		
name	$\|V(G)\|$	既存手法 [3]	提案手法	適用なし	既存手法 [3]	提案手法
Grid3_3	9	5	5	20	0	0
Grid3_4	12	6	9	39	6	0
Grid3_5	15	6	13	62	17	0
Grid3_6	18	6	17	89	32	0
Grid3_7	21	6	21	120	51	0
Grid3_8	24	6	25	155	74	0
Grid3_9	27	6	29	194	101	0
Grid3_10	30	6	33	237	132	0
Grid4_4	16	4	12	110	60	12
Grid4_5	20	4	16	237	147	25
Grid4_6	24	4	16	486	316	80
Grid4_7	28	4	16	977	647	187
Grid4_8	32	4	16	1952	1302	394
Grid4_9	36	4	16	3895	2605	801
Grid4_10	40	4	16	7774	5204	1608
Grid4_4	16	4	12	110	60	12
Grid4_5	20	4	16	237	147	25
Grid4_6	24	4	16	486	316	80
Grid4_7	28	4	16	977	647	187
Grid4_8	32	4	16	1952	1302	394
Grid4_9	36	4	16	3895	2605	801
Grid4_10	40	4	16	7774	5204	1608
Grid5_5	25	4	20	617	427	71
Grid5_6	30	4	20	1530	1102	260
Grid5_7	35	4	20	3768	2774	736
Grid5_8	40	4	20	9231	6871	1941
Grid5_9	45	4	20	22513	16859	4933
Grid5_10	50	4	20	54702	41098	12264
Grid6_6	36	4	20	4575	3413	1069
Grid6_7	42	4	20	13965	10663	3721
Grid6_8	48	4	20	42116	32764	12466
Grid6_9	54	4	20	125730	99230	40384
Grid6_10	60	4	20	371619	296653	127187
Grid7_7	49	4	20	56829	44083	16595
Grid7_8	56	4	20	229450	180872	73422
Grid7_9	63	4	20	927101	740013	320067
Grid7_10	70	4	20	>2000000	>2000000	1385858
Grid8_8	64	4	20	1224227	981221	427665
Grid8_9	72	4	20	>2000000	>2000000	>2000000
Grid9_9	81	4	20	>2000000	>2000000	>2000000

表 3　グリッドグラフのにおける既存手法 [3] と提案手法によって加えられる辺の数と，それぞれの手法の適用前，適用後の非クリーク極小セパレータの数．“>2000000” と記載されているセルは極小セパレータの個数が 200 万を超えるケースである．

ics 2(1), 77–79, 1981.