

セルオートマトン上の 数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズム

上川 直紀^{1,a)} 梅尾 博司^{1,b)}

概要：

セルオートマトン (CA) は J. von Neumann により考案された並列計算モデルの一つであり、現在では複雑系などの多くの分野で研究がなされている。CA はセルと呼ばれる有限状態オートマトンにより構成され、セルは自らと、隣接するセルの内部状態という局所的な情報を元に、自らの内部状態を遷移させる機能しか持たない。しかしながら、この局所的な相互作用がモデル全体に影響を及ぼし、CA は巨大で複雑な事象をシミュレートすることができるという特徴を持つ。CA 上で考察されている問題の一つに実時間数列生成問題が存在する。これまで、素数列、Fibonacci 数列、数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ などの非正則数列の CA 上の生成アルゴリズムが明らかにされている。本稿では、これまでに言及されていない、数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムの設計を行う。

A Generation Algorithm for Sequence $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ on Cellular Automata

NAOKI KAMIKAWA^{1,a)} HIROSHI UMEO^{1,b)}

1. はじめに

セルオートマトン (CA) は生物固有の能力である自己増殖、自己複製機能を形式的に記述するモデルとして、J. von Neumann [7] により考案された並列計算モデルであり、現在では、複雑系などの多くの分野で研究がなされている。CA はセルと呼ばれる有限状態オートマトンにより構成され、セルは自らと、隣接するセルの内部状態という局所的な情報を元に、自らの内部状態を遷移させる機能しか持たない。しかしながら、この局所的な相互作用がモデル全体に影響を及ぼし、CA は巨大で複雑な事象をシミュレートすることができるという特徴を持つ。現在では、複雑系などの多くの分野で CA に関連する研究がなされている。

CA の研究課題の 1 つとして、数列生成問題が挙げられる。Arisawa [1] は CA 上の素数列、Fibonacci 数列、数列

$\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 、数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の線形時間生成アルゴリズムを、Korec [6] は素数列の実時間生成アルゴリズムを、Kamikawa and Umeo [4], [5] は Fibonacci 数列、数列 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 、数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 、数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の実時間生成アルゴリズムを明らかにした。

本稿ではこれまでの CA 上の数列生成問題では扱われていない、数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の実時間生成アルゴリズムについて考察を行う。実時間、数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムが 8 状態の CA で実現することを明らかにし、その正当性について言及する。

2. セルオートマトン上の数列生成問題

CA はセルと呼ばれる有限状態オートマトン A の有限個のアレイで構成される。図 1 参照。

$n \geq 1$ とした場合、左端から $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ と呼ぶ。有限状態オートマトン A を定式化すると、 $A = (Q, \delta, a)$ となる。それぞれ、以下の意味を持つ。

¹ 大阪電気通信大学
Osaka Electro-Communication University

a) naoki@osakac.ac.jp

b) umeo@cyt.osakac.ac.jp

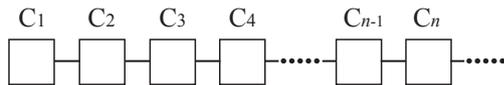


図 1 1次元接続セルオートマトン

- (1) Q は内部状態の有限集合である.
- (2) δ は状態遷移関数であり, 次のように定義される.

$$\delta: Q \times Q \times Q \rightarrow Q$$

この場合の状態遷移関数 $\delta(p, q, r) = s$ ($p, q, r, s \in Q$) は次の意味を持つ.

あるステップ t 時に, セル C_i の内部状態が q であり, 左側のセルの内部状態が p , 右側のセルの内部状態が r であると, 次のステップ $t+1$ 時にセル C_i の内部状態が s に遷移する.

左端のセル C_1 は左側からの入力として常に外界を表す特殊な状態 $\$$ が入力される. また静止状態 $q(\in Q)$ は隣接する左右のセルの状態が q の場合, q を維持し続けるという特徴を持つ. すなわち, 遷移規則 $\delta(q, q, q) = q$, $\delta(\$, q, q) = q$ が定義される.

- (3) 状態 $a(\in Q)$ は数列生成に使用する特別な状態である.

$\{t(n) | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を無限に単調増加する正整数の数列とすると, 任意の自然数 n について, $t = t(n)$ 時のみにセル C_1 の内部状態が内部状態 a を取ると, A は実時間で, 数列 $\{t(n) | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を生成すると言う.

次に, セル空間を記述する記法を導入する. i, j, n を正の自然数, t を正の整数とし, $1 \leq n, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, i < j, t \geq 0$ とする. 時刻 t 時のセル C_i を s_i^t と表し, 時刻 t 時の n 個のセルからなるセル空間を以下の様に表す.

$$t: s_1^t \dots s_n^t$$

また, 時刻 t 時にセル C_1 からセル C_{i-1} の $i-1$ 個のセル全ての内部状態が 0 , セル C_i からセル C_j の $j-i+1$ 個のセル全ての内部状態が s , セル C_{j+1} 以降のセル全ての内部状態が u の場合, 以下の様にまとめて記述する.

$$t: \overbrace{0 \dots 0}^{[1, i-1]} \overbrace{s \dots s}^{[i, j]} \overbrace{u \dots u}^{[j+1, \dots]}$$

次にセル空間の 1 ステップの変化を表す演算記号 " \Rightarrow " を導入する. 以下の様に, \Rightarrow の左右にセル空間の状態を記述した場合, \Rightarrow の左側のセル空間の状態が変化前の状態で, 右側が 1 ステップ後のセル空間の状態となる.

$$t: \overbrace{0}^{[1]} \overbrace{ss \dots}^{[2, \dots]} \Rightarrow t+1: \overbrace{00}^{[1, 2]} \overbrace{ss \dots}^{[3, \dots]}$$

また, 遷移規則の簡略記法も導入する. 遷移規則 $\delta(w, x, y) = z$ の場合, 省略して $w \times y \rightarrow z$ と記述する.

3. 数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の実時間生成アルゴリズム

M を 8 状態 CA とし, $M = (Q, \delta, a)$, $Q = \{q, a, b, c, d, e, f, p\}$ とする. i を任意の自然数とし, $i \geq 1$ とする. 図 2 に示すように, あらかじめ, 時刻 $t = 0$ 時にセル $C_{\frac{i^2+i+2}{2}}$ 上にマーキング "p" が施されていると仮定する.

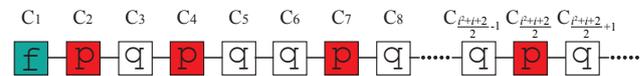


図 2 初期計算状況

図 3 に数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成の為に時間・空間図を示す. 時間・空間図とは横軸にセル空間, 縦軸に時刻とし, 時間の経過におけるセル空間の変化を表す図である. 時間・空間図に示す線はセル空間上の状態の伝播であり, 波と呼ぶ. 図 3 では実時間で数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を生成する為に, a 波, b 波, p 波を用いる. a 波は 1 ステップにつき 1 セル, すなわち, 速さ 1/1 で右方向に進行する波である. b 波は速さ 1/1 で左方向に進行する波であり, p 波はその場にとどまり続ける速さ 0 の波である. 図 2 に示すセル $C_{\frac{i^2+i+2}{2}}$ 上のマーキング "p" が p 波であり, 左から数えて i 番目の p 波を P_i と呼ぶ. P_i はセル $C_{\frac{i^2+i+2}{2}}$ 上に存在する.

時刻 $t = 1$ 時にセル C_1 の内部状態が a に遷移し, a 波が生成される. a 波は速さ 1/1 でセル空間を右方向に進み, P_1 と衝突する. 衝突により, a 波は消滅し, 速さ 1/1 で左方向に進む b 波が生成される. b 波はセル空間を左方向に進みセル C_1 に達する. セル C_1 に達する事で, b 波は消滅し, a 波が生成される. セル C_1-P_1 間を a 波, b 波が往復運動し, 3 回目の a 波と P_1 の衝突の際に P_1 は消滅し, b 波を生成する. b 波は時刻 $t = 7$ 時にセル C_1 に到達し, 1 ステップ後の時刻 $t = 8$ 時にセル C_1 の内部状態が a に遷移し, a 波が生成され, セル C_1-P_2 間を a 波, b 波が往復運動する.

この波の往復運動を繰り返すことで, 時刻 $t = i^3$ 時にセル C_1 の内部状態が a に遷移し, a 波が生成される. この時, 最も左側の p 波は P_i であり, セル $C_{\frac{i^2+i+2}{2}}$ 上に存在する. セル C_1 -セル $C_{\frac{i^2+i+2}{2}}$ 間には $\frac{i^2+i+2}{2}$ 個のセルが存在し, a 波は 1 ステップにつき 1 セル進む速さ 1/1 の波であるので, a 波がセル $C_{\frac{i^2+i+2}{2}}$ に達するには $\frac{i^2+i+2}{2} - 1$ ステップ必要である. 同様に, b 波がセル C_1 に達するには $\frac{i^2+i+2}{2} - 1$ ステップ必要であるので, セル C_1 -セル $C_{\frac{i^2+i+2}{2}}$ 間を a 波, b 波が 1 往復するには $2 \cdot (\frac{i^2+i+2}{2} - 1) = i^2 + i$ ステップ必要である. 時刻 $t = i$ から a 波, b 波がセル C_1 -セル $C_{\frac{i^2+i+2}{2}}$ 間を 3 往復した 1 ステップ後, すなわち, 時刻 $t = i^3 + 3 \cdot (i^2 + i) + 1 = (i+1)^3$ 時にセル C_1 の内部状態が a に遷移し, a 波が生成される. この様に, セル $C_{\frac{i^2+i+2}{2}}$ 上にマーキング "p" を行い, セル C_1 -セル $C_{\frac{i^2+i+2}{2}}$ 間を a 波, b 波を往復運動させる事で, 数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を生成する事が可能である.

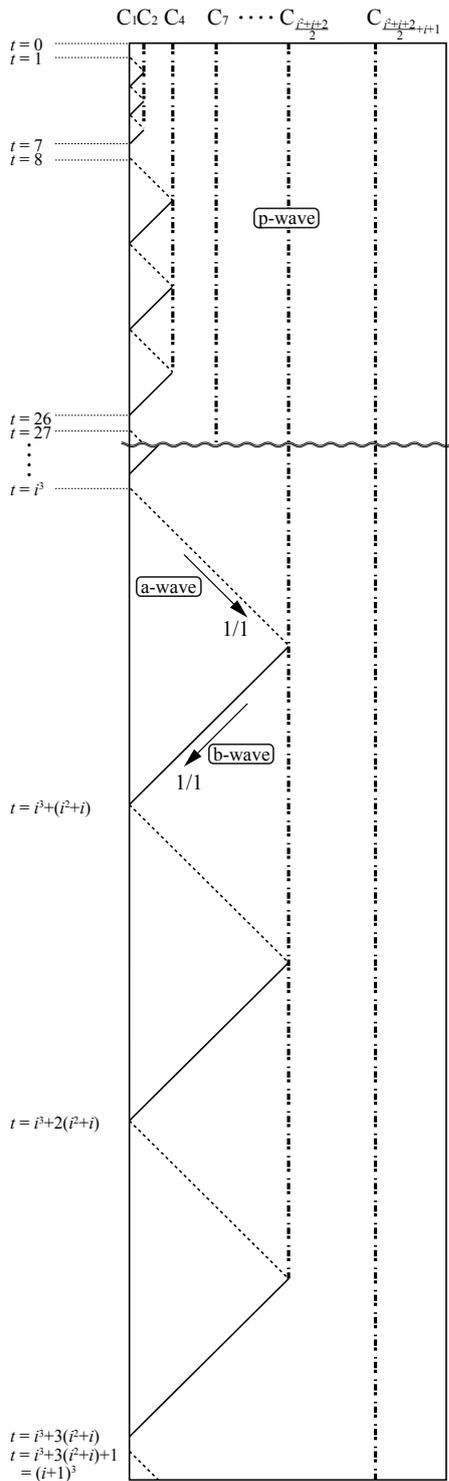


図3 数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成のための時間・空間図式

次に、アルゴリズムの正当性について考える。時刻 $t = 0$ の時、 M は以下の状態をとる。

$$t = 0 : \underbrace{\overbrace{f}^{[1]} \overbrace{p}^{[2]} \overbrace{q}^{[3]} \overbrace{p}^{[4]} \overbrace{qq}^{[5,6]} \overbrace{p}^{[7]} \overbrace{q, \dots, q}^{[8, \frac{i^2+i+2}{2}-1]} \overbrace{p}^{[\frac{i^2+i+2}{2}]}}_{[\frac{i^2+i+2}{2}+1, \dots, \frac{(i+1)^2+(i+1)+2}{2}-1]} \underbrace{p}_{[\frac{(i+1)^2+(i+1)+2}{2}]} \underbrace{q, \dots}_{[\frac{(i+1)^2+(i+1)+2}{2}+1, \dots]}$$

$t = 0$ から $t = 8$ までの数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成は、アルゴリズムに沿わず、内部状態のみで実現している。

$t = 0 \sim 8$ では表1, 表2に示す遷移規則集合 R_0, R_1 が使用され、図4に示す様に遷移を行う。

表1 状態遷移規則集合 R_0

| | | | | | | | |
|--------|------|--------|------|-------|------|-------|------|
| a p q | → d; | d q p | → q; | e q p | → q; | q p q | → p; |
| \$ a p | → q; | \$ f p | → a; | | | | |

表2 状態遷移規則集合 R_1

| | | | | | | | |
|--------|------|--------|------|--------|------|--------|------|
| f f f | → f; | f f p | → f; | f p q | → p; | f q p | → f; |
| p d q | → e; | p e q | → f; | p q p | → q; | p q q | → q; |
| q d q | → d; | q e q | → e; | q f q | → f; | q q p | → q; |
| q q q | → q; | \$ f f | → a; | \$ p d | → q; | \$ p e | → q; |
| \$ q d | → p; | \$ q e | → p; | \$ q f | → f; | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 0 | f | p | q | p | q | q | p | q | q | q | p | q | q | q | q | p | q | q | q | q |
| 1 | a | p | q | p | q | q | p | q | q | q | p | q | q | q | q | p | q | q | q | q |
| 2 | q | d | q | p | q | q | p | q | q | q | p | q | q | q | q | p | q | q | q | q |
| 3 | p | d | q | p | q | q | p | q | q | q | p | q | q | q | q | p | q | q | q | q |
| 4 | q | e | q | p | q | q | p | q | q | q | p | q | q | q | q | p | q | q | q | q |
| 5 | p | e | q | p | q | q | p | q | q | q | p | q | q | q | q | p | q | q | q | q |
| 6 | q | f | q | p | q | q | p | q | q | q | p | q | q | q | q | p | q | q | q | q |
| 7 | f | f | f | p | q | q | p | q | q | q | p | q | q | q | q | p | q | q | q | q |
| 8 | a | f | f | p | q | q | p | q | q | q | p | q | q | q | q | p | q | q | q | q |

図4 時刻 $t = 8$ までのシミュレーション状況

以上より、次の補題を得る。

補題 1. 状態遷移規則集合 R_0, R_1 により、セル C_1 の内部状態は時刻 $t = 1, 8$ 時に a をとり、時刻 $t = 1, 8$ 時以外は a をとらない。また、時刻 $t = 1, 8$ 時、 M はそれぞれ以下の状態をとる。

$$t = 1 : \underbrace{\overbrace{a}^{[1]} \overbrace{p}^{[2]} \overbrace{q}^{[3]} \overbrace{p}^{[4]} \overbrace{qq}^{[5,6]} \overbrace{p}^{[7]} \overbrace{q, \dots, q}^{[8, \frac{i^2+i+2}{2}-1]} \overbrace{p}^{[\frac{i^2+i+2}{2}]}}_{[\frac{i^2+i+2}{2}+1, \dots, \frac{(i+1)^2+(i+1)+2}{2}-1]} \underbrace{p}_{[\frac{(i+1)^2+(i+1)+2}{2}]} \underbrace{q, \dots}_{[\frac{(i+1)^2+(i+1)+2}{2}+1, \dots]}$$

$$t = 8 : \underbrace{\overbrace{a}^{[1]} \overbrace{ff}^{[2,3]} \overbrace{p}^{[4]} \overbrace{qq}^{[5,6]} \overbrace{p}^{[7]} \overbrace{q, \dots, q}^{[8, \frac{i^2+i+2}{2}-1]} \overbrace{p}^{[\frac{i^2+i+2}{2}]}}_{[\frac{i^2+i+2}{2}+1, \dots, \frac{(i+1)^2+(i+1)+2}{2}-1]} \underbrace{p}_{[\frac{(i+1)^2+(i+1)+2}{2}]} \underbrace{q, \dots}_{[\frac{(i+1)^2+(i+1)+2}{2}+1, \dots]}$$

次に、時刻 $t = 8$ 以降の数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成を考える。

補題 2. j を任意の自然数 ($j \geq 1$) とする。時刻 $t = j^3$ 時に M は以下の状態をとる、時刻 $t = j^3$ 時以外にセル C_1 の内部状態は a とならない。

$$t = j^3 : \underbrace{\overbrace{a}^{[1]} \overbrace{f, \dots, f}^{[2, \frac{j^2+j+2}{2}-1]} \overbrace{p}^{[\frac{j^2+j+2}{2}]} \overbrace{q, \dots, q}^{[j^2+j+2+1, \dots, \frac{(j+1)^2+(j+1)+2}{2}-1]}}_{[\frac{(j+1)^2+(j+1)+2}{2}]} \underbrace{q, \dots}_{[\frac{(j+1)^2+(j+1)+2}{2}+1, \dots]}$$

【証明】

- (I) 補題 1 より、 $j = 1, 2$ の場合は成立する。
- (II) k を任意の自然数 ($k \geq 1$) とする。 $j = k$ の場合、 M は以下の状態をとると仮定する。

$$t = k^3 + (k^2 + k) + \frac{k^2 + k + 2}{2} + 1$$

$$: \underbrace{[1, \frac{k^2+k+2}{2} - 3]}_{q, \dots, q} \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2} - 2, \frac{k^2+k+2}{2}]}_{e, \dots, e}$$

$$: \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2} + 1, \dots, \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2} - 1]}_{q, \dots, q}$$

$$: \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}]}_p \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2} + 1, \dots]}_{q, \dots}$$

1 ステップに 1 セルだけ左方向に伝播している状態 e が b 波となる。これは、b 波とセル C_1 の衝突の回数をカウントするためである。同様に、セル $C_{\frac{k^2+k+2}{2}}$ の内部状態も e に遷移し、その場にとどまり続ける。b 波は速さ 1/1 で左方向に進み、時刻 $t = k^3 + 2 \cdot (k^2 + k)$ 時にセル C_1 に到達する。到達後、M は以下の通り遷移する。

$$t = k^3 + 2 \cdot (k^2 + k)$$

$$: \underbrace{[1]}_p \underbrace{[2, \frac{k^2+k+2}{2}]}_{e, \dots, e}$$

$$: \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2} + 1, \dots, \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2} - 1]}_{q, \dots, q}$$

$$: \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}]}_p \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2} + 1, \dots]}_{q, \dots} \Rightarrow$$

$$t = k^3 + 2 \cdot (k^2 + k) + 1$$

$$: \underbrace{[1]}_q \underbrace{[2]}_p \underbrace{[3, \frac{k^2+k+2}{2}]}_{e, \dots, e}$$

$$: \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2} + 1, \dots, \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2} - 1]}_{q, \dots, q}$$

$$: \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}]}_p \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2} + 1, \dots]}_{q, \dots} \Rightarrow$$

$$t = k^3 + 2 \cdot (k^2 + k) + 2$$

$$: \underbrace{[1, 2]}_{qq} \underbrace{[3]}_p \underbrace{[4, \frac{k^2+k+2}{2}]}_{e, \dots, e}$$

$$: \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2} + 1, \dots, \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2} - 1]}_{q, \dots, q}$$

$$: \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}]}_p \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2} + 1, \dots]}_{q, \dots}$$

a 波は速さ 1/1 で右方向に進み、時刻 $t = k^3 + 2 \cdot (k^2 + k) + \frac{k^2+k+2}{2} - 1$ 時にセル $C_{\frac{k^2+k+2}{2}}$ 上の p 波と衝突する。衝突後、M は以下の通り遷移する。

$$t = k^3 + 2 \cdot (k^2 + k) + \frac{k^2 + k + 2}{2} - 1$$

$$: \underbrace{[1, \frac{k^2+k+2}{2} - 1]}_{q, \dots, q} \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2}]}_f$$

$$: \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2} + 1, \dots, \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2} - 1]}_{q, \dots, q}$$

$$: \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}]}_p \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2} + 1, \dots]}_{q, \dots} \Rightarrow$$

$$t = k^3 + 2 \cdot (k^2 + k) + \frac{k^2 + k + 2}{2}$$

$$: \underbrace{[1, \frac{k^2+k+2}{2} - 2]}_{q, \dots, q} \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2} - 1, \frac{k^2+k+2}{2} + 1]}_{f, \dots, f}$$

$$: \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2} + 2, \dots, \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2} - 1]}_{q, \dots, q}$$

$$: \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}]}_p \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2} + 1, \dots]}_{q, \dots} \Rightarrow$$

$$t = k^3 + 2 \cdot (k^2 + k) + \frac{k^2 + k + 2}{2} + 1$$

$$: \underbrace{[1, \frac{k^2+k+2}{2} - 3]}_{q, \dots, q} \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2} - 2, \frac{k^2+k+2}{2} + 2]}_{f, \dots, f}$$

$$: \underbrace{[\frac{k^2+k+2}{2} + 3, \dots, \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2} - 1]}_{q, \dots, q}$$

$$: \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}]}_p \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2} + 1, \dots]}_{q, \dots}$$

1 ステップに 1 セルだけ左方向に伝播している状態 f が b 波となる。状態 f の伝播の b 波がセル C_1 の衝突した次のステップに、セル C_1 の内部状態は a に遷移する。セル $C_{\frac{k^2+k+2}{2}}$ の内部状態も f に遷移し、セル $C_{\frac{k^2+k+2}{2}}$ より右側にも状態 f が伝播する。右方向への状態 f の伝播はセル $C_{\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2} - 1}$ まで達する。b 波は速さ 1/1 で左方向に進み、時刻 $t = k^3 + 3 \cdot (k^2 + k)$ 時にセル C_1 に到達する。到達後、M は以下の通り遷移する。

$$t = k^3 + 3 \cdot (k^2 + k)$$

$$: \underbrace{[1, \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2} - 1]}_{f, \dots, f} \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}]}_p$$

$$: \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2} + 1, \dots, \frac{(k+2)^2+(k+2)+2}{2} - 1]}_{q, \dots, q}$$

$$: \underbrace{[\frac{(k+2)^2+(k+2)+2}{2}]}_p \underbrace{[\frac{(k+2)^2+(k+2)+2}{2} + 1, \dots]}_{q, \dots} \Rightarrow$$

$$t = k^3 + 3 \cdot (k^2 + k) + 1$$

$$: \underbrace{[1, \frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2} - 1]}_{f, \dots, f} \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2}]}_p$$

$$= (k+1)^3$$

$$: \underbrace{[\frac{(k+1)^2+(k+1)+2}{2} + 1, \dots, \frac{(k+2)^2+(k+2)+2}{2} - 1]}_{q, \dots, q}$$

$$: \underbrace{[\frac{(k+2)^2+(k+2)+2}{2}]}_p \underbrace{[\frac{(k+2)^2+(k+2)+2}{2} + 1, \dots]}_{q, \dots}$$

以上より、 $j = k$ の場合に成立すると仮定すると、 $j = k+1$ の場合も成立する。

(I), (II) より、すべての j において補題 2. が成立する。□
補題 1, 補題 2 よりセル C_1 の内部状態は時刻 $t = j^3$ 時に状態 a をとる。以上より以下の定理を得る。

定理 3. 遷移規則集合 $R_0 \cup R_1 \cup R_2$ により、CA 上で数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を生成する事ができる。

ここまでは、初期計算状況の時点でセル空間にマーキングがされていると仮定していたが、遷移規則集合 $R_1 \cup R_2 \cup R_3$ (R_3 については表 4 を参照.) を持つ CA が図 5 に示す初期計算状況を取れば、数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成、マーキングの生成についても同時に行う事が可能となる。表 5 に $R_1 \cup R_2 \cup R_3$ となる示す遷移規則集合を示す。

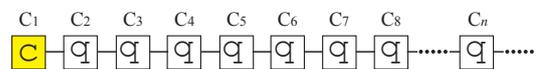


図 5 初期計算状況 (2)

表 4 状態遷移規則集合 R_3

| | | | |
|-------------|-------------|-------------|-------------|
| a b q → c; | a c q → a; | a f b → c; | a q b → a; |
| a q c → a; | a q q → a; | b a b → p; | b a c → e; |
| b a q → e; | b c q → p; | b e a → e; | b e e → e; |
| b e p → e; | b p b → p; | b p c → p; | b p q → p; |
| b q q → q; | c a q → d; | c c p → c; | c e e → b; |
| c e p → b; | c p c → a; | c p q → a; | c q q → b; |
| d a q → b; | d b a → b; | d b e → c; | d c e → q; |
| d d b → d; | d d c → d; | d q b → q; | d q c → q; |
| e a b → p; | e a c → e; | e a q → e; | e e a → e; |
| e e p → e; | e p c → p; | e p q → p; | f a c → b; |
| f a q → f; | f b a → b; | f b p → c; | f f b → f; |
| p a q → b; | p b a → b; | p b e → c; | p b q → c; |
| p c e → q; | p c q → q; | p q b → q; | p q c → q; |
| q a q → p; | q b e → c; | q b p → c; | q b q → c; |
| q c a → q; | q c c → q; | q c e → q; | q c p → q; |
| q c q → q; | q d a → d; | q f a → f; | q p a → p; |
| q p b → p; | q p c → p; | q q a → q; | q q b → q; |
| q q c → q; | \$ a b → b; | \$ b c → b; | \$ b p → c; |
| \$ c p → f; | \$ c q → a; | \$ f a → q; | \$ q c → q; |

コンピュータ上に表 5 に示す遷移規則集合を実装し、 $t = 0 \sim 20000$ の範囲で数列の生成および生成された数列のチェックを行い、正当性を確認した。図 6 に時刻 $t = 0 \sim 65$ のシミュレーション結果を示す。

表 5 数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムの遷移規則表

| | | | | | |
|----------|--------------------------------|----------|--------------------------------|----------|--------------------------------|
| q | Right State q a b c d e f p | a | Right State q a b c d e f p | b | Right State q a b c d e f p |
| q | q q q q q q q q | q | q p | q | c c c c c c c c |
| a | a a a a a a a a | a | b e p e | a | |
| b | b b b b b b b b | b | d d d d d d d d | b | b c c c c c c c |
| c | c c c c c c c c | c | e e p e | c | b c c c c c c c |
| d | d d d d d d d d | d | f f b b | d | c b c c c c c c |
| e | e e e e e e e e | e | \$ a b b | e | b b c c c c c c |
| f | f f f f f f f f | f | \$ c p p | f | b b c c c c c c |
| p | p p p p p p p p | p | \$ c q q | p | b b c c c c c c |
| | | | | | |
| c | Right State q a b c d e f p | d | Right State q a b c d e f p | e | Right State q a b c d e f p |
| c | c q q q q q q q | d | d d d d d d d d | e | e e e e e e e e |
| a | a a a a a a a a | a | a d d d d d d d | a | a e e e e e e e |
| b | b b b b b b b b | b | b d d d d d d d | b | b e e e e e e e |
| c | c c c c c c c c | c | c d d d d d d d | c | c e e e e e e e |
| d | d d d d d d d d | d | d d d d d d d d | d | d e e e e e e e |
| e | e e e e e e e e | e | e e e e e e e e | e | e e e e e e e e |
| f | f f f f f f f f | f | f e e e e e e e | f | f e e e e e e e |
| p | p p p p p p p p | p | p e e e e e e e | p | p e e e e e e e |
| | | | | | |
| f | Right State q a b c d e f p | p | Right State q a b c d e f p | | |
| f | f f f f f f f f | p | p p p p p p p p | | |
| a | a a a a a a a a | a | a p p p p p p p | | |
| b | b b b b b b b b | b | b p p p p p p p | | |
| c | c c c c c c c c | c | c p p p p p p p | | |
| d | d d d d d d d d | d | d p p p p p p p | | |
| e | e e e e e e e e | e | e p p p p p p p | | |
| f | f f f f f f f f | f | f p p p p p p p | | |
| p | p p p p p p p p | p | p p p p p p p p | | |
| | | | | | |

4. おわりに

本稿では、CA 上の数列生成問題について考察し、数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムを設計し、数列 $\{n^3 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ が 8 状態の CA で生成可能であることを示した。今後の課題としては、マーキングの配置も含めた正当性の考察および、内部状態数についての考察が挙げられる。

参考文献

[1] M. Arisawa: On the generation of integer series by the one-dimensional iterative arrays of finite state machines, *The Trans. of IECE*, Vol. 54-C, No.8, pp.759-766, 1971

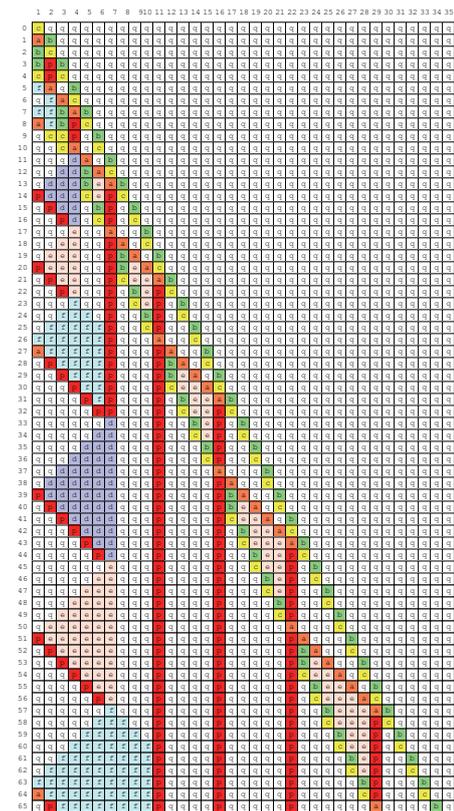


図 6 時刻 $t = 65$ までのシミュレーション状況

(in Japanese).

[2] N. Kamikawa and H. Umeo: Some state-efficient algorithms for real-time generation of non-regular sequences on cellular automata, *Proc. of the 13th International Symposium on Artificial Life and Robotics*, pp.47-50, 2008.

[3] N. Kamikawa and H. Umeo: A note on sequence generation power of two-states cellular automata, *Proc. of SICE Annual Conference 2008*, pp.3315-3320, 2008.

[4] N. Kamikawa and H. Umeo: A Study on Sequence Generation Powers of Small Cellular Automata, *SICE Journal of Control, Measurement, and System Integration*, Vol.5, No.4, pp.191-199, 2012.

[5] N. Kamikawa and H. Umeo: A construction of five-state real-time Fibonacci sequence generator, *Journal of Artificial Life and Robotics*, Volume 21 Issue 4, pp. 531-539, 2016.

[6] I. Korec: Real-time generation of primes by a one-dimensional cellular automaton with 9 states, *Proc. of the 2nd International Colloquium on Universal Machines and Computations*, pp.101-116, 1998.

[7] J. von Neumann: *Theory of Self-Reproducing Automata*, A. W. Burks, Ed., p. 388, Univ. of Illinois Press, 1968.

[8] H. Umeo and N. Kamikawa: A design of real-time non-regular sequence generation algorithms and their implementations on cellular automata with 1-bit inter-cell communications, *Fundamenta Informaticae*, Vol.52, No. 1-3, pp.257-275, 2002.

[9] H. Umeo and N. Kamikawa: Real-time generation of primes by a 1-bit-communication cellular automaton, *Fundamenta Informaticae*, Vol.58, No. 3-4, pp.421-435, 2003.