

動的な内部状態を持つゲーム理論を用いた競争関係の分析

石見 尚之[†] 藤田 悟[†]法政大学 情報科学部[†]

1. まえがき

国家間の競争関係のように、時間により状態の変化が利得に影響を与え、結果的に戦略の選択に影響を与える問題について、ゲーム理論で定式化する．このようなゲームについて、秋山は進化シミュレーションを用いて、戦略の変化係を分析した[1]．一方で、星は戦略によりプレイヤーの内部状態が相互に影響し合うモデルにおいて、内部状態から合理的に戦略を決定し、動的状态に即した意思決定を行えることを示した[2]．本論文では定式化するにあたり、星の定義する動的ゲーム理論を拡張し、利得を考える際に次時刻の利得ではなく2ステップ先の利得を考えた場合についてプレイヤーの選択の変化を分析する．

2. 動的な内部状態を持つゲームモデル

2.1 前提モデル

星は、一般的なゲーム理論のように利得を定数にするのではなく、プレイヤーが内部状態を持ちそれにより利得が変化するモデルを定義した[2]．すなわち時刻 t におけるプレイヤー A と B の内部状態をそれぞれ $x_A(t)$, $x_B(t)$ と表し、両プレイヤーが持つ2つの戦略を i, j と表す．そして、内部状態はそれぞれのプレイヤーの戦略によって変化し、それが1ステップ先における内部状態となる．戦略によりどの程度内部状態が変化するかを前時刻の状態を線形和で表現できるとし、両プレイヤーの内部状態からの影響を表す係数を c, d と表す．1ステップ先の内部状態を利得と考えると式(2.1)のような一次式で表せる．

$$x_A^{ij}(t+1) = c_A^{ij} x_A(t) + d_A^{ij} x_B(t) \quad (2.1)$$

$$x_B^{ij}(t+1) = d_B^{ij} x_A(t) + c_B^{ij} x_B(t)$$

式(2.1)を、戦略 i, j による状態変化と捉えて行列表現し、さらにそれぞれのプレイヤーが有する2つの戦略を当てはめると、プレイヤー A の1ステップ先の内部状態を求める式は式(2.2)に表される．

$$\begin{pmatrix} x_A^{11}(t+1) & x_A^{12}(t+1) \\ x_A^{21}(t+1) & x_A^{22}(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_A^{11} & c_A^{12} \\ c_A^{21} & c_A^{22} \end{pmatrix} x_A(t) + \begin{pmatrix} d_A^{11} & d_A^{12} \\ d_A^{21} & d_A^{22} \end{pmatrix} x_B(t) \quad (2.2)$$

式(2.2)のプレイヤー A の内部状態 $x_A(t)$ の係数部分を自分の内部状態へ影響を与えることから、プレイヤー A の自己反映行列 C_A とし、プレイヤー B の内部状態 $x_B(t)$ を相手プレイの内部状態にかかる係数であることから、プレイヤー A の他者反映行列 D_A とする． C_A および D_A は式(2.3)のように表される．

$$C_A = \begin{pmatrix} c_A^{11} & c_A^{12} \\ c_A^{21} & c_A^{22} \end{pmatrix}, \quad D_A = \begin{pmatrix} d_A^{11} & d_A^{12} \\ d_A^{21} & d_A^{22} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

2.2 2ステップ先の内部状態

前節のモデルではプレイヤーは、その場その場で戦略を判断しているが、これは現実的ではない．そこで、2ステップ先の内部状態から判断する場合の定式化を行う．式(2.1)を拡張し、さらに2ステップ先の内部状態を求める式は、プレイヤーの1ステップ先の戦略を $i1$ と $j1$ とし、2ステップ先の戦略を $i2$ と $j2$ とした場合、式(2.4)となる．

$$\begin{aligned} x_A^{i1j1i2j2}(t+2) &= (c_A^{i2j2} c_A^{i1j1} + d_A^{i2j2} d_B^{i1j1}) x_A(t) \\ &\quad + (c_A^{i2j2} d_A^{i1j1} + d_A^{i2j2} c_B^{i1j1}) x_B(t) \\ x_B^{i1j1i2j2}(t+2) &= (d_B^{i2j2} c_A^{i1j1} + c_B^{i2j2} d_B^{i1j1}) x_A(t) \\ &\quad + (d_B^{i2j2} d_A^{i1j1} + c_B^{i2j2} c_B^{i1j1}) x_B(t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

3. 最適反応戦略の領域図

2ステップ先の内部状態を求めるモデルにおけるプレイヤー A の最適反応戦略を導く．相手プレイヤー B の1ステップ先の戦略 $j1$, 2ステップ先の戦略 $j2$ に対して、プレイヤー A が取りうる戦略 $(i1, i2) = (1,1), (1,2), (2,1), (2,2)$ の場合の全ての利得を求める．そして、その戦略の利得と他の全ての戦略との差分の正負により、最適反応戦略が求まる．プレイヤー A の最適反応戦略を一方の戦略を $(i1, i2)$ と表し、もう一方の戦略を $(I1, I2)$ として表すと式(3.1)で表すことができる．

Analysis of the competitive relationship using game theory with dynamic internal states

[†]Naoyuki Iwami, Satoru Fujita, Faculty of Computer and Information Sciences, Hosei University

$$\delta_A = \begin{pmatrix} c_A^{i2j2} c_A^{i1j1} + d_A^{i2j2} d_B^{i1j1} \\ -c_A^{i2j2} c_A^{i2j1} - d_A^{i2j2} d_B^{i1j1} \end{pmatrix} x_A(t) + \begin{pmatrix} c_A^{i2j2} d_A^{i1j1} + d_A^{i2j2} c_B^{i1j1} \\ -c_A^{i2j2} d_A^{i1j1} + d_A^{i2j2} c_B^{i1j1} \end{pmatrix} x_B(t) \quad (3.1)$$

式(3.1)より, $\delta_A = 0$ を計算することにより, $x_A x_B$ 平面において比較した2つの戦略の境界線を求めることができ, 内部状態と最適反応戦略を結びつけて議論することができ, 例として式(3.1)を用いて描いたプレイヤーAの戦略領域図を図1に示す.

$$C_A = \begin{pmatrix} 14.0 & 3.0 \\ 2.0 & 11.0 \end{pmatrix} D_A = \begin{pmatrix} 2.0 & -11.5 \\ 11.0 & -2.0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$C_B = \begin{pmatrix} 14.5 & 3.5 \\ 2.5 & 11.5 \end{pmatrix} D_B = \begin{pmatrix} 2.5 & -11.5 \\ 11.5 & -2.5 \end{pmatrix}$$

図1(g)の場合, 4つ戦略を重複なく比較したため, 6つ戦略領域図が存在し, それらは最適戦略が(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)となる4種類の領域で表されている. 図1(a),(b),(c),(d),(e),(f)は, その2つの戦略を比較した場合の戦略領域図である. 他の最適反応戦略領域図と比較し, 常にその戦略が優位な領域を求めることで図1(g)を導くことができる. 相手の戦略が他の戦略の場合にも同様に作成し, それを重ね合わせることで, プレイヤーAの最適反応戦略の領域図が作成できる.

4. 先読みの深さの違いによるゲーム推移の比較

本章では2つのモデルを用いて実際に2回戦略を決定した際に異なる戦略を決定する領域が存在するか調べる. 比較するにあり, 式(3.1)の値から導かれた最適反応戦略分割領域図を用いる.

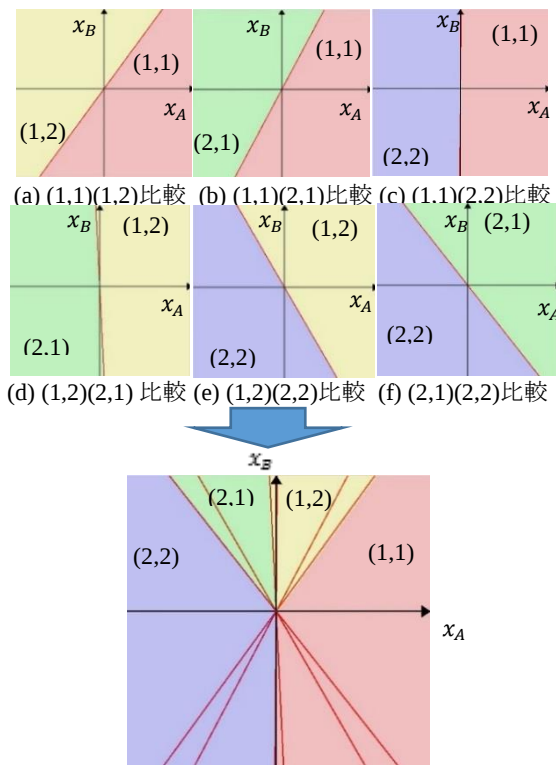


図1:相手の戦略を(1,1)とした場合の最適戦略分布図

初期値を $x_A = 3.0, x_B = 10.0$ とした場合, プレイヤーBの戦略を(1,1)とした時の内部状態の推移は表1となる. このとき, 1ステップ先読みモデルは初期位置では戦略2の領域のため戦略2をとり, これにより戦略1の領域に移動するため戦略1を選ぶ. 一方2ステップ先読みモデルは初期位置では戦略(1,2)の領域にいるため, 最初に戦略1を選び次に戦略2を選ぶ. このとき, 両者を比較すると, 1ステップ先読みは1手目では高くなっているが2手目では2ステップ先読みより低くなっている. このように, 2ステップ先を考慮した場合により高い利得を得られる領域が存在していることが明らかになった.

表1:先読みの深さの違いによる内部状態の推移

	初期	1手目	2手目
1ステップ先読み	(3.0, 10.0)	(116.0, 0.5)	(1625.0, 297.25)
2ステップ先読み	(3.0, 10.0)	(62.0, 152.5)	(1801.5, -179.25)

5. 考察

4章より, 2ステップ先を考えるモデルでは, 相手プレイヤーの内部状態から高い利得を得ることができる場合, 1手目で相手の内部状態を高めることで, 2手目で相手の内部状態から高い利得を得ることができる領域が存在した. このように, 1ステップ先の内部状態だけを考えた場合とは異なる振る舞いをする領域が存在する. 一方で, 2ステップ先を考えた場合の最適反応戦略領域図が1ステップ先のものと異なる領域の場合であっても同じ振る舞いをする領域が存在した.

6. まとめ

本稿では動的に変化する内部状態を持つゲーム理論において, 2ステップ先の内部状態を考えるモデルについて説明した. 2ステップ先を考えたモデルでは, 4つの戦略のパターンが存在する. このとき4つの領域で分けられているが, 1ステップ先の内部状態だけを考えた場合と同じ振る舞いをする領域も存在したが, 異なる振る舞いをする領域も存在した. これにより利得を予測することによりプレイヤーの最適戦略が変化する可能性が存在することが明らかになった.

文 献

- [1] Eizo Akiyama, *Dynamics of coupled players and the evolution of synchronous cooperation - dynamical systems games as general frame for systems inter-relationship*, 2007.
- [2] 星聡, 藤田悟, 複数の内部状態を管理する2人ゲームの数理モデル, 第76回情報処理学会全国大会, 2014.