3H-03

Delaunay 図と L_p-Delaunay 図のメッシュとしての複数規準による形状比較

岩本　龍馬 †　　今井　敏行 ‡
† 和歌山大学大学院システム工学研究科　　‡ 和歌山大学システム工学部

1　はじめに

差分法の一部や有限要素法では，対象領域を分割してメッシュを作らなければならない．2次元では，三角形メッシュは代表的なものの一つである [1, 2].

有限要素法で三角形メッシュを生成する場合，対象図形の部分により，三角形の大きさを変えたい．そのため図形に点群を必要な密度で生成してそれを頂点とする三角形分割を作成する．三角形分割の仕方は一意には定まらないが，つぶれた三角形が多い場合では結果の誤差が大きくなることが知られている．つぶれた三角形の指標として最大角，最小角，辺の長さの和，アスペクト比などがあり，つぶれた三角形を一意に定めることはできない．

三角形分割の組み合わせの中で，最小角最大，最大外接円最大の二つの最適性をもつものにドロネー図がある．本研究では，ドロネー図の一般化である L_p ドロネー図を作成し，複数の指標を用いて形状比較を行った．

2　ドロネー図

平面上の n 点からなる集合 $P = \{p_1, p_2 \cdots, p_n\}$ が与えられているとする．P の 2 点 p_i, p_j を通る円を，内部に他の点を含まないように描くことができるとき，線分 p_i, p_j をドロネー辺という．

たとえば，$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ とし，線分 p_1p_2, p_3p_4 が交差するように配置されていたとする (図 1)．このとき，どちらか一方の対角線がドロネー辺である．これにどちらかの線分のみが入る円を描くと図 2 のようになり，円内部に含まれる p_1p_2 がドロネー辺であることを判別できる．

ある凸四角形を分割する対角線に対して外接円を用いてドロネー辺か判別し，ドロネー辺ではなかった場合もう一方の対角線で分割し直す．この操作をフリップ操作と呼ぶ．

三角形分割内部を構成する全ての対角線に対して，フリップ操作を行い，全ての対角線がドロネー辺となったとき，その三角形分割はドロネー図である．

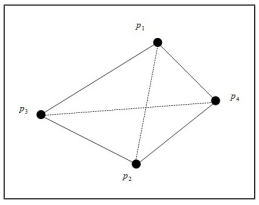

図 1: ある凸四角形

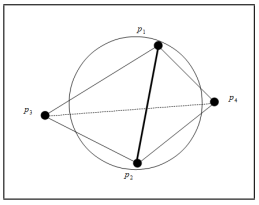

図 2: ドロネー辺を判別

3　L_p ドロネー図

2 次元ドロネー図のフリップ操作で用いる中心を点 (a, b) とする三角形の外接円の方程式はユークリッド空間において，$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ と表される．この円の方程式を L_p 空間での式に変更したものが L_p ドロネー図である．ユークリッド空間上ではある 2 点 (x, y), (a, b) 間の距離 D は $D^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$ と表されるが，L_p 空間上では距離は $D^p = |x-a|^p + |x-b|^p$ と表される．したがって，2 次元 L_p 空間でのフリップ操作で用いる円の方程式は $|x-a|^p + |y-b|^p = r^p$ に変更される．この円を L_p 円と呼ぶ．L_p 円を用いてフリップ操作を行うことで，作成される三角形分割を L_p ドロネー図と呼ぶ．ドロネー図は L_2 ドロネー図である．

4　研究の目的

ドロネー図は最小角，最大外接円という規準においては最適性を持つ．そのため，3 次元において四面体分割としてドロネー図を考えることができるが，つぶれた四面体が発生することが知られている．つぶれた四面体を減少させるためにドロネー図を一般化した L_p ドロネー図を利用することを考えた．しかし，2 次元ドロネー図がその最適性ゆえによく調べられていないことから，3 次元で実験する前準備として，2 次元 L_p ドロネー図を用いて比較実験を行った．

5　実験方法

5.1　条件２：点の密度が一様な場合

対象領域を正方形とし，正方形の中に 5000 点をランダムに配置する．その点群からドロネー図および L_p ドロネー図を作成し，$p = 2$ が最適であるということから，$p = 2$ 周辺の 1.2 から 3.8 の値域で変更して比較す

Several comparisons of shape between Delaunay triangulation and Lp-Delaunay triangulation as meshes
†Ryoma Iwamoto　‡Toshiyuki Imai
†Graduate School of Systems Engineering Wakayama University
‡Faculty of Systems Engineering Wakayama University

Copyright ©2017 Information Processing Society of Japan.
All Rights Reserved.

る．比較方法は，規準として，最大角，最小角，辺の長さの和，アスペクト比を用いる．本研究では，アスペクト比2から4の場合をつぶれていない三角形，アスペクト比10以上の場合をつぶれた三角形とする．

5.2 条件２：点の密度を変更した場合

有限要素法では，解が激しく変化する領域では，メッシュが粗すぎると十分な精度が得られないため，多くの点置いて細かく分割する必要がある [3]．領域となる正方形の縦横比半分の大きさの領域を内部に用意し，そこに全5000点のうち4000点を集中させて実験を行う．

6 結果

6.1 条件１

図3より，$p = 2$ 周辺から離れるほどつぶれていない三角形の個数は減少していく．$p = 2$ から $p = 3.8$ までの変化は比較的緩やかに減少しているのに対して，$p = 2$ から $p = 1.2$ までの変化は急な減少である．逆に図4より，アスペクト比10以上のつぶれた三角形は $p = 2$ 周辺から離れるほど個数が増大していく．

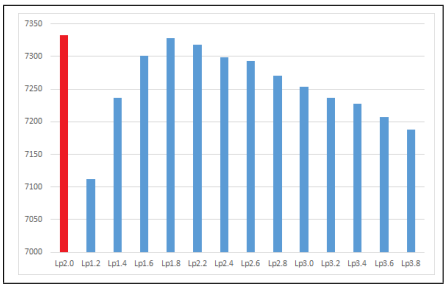

図3: アスペクト比2から4である三角形の個数
（横軸は p の値，縦軸は個数を表す）

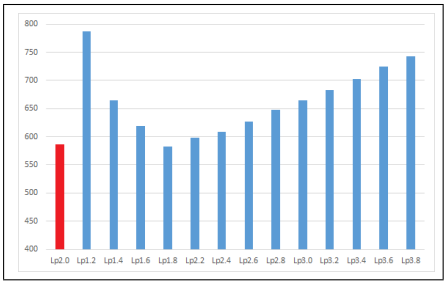

図4: アスペクト比が10以上である三角形の個数
（横軸は p の値，縦軸は個数を表す）

6.2 条件２

図5の様に，$p = 2$ 周辺から離れるほどアスペクト比2から4の三角形の個数が減少していく傾向は条件1と同じである．また，図6のアスペクト比10以上のグラフでも条件1と同様の傾向が見られる．

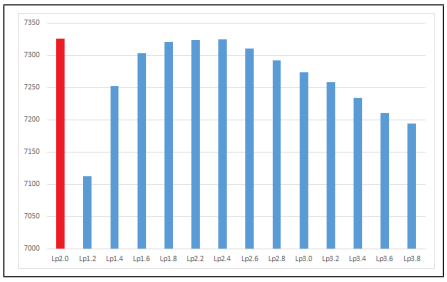

図5: アスペクト比2から4である三角形の個数
（横軸は p の値，縦軸は個数を表す）

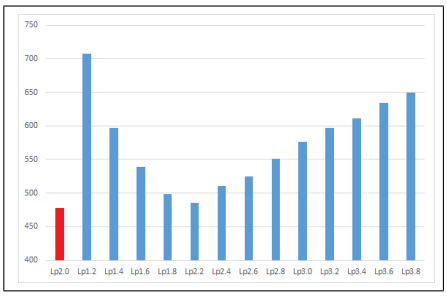

図6: アスペクト比が10以上である三角形の個数
（横軸は p の値，縦軸は個数を表す）

7 おわりに

最小角，最大角，辺の長さの和といった規準でも同様に $p = 2$ 周辺が良い形が多く離れるほど悪化していくという結果となった．また，最小角以外の他の規準においては $p = 2$ が常に最良であるという結果ではなかった．これは条件2の様な点が一か所に集中したような場合でも同様である．本研究の一部は科学研究費補助金 16K12435 の助成を受けている．

参考文献

[1] 杉原厚吉 著，なわばりの数理モデル -ボロノイ図からの数理工学入門-，共立出版，2009

[2] 三好俊郎 著，有限要素法入門，培風館，2008

[3] 今井浩 今井桂子 著，数理解析研究所講究録 934 巻 149-166，3 角形分割と凸多面体，1996

Copyright ©2017 Information Processing Society of Japan.
All Rights Reserved.