5G-09

L_1 正則化問題に対する Hybrid 法の適用 *

富樫　大 †
慶應義塾大学大学院理工学研究科
dai-togashi@keio.jp

野寺　隆 ‡
慶應義塾大学理工学部
nodera@math.keio.ac.jp

概 要

近年，一般 Tikhonov 正則化問題を高速に解く Hybrid 法の研究が広く行われている．しかし，画像処理の分野では Tikhonov 正則化問題だけでなく，トータルバリエーションと呼ばれる L_1 ノルムを用いた手法が用いられることが多い．本発表では，Hybrid 法をトータルバリエーションへと適用するための拡張を行い，実験結果について述べる．

1　はじめに

次の形で与えられる大規模な非適切問題に対し，安定な解を計算することを考える．

$$\boldsymbol{x}_{\mathrm{LS}} = \underset{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} ||\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}||_2^2 \tag{1}$$

ただし，行列 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$ は悪条件であり，データベクトル $\boldsymbol{b}$ は，未知の誤差項 $\boldsymbol{\epsilon}$ と，理論解 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{exact}}$ を用いて，$\boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x}_{\mathrm{exact}} + \boldsymbol{\epsilon}$ とする．式 (1) の解は未知の誤差 $\boldsymbol{\epsilon}$ に支配される．一方，L_1 正則化法は，$\boldsymbol{x}_{\mathrm{exact}}$ に対する安定的な近似解を次式より計算できる．

$$\boldsymbol{x}_\lambda = \underset{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}}\{||\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}||_2^2 + \lambda||L\boldsymbol{x}||_1\}, \tag{2}$$

ただし，$L \in \mathbb{R}^{p\times n}$ は正則化行列であり，$\lambda > 0$ は正則化パラメータである．そして，正則化法がより良い近似解を与えるためには，適した正則化パラメータの決定が必要となることが知られている．

2　L_1 正則化に対する GKB-FP 法の適用

GKB-FP 法は，GKB 法と FP 法に基づいた標準 Tikhonov 正則化問題を高速に解く手法である [2]．GKB 法は 2 重対角化を行うアルゴリズムであり，行列 A に対して初期値 $\boldsymbol{b}/||\boldsymbol{b}||_2$ とし反復を行った場合，$k < n$ ステップ後，以下の式を満たす正規直交列を持つ 2 つの行列 $Y_{k+1} = [\boldsymbol{y}_1, ..., \boldsymbol{y}_{k+1}] \in \mathbb{R}^{m\times(k+1)}$, $W_k = [\boldsymbol{w}_1, ..., \boldsymbol{w}_k] \in \mathbb{R}^{n\times k}$ と，下記の 2 重対角行列 $B_k \in \mathbb{R}^{(k+1)\times k}$ を生成する．

$$B_k = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & & \\ & \beta_3 & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha_k \\ & & & \beta_{k+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(k+1)\times k},$$

$$\begin{aligned} \beta_1 Y_{k+1}\boldsymbol{e}_1 &= \boldsymbol{b} = \beta_1\boldsymbol{y}_1, \\ AW_k &= Y_{k+1}B_k, \\ A^T Y_{k+1} &= W_k B_k^T + \alpha_{k+1}\boldsymbol{w}_{k+1}\boldsymbol{e}_{k+1}^T. \end{aligned}$$

ただし，$\boldsymbol{e}_i \in \mathbb{R}^{k+1}$ は i 番目の単位ベクトルである．特に W_k の列は，Krylov 部分空間 $\mathcal{K}_k(A^TA,\ A^T\boldsymbol{b})$ の正規直交基底を為す．今，$\mathcal{K}_k(A^TA,\ A^T\boldsymbol{b})$ 上での最小化を考え，最小二乗解を $\boldsymbol{x}_\lambda^{(k)}$ とすると，式 (2) は次式に変形することが出来る．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_\lambda^{(k)} &= W_k\boldsymbol{y}_\lambda^{(k)}, \\ \boldsymbol{y}_\lambda^{(k)} &= \underset{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^k}{\operatorname{argmin}}\{||B_k\boldsymbol{y} - \beta_1\boldsymbol{e}_1||_2^2 + \lambda||LW_k\boldsymbol{y}||_1\}. \end{aligned} \tag{3}$$

式 (3) の解は Zou ら [4] によって，次式で与えられる事が示されている．

$$\boldsymbol{y}_\lambda^{(k)} = \left(B_k^TB_k\right)^{-1}\left(B_k^T\beta_1\boldsymbol{e}_1 - \frac{\lambda}{2}W_k^TL^T\mathrm{Sgn}(LW_k\boldsymbol{y}_\lambda^{(k)})\right)$$

ただし，$\mathrm{Sgn}(\cdot)$ は符号関数である．上記の関数は右辺に $\boldsymbol{y}_\lambda^{(k)}$ を含む符号関数が表れるため，定常反復による解法が必要となる．このため提案手法では，$(B_k^TB_k)^{-1}\boldsymbol{v}$

*Application of the Hybrid method for L_1 Regularization
†Dai Togashi, Graduate School of Science and Technology, Keio University.
‡Takashi Nodera, Faculty of Science and Technology, Keio University.

Copyright ©2017 Information Processing Society of Japan.
All Rights Reserved.

の計算の困難さを取り除くために，GKB 法による各ステップにおいて B_k の QR 分解の更新を行う．

次に正則化パラメータの決定のために FP 法を用いる [1]．標準 Tikhonov 正則化問題において，正則化パラメータは残差と正則化項の積で表される下記の関数を最小化するように選ばれる [3].

$$\Psi(\lambda) = ||\boldsymbol{r}_\lambda||_2^2 ||\boldsymbol{x}_\lambda||_2^{2\mu}, \quad \mu > 0$$

ただし，$\boldsymbol{r}_\lambda = \boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}_\lambda$ である．Bazán [1] は適した μ の下で最適な λ を定点反復で求められることを示し，FP 法を提案した．

L_1 正則化問題に FP 法を適用する場合，下記の関数の最小化を考える必要がある．

$$\Psi_{L_1}(\lambda) = ||\boldsymbol{r}_\lambda||_2^2 ||L\boldsymbol{x}_\lambda||_1^{\mu}, \quad \mu > 0 \tag{4}$$

FP 法は式 (4) の最小点を求めるために下記の関数の定点を求めることになる．

$$\phi_\mu(\lambda) = \frac{||\boldsymbol{r}_\lambda||_2^2}{\mu ||L\boldsymbol{x}_\lambda||_1}$$

Hybrid 法において，$\phi_\mu(\lambda)$ の k 次元での近似関数 $\phi_\mu^{(k)}(\lambda) = ||\boldsymbol{r}_\lambda^{(k)}||_2^2/\mu ||L\boldsymbol{x}_\lambda^{(k)}||_2$ の定点からなる数列を計算することで，$\phi_\mu(\lambda)$ の定点を求めることが出来る．本手法を FP-TV 法と呼び，Algorithm 1 に記述する．

Algorithm 1 FP-TV 法

Require: $A, \boldsymbol{b}, L, \mu, k_0 \geq 1, tol, k_{\max}$

Ensure: Regularized solution $\boldsymbol{x}_{\lambda^*}^{(k)}$

1. Apply k_0 GKB steps to A with starting vector $\boldsymbol{b}$ and form the matrix B_{k_0}.
2. Set $k = k_0$. Apply reduction QR factorization to B_k.
3. Compute the fixed point λ_k^* of $\phi_\mu^{(k)}$ and set $\lambda_0 = \lambda_k^*,\ \lambda_{old} = \lambda_0,\ k \leftarrow k+1$.
4. Perform one more GKB step, update QR factorization of B_k and compute the fixed point λ_k^* of $\hat{\phi}_\mu^{(k)}$ taking λ_0 as starting value. Set $\lambda_{old} = \lambda_0,\ \lambda_0 = \lambda_k^*$.
5. **If** stopping criterion is satisfied **do**
   $\lambda^* = \lambda_{old}$
   else do
   $k \leftarrow k+1$
   Go to step 4.
   end if
6. Compute the regularized solution $\boldsymbol{x}_{\lambda^*}^{(k)}$.

3 数値実験

本稿では，L_1 正則化問題に対して Hybrid 法を適用するために，L_2 正則化問題に対する GKB-FP 法を L_1 正則化に対する拡張を行い，新手法である FP-TV 法の提案を行った．ここでは，提案手法の有用性を示すために数値実験の結果を述べる．

グレースケールイメージのぼやけ除去問題を考え，全ての数値実験は MATLAB 2015b を用いて行った．さらに，拡散行列と正則化行列はそれぞれ次式で表される Gaussian PSF と 2 次の差分行列を用いた．

$$A = (2\pi\sigma^2)^{-1} T \otimes T, \quad L = \begin{bmatrix} I_N \otimes L_1 \\ L_1 \otimes I_N \end{bmatrix},$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N-1)\times N}.$$

ただし，T は次式で表される z を生成ベクトルとする $N \times N$ の Teoplitz 行列である．

$$z = \frac{1}{2\sigma^2}[1, e^{-2}, \cdots, e^{-(\mathbf{band}-1)^2}, 0, \cdots, 0] \in \mathbb{R}^N$$

ただし，σ と **band** は拡散度合いを制御するパラメータであり，本実験においては $\sigma = 2, \mathbf{band} = 16$ とする．詳細な結果については当日報告を行う．

参考文献

[1] Bazán, F. S. V., *"Fixed-point iterations in determining the Tikhonov regularization parameter,"* Inverse Problems, Vol. 24, pp. 3747-3753, 2008.

[2] Bazán, F. S. V. and Borges, L. S., *"GKB-FP: an algorithm for large-scale discrete ill-posed problems,"* BIT, Vol. 50, pp. 481–507, 2010.

[3] Regińska, T., *"A regularization parameter in discrete ill-posed problems,"* SIAM Journal on Scientific Computing, Vol. 3, pp. 740–749, 1996.

[4] Zou, H., Hastie, T. and Tibshirani, R., *"On the " Degrees of Freedom " of the Lasso,"* Ann. Statist., Vol. 35, pp. 2173–2192, 2007.

Copyright ©2017 Information Processing Society of Japan.
All Rights Reserved.