再構成型超解像処理の理論限界に関する検討

田 中 正 行[†] 奥 富 正 敏[†]

複数の低解像度画像から，1 つの高解像度画像を再構成する方法として超解像処理がある．超解像処理では，高解像度画像の低解像度画像に対する倍率が重要なパラメータとなる．本論文では，倍率の設計を容易にする超解像の条件数定理を示す．条件数定理は，低解像度画像数が無限であると仮定したとき，任意の PSF（Point Spread Function）に関する超解像方程式の条件数の算出方法を導く定理である．条件数定理により算出される条件数を比較することにより，高解像度画像の低解像度画像に対する倍率および PSF を設計することができる．また，本研究では，ML（Maximum Likelihood）法に関しての勾配制約も示す．勾配制約とは，PSF のパワースペクトルが ML 法の評価関数の微分を制限するというものである．条件数定理と勾配制限は理論的に導かれる．具体的に Box 型 PSF と Gaussian 型 PSF の解析を示し，また，合成画像を利用した実験によりその有効性を確認する．

Theoretical Analysis about Limitations on Reconstruction-based Super-resolution

Masayuki Tanaka[†] and Masatoshi Okutomi[†]

This study presents and proves a condition number theorem for super-resolution (SR). The SR condition number theorem provides the condition number for an arbitrary space-invariant point spread function (PSF) when using an infinite number of low resolution images. A gradient restriction is also derived for maximum likelihood (ML) method. The gradient restriction is presented as an inequality which shows that the power spectrum of the PSF suppresses the spatial frequency component of the gradient of ML cost function. A Box PSF and a Gaussian PSF are analyzed with the SR condition number theorem. Effects of the gradient restriction on super-resolution results are shown using synthetic images.

1. はじめに

超解像処理とは，位置ずれのある複数の低解像度画像から高解像度画像を推定する処理である．これまでにも，数多くの方法が提案されている[1)~6)]．そのなかでも，再構成型超解像処理と分類される方法が広く利用されている．ML（Maximum Likelihood）法[2)]，MAP（Maximum A Posteriori）法[3)] や POCS（Projection Onto Convex Sets）法[4)] などが，再構成型超解像処理として有名である．また，多くの研究はグレイスケール画像を対象としているが，MAP 法を応用して Bayer 配列の低解像度画像からカラーデモザイキング処理と超解像処理を同時に行う方法や[5),6)]，文字に特化した超解像処理も提案されている[10)]．さらに，再構成型超解像処理は計算コストが大きいことも知られており，効率的な計算方法に関する報告もされている[7),8)]．また，我々は単板式カラーカメラを用いた手持ち撮影のための超解像処理の開発も行っている[9)]．再構成型超解像処理とは枠組みが異なるが，近似を用いて繰返し計算を行わずに高解像度画像を推定する方法や[12)]，空間解像度ばかりでなく時間解像度も改善する方法も研究されている[11)]．

このように広く利用されている再構成型超解像処理には共通の枠組みが存在する．その共通の枠組みとして，高解像度画像の低解像度画像に対する倍率をまずはじめに設定しなければならないことがあげられる．低解像度画像枚数を増加させることによって，大きな倍率を設定することが可能であると予想されるが，実際には低解像度画像枚数を増加させても倍率の大きさには限界があることが経験的に知られている．この倍率の限界は，再構成型超解像処理に関しての基本的な性質である．また，低解像度画像枚数を無限に増加させた場合に，この性質は顕著に現れることが予想される．倍率の限界は，再構成型超解像処理の基本的な性質であるにもかかわらず，この分野の研究は非常に少

† 東京工業大学
Tokyo Institute of Technology

ない．Elad らは[13]，未知数の数と方程式の数の関係から，倍率と観測画像枚数が満足しなければならない関係式を示している．これは，単純に観測画像の総画素数（方程式の数）は高解像度画像の画素数（未知数の数）より多くなくてはならないことを示しているにすぎない．Baker らは[14]，Box 型 PSF（Point Spread Function）を仮定した場合，2 以上の整数の倍率では，超解像方程式の条件数が無限大となり，高解像度画像を安定的に推定できないことを示した．また，Lin らは[15]，Baker らと同様に Box 型 PSF を仮定し，摂動定理を応用することにより，条件数の逆数に対応する安定性の指標を定量的に評価している．このように従来の解析は Box 型 PSF に関する解析のみである．

一方，Capel は[18]，カメラモデルの PSF は Gaussian 型 PSF で近似できることを実験的に示している．Box 型 PSF も，Gaussian 型 PSF も，どちらもカメラモデルの PSF の近似でしかない．このため，どの近似を利用すべきかということが重要である．しかしながら，従来の理論解析は，Box 型 PSF に関する解析のみであるため，異なる PSF 近似の安定性を定量的に比較することはできない．

これに対して，我々は，任意の空間不変な PSF に関しての理論解析を行っている[16),17]．本論文では，任意の空間不変な PSF に対して任意の倍率における超解像方程式の条件数を算出する方法である条件数定理を提案し，証明する．条件数は線形連立方程式の安定性の指標として広く利用されている．条件数の小さい PSF 近似を用いることにより，高解像度画像を安定に推定することができる．つまり，それぞれの PSF 近似の条件数を比較することにより，適切な PSF 近似を選択することができる．また，PSF の条件数は，超解像処理に適した撮像系を設計する際の指針にも利用可能である．なお，本論文では，観測誤差に対する超解像処理の安定性を議論することにし，PSF 近似誤差は高解像度画像に大きな影響を与えない範囲であるとする．

さらに，勾配法を利用した ML 法に関する勾配制限を示す．勾配制限とは，ML 法の評価関数の勾配は，PSF のパワースペクトルにより制限されることである．具体的に Box 型 PSF と Gaussian 型 PSF を取り上げ，それぞれの条件数とパワースペクトルを計算し，解析を行う．また，合成画像を利用した実験により，勾配制限および条件数定理の有効性を確認する．

2. 超解像の基本方程式

再構成型超解像処理の基本となる連続系の画像変換方程式を式 (1) に示す．

$$g_j(\mathbf{y}_j) = \int b_j(\mathbf{y}_j, \mathbf{x})\, h(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \tag{1}$$

ここで，添え字 j は j 番目の観測を，$\mathbf{y}_j$ は観測画像の座標を，$\mathbf{x}$ は高解像度画像の座標を，$g_j(\mathbf{y}_j)$ は j 番目の連続の観測画像を，$b_j(\mathbf{y}_j, \mathbf{x})$ は連続の PSF を，$h(\mathbf{x})$ は連続の高解像度画像を，それぞれ表す．

実際に超解像処理が扱う方程式は，式 (1) を離散化した式 (2) であり，式 (2) を超解像方程式と呼ぶことにする．

$$\mathbf{g} = \mathbf{B}\,\mathbf{h} \tag{2}$$

ここで，$\mathbf{g}$ は複数の低解像度画像のすべての画素値を並べたベクトルを，$\mathbf{h}$ は高解像度画像のベクトル表現を，$\mathbf{B}$ は高解像度画像から低解像度画像への変換を表す行列を，それぞれ表す．

この超解像方程式は，低解像度画像数が無限にある場合（すなわち，連続観測画像が得られる場合）にも拡張できる．低解像度画像数が無限の場合の超解像方程式を，超解像の基本方程式と呼ぶことにする．超解像の基本方程式は，形式的には式 (2) と同様であるが，$\mathbf{g}$ の次元と $\mathbf{B}$ の行の次元が無限大である．

3. 条件数定理と勾配制限

本論文における解析の仮定を明確にした後，超解像の基本方程式に対する条件数の算出方法（条件数定理）を導出する．次いで，ML 法における勾配と PSF のパワースペクトルとの関係を勾配制限として示す．

3.1 解析の仮定

本論文では以下の仮定に基づき，超解像処理の安定性を理論的に解析する．

仮定 1 位置ずれは平行移動である．

仮定 2 カメラ PSF は空間不変である．

仮定 3 連続高解像度画像の画素値は同一画素内で一定である．

仮定 4 低解像度画像は，位置の重なりがなく，無限に取得できる．

カメラ PSF を特定のものに限定せず，単に空間不変としている点が，これまでの研究[14),15] と大きく異なる点である．

仮定 3 は，連続高解像度画像を式 (3) の矩形関数 $\Pi(x; a)$ と離散高解像度画像との畳込みとして表現できることを仮定している．

$$\Pi(x; a) = \begin{cases} 1 & (|x| \le a/2) \\ 0 & (|x| > a/2) \end{cases} \tag{3}$$

ただし，a は離散高解像度画像の画素間隔である．一

方，一般的な信号処理では，矩形関数ではなく，Sinc 関数との畳込みが仮定されている．超解像処理においては，矩形関数が広く利用されているが，その理由については次節で述べる．

一般性を失わず，高解像度画像の画素間隔を 1 として解析を行うことができる．また，本論文では高解像度画像空間に対して定義される PSF を考える．一般に，PSF は観測画像空間である低解像度画像空間に対して定義されているため，高解像度画像の画素間隔を 1 と考えると，PSF は高解像度画像の低解像度画像に対する倍率 M をパラメータとして含むようになる．この場合の具体的な PSF の例として，Box 型 PSF を式 (4) に，Gaussian 型の PSF を式 (5) に，それぞれ示す．

$$b_{\mathrm{box}}(x,y) = \frac{1}{M^2}\Pi(x;M)\Pi(y;M) \tag{4}$$

$$b_{\mathrm{gau}}(x,y) = \frac{1}{2\pi M\sigma}\exp\left(\frac{x^2+y^2}{2M^2\sigma^2}\right) \tag{5}$$

本節では，簡単のため，1 次元の問題として解析を行うが，2 次元の問題へ簡単に拡張することが可能である．

3.1.1 仮定 3 の正当性

連続信号に対して帯域制限を仮定している信号処理の分野では，矩形関数ではなく，Sinc 関数が広く利用されている．

一方，超解像処理の問題では，帯域制限された連続画像を仮定していない．そこが，サンプリング定理を満たすように帯域制限された原信号（連続画像）を逆フィルタなどにより求める画像復元問題と異なる点である．実際，空間上の不連続に対応するユニットステップ関数の振幅スペクトルは，周波数の逆数で減衰するものの，その帯域は無限である．

このため，超解像処理においては，離散画像を利用して連続画像を何らかの方法で表現する必要がある．この表現方法として仮定 3 が広く利用されている．連続画像の表現方法はほかにも考えられるが，最終的に画素は矩形として表現されることや，低解像度画像の画素値推定に対応する空間領域での PSF との畳込み演算が簡略であることから，ほとんどの超解像処理では仮定 3 が利用されている．

また，従来の超解像処理の理論的な解析もすべてこの仮定 3 に基づいている[14),15)]．

3.2 超解像の基本方程式の再定義

前節の 4 つの仮定を利用して，低解像度画像枚数を無限に仮定した超解像の基本方程式を再定義する．

仮定 4 において低解像度画像である観測画像を無限枚取得可能であるとしている．高解像度画像空間へすべての観測画像がレジストレーションされていれば，これら無限枚の観測画像は高解像度画像空間に定義される 1 つの連続の画像と考えることができる．この連続の画像を連続観測画像と呼ぶことにし，$g(y)$ で表す．ここで，y は連続観測画像の画素位置を表す座標である．

さらに，仮定 1，2 を利用すれば，PSF は観測によらず共通であると考えることができる．したがって，式 (1) の画像変換方程式から式 (6) を得る．

$$g(y) = \int b(y-x)\,h(x)\,dx \tag{6}$$

ここで，$b(x)$ はすべての観測に共通する連続の PSF である．仮定 3 を満足する連続高解像度画像は，式 (3) の矩形関数を利用して，式 (7) のように定式化できる．

$$h(x) = \sum_{i=0}^{N-1}\Pi(x-i;1)\ h_{[\mathrm{i}]} \tag{7}$$

ここで，N は 1 次元画像の大きさを，i は 1 次元画像の離散座標を，$h_{[\mathrm{i}]}$ は離散高解像度画像の位置 i における画素値を，それぞれ表す．式 (6)，(7) より，式 (8) に示される離散高解像度画像から連続観測画像への画像変換方程式を得る．

$$g(y) = \sum_{i=0}^{N-1}\left\{\int_{i-1/2}^{i+1/2} b(y-x)\,dx\ \times\ h_{[\mathrm{i}]}\right\} \tag{8}$$

さて，ある座標 y を式 (9) のように，y に最も近い整数 ℓ と残りの小数部分 δ に分けて考える．

$$y = \ell + \delta \tag{9}$$

このとき，小数部分 δ の変域は $-1/2$ から $1/2$ となる．式 (9) の関係を利用して式 (8) を式 (10) の離散畳込み演算の形式に簡単化することができる．

$$\begin{aligned} g(\ell+\delta) &= \sum_{i=0}^{N-1}\left\{\int_{i-1/2}^{i+1/2} b(\ell+\delta-x)\,dx \times h_{[\mathrm{i}]}\right\} \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} b_{\delta\,[\ell\text{-i}]}h_{[\mathrm{i}]} \end{aligned} \tag{10}$$

ここで，$b_{\delta\,[\ell]}$ をオフセット δ の離散 PSF と呼び，式 (11) で定義される．

$$b_{\delta\,[\ell]} = \int_{-1/2}^{1/2} b(\ell+\delta-x)\,dx \tag{11}$$

次に，小数部分 δ を固定して考えると，$g(\ell+\delta)$ は連続観測画像 $g(y)$ を高解像度画像の画素中心から δ だけずれた位置でサンプリングした離散画像と見なすことができる．この離散画像の画素数は高解像度画像

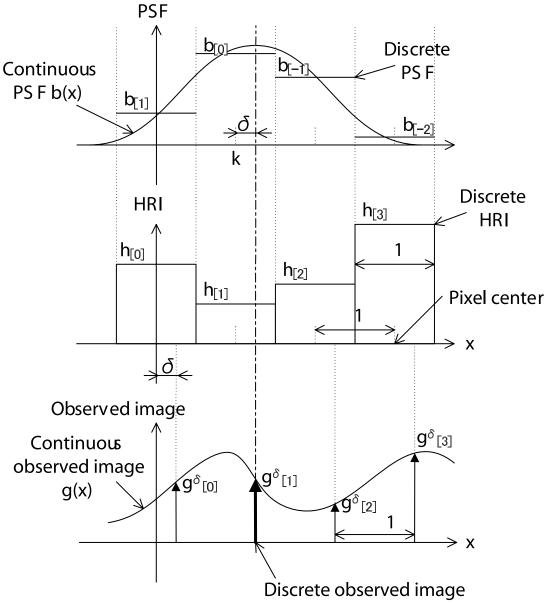


図 1　高解像度画像，観測画像および PSF 画像の連続と離散の関係
Fig. 1　Models of continuous and discrete HRI, observed image and PSF.

の画素数と等しいが，仮定 4 において観測される低解像度画像が無限にあると仮定しているため，このような離散画像が得られると考えることができる．ここで，この離散画像をオフセット δ の離散観測画像と呼び，$\mathbf{g}_\delta$ で表すことにする．また，同様に式 (11) の $b_{\delta[\ell]}$ を，オフセット δ の離散 PSF と呼び，$\mathbf{b}_\delta$ で表すことにする．

高解像度画像，観測画像，および PSF に関して，それぞれ連続と離散の関係を**図 1** に図示する．式 (10) は，オフセット δ の離散観測画像に対する超解像方程式となる．その超解像方程式のベクトル表現が式 (12) である．

$$\mathbf{g}_\delta = \mathbf{B}_\delta \, \mathbf{h} \tag{12}$$

ここで，$\mathbf{B}_\delta$ はオフセット δ の離散 PSF $\mathbf{b}_\delta$ との畳込み演算を表す行列である．

連続観測画像は，オフセット δ の離散観測画像の線形結合として表される．したがって，連続観測画像に対する超解像方程式，すなわち超解像の基本方程式も同様に，オフセット δ の離散観測画像に対する方程式の線形結合として式 (13) のように表現することができる．

$$\mathbf{g}_\infty = \mathbf{B}_\infty \, \mathbf{h} \tag{13}$$

ここで，

$$\mathbf{g}_\infty = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_{\delta_0} \\ \mathbf{g}_{\delta_1} \\ \vdots \\ \mathbf{g}_{\delta_k} \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_\infty = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{\delta_0} \\ \mathbf{B}_{\delta_1} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{\delta_k} \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{14}$$

であり，すべての δ_k $(k = 0, 1, 2, \cdots)$ は異なる値である．以上のように前節で述べた 4 つの仮定から，式 (13) に示す超解像の基本方程式が導出できた．

3.3 超解像の条件数定理

条件数に関する数学的な性質を概説した後に，超解像の条件数定理を示し，証明する．

3.3.1 条件数の数学的性質

条件数は，線形連立方程式の係数行列に対して定義され，連立方程式の解を求める際の安定性の指標として知られている[19]．条件数の小さい連立方程式は安定であり，条件数の大きい連立方程式は不安定であるということができる．特に条件数が無限大のときは，その連立方程式は特異である．式 (2) で示されるような連立方程式に対して，その条件数 $\mathrm{cond}(\mathbf{B})$ は式 (15) のように定義される．

$$\mathrm{cond}(\mathbf{B}) = ||\mathbf{B}||_2 \cdot ||\mathbf{B}^{-1}||_2 \tag{15}$$

ここで，$||\cdot||_2$ は 2 次ノルムを表す．条件数に関して，式 (16)，(17) の不等式が成立し，条件数は解の相対誤差の上限を定める．

$$\frac{||\mathbf{\Delta h}||_2}{||\mathbf{h}||_2} \leq \mathrm{cond}(\mathbf{B}) \frac{||\mathbf{\Delta g}||_2}{||\mathbf{g}||_2} \tag{16}$$

$$\frac{||\mathbf{\Delta h}||_2}{||\mathbf{h} + \mathbf{\Delta h}||_2} \leq \mathrm{cond}(\mathbf{B}) \frac{||\mathbf{\Delta B}||_2}{||\mathbf{B}||_2} \tag{17}$$

ここで，$\mathbf{\Delta h}$ は推定された高解像度画像の誤差を，$\mathbf{\Delta g}$ は観測画像の誤差を，$\mathbf{\Delta B}$ は PSF によって定まる係数行列の誤差を，それぞれ表す．式 (17) の不等式は，PSF の近似精度が多少悪くても条件数が小さければ，結果として誤差の影響は小さく抑えられることを示している．

ところで，行列のノルムを直接計算することは一般に困難であるので，条件数を式 (15) の定義に従って計算することは現実的ではない．そこで，本論文では，次式に示す条件数の性質を利用する[19]．

$$\mathrm{cond}(\mathbf{B}) = \sqrt{\frac{\max_i \lambda_i(\mathbf{B}^* \, \mathbf{B})}{\min_i \lambda_i(\mathbf{B}^* \, \mathbf{B})}} \tag{18}$$

ここで，* は行列の共役転置を，$\lambda_i(\mathbf{B}^* \, \mathbf{B})$ は行列 $\mathbf{B}^* \, \mathbf{B}$ の i 番目の固有値を，それぞれ表す．

3.3.2 条件数定理

補題を示した後，条件数定理を証明する．

補題 1. 式 (13) の係数行列 $\mathbf{B}_\infty$ に対して，式 (19) が成り立つ．

$$\lambda_i(\mathbf{B}_\infty^* \mathbf{B}_\infty) = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K-1} |\tilde{b}_{\delta_k\,[\mathrm{i}]}|^2 \tag{19}$$

ここで，$\tilde{b}_{\delta_k\,[\mathrm{i}]}$ は $\mathbf{b}_{\delta_k}$ の離散フーリエ変換 $\tilde{\mathbf{b}}_{\delta_k}$ の i 番目の要素を表す．

証明. オフセット δ の離散観測画像に対する超解像方程式の係数行列 $\mathbf{B}_\delta$ は，式 (20) のように対角化される．

$$\mathbf{B}_\delta = \mathbf{F}^{-1}\,\mathrm{diag}\left(\tilde{\mathbf{b}}_\delta\right)\,\mathbf{F} \tag{20}$$

ここで，$\mathbf{F}$ は離散フーリエ変換の行列表現に対応するユニタリ回転行列を，$\mathrm{diag}\left(\tilde{\mathbf{b}}_\delta\right)$ は $\tilde{\mathbf{b}}_\delta$ の要素を対角成分に持つ対角行列を，それぞれ表す．次に，行列 $\mathbf{B}_\infty^* \mathbf{B}_\infty$ の固有値を求めるため，対角化を行う．行列 $\mathbf{B}_\infty$ の定義式と式 (20) の関係式より，行列 $\mathbf{B}_\infty^* \mathbf{B}_\infty$ は次のように対角化される．

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_\infty^* \mathbf{B}_\infty &= \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{B}_{\delta_k}^* \mathbf{B}_{\delta_k} \\ &= \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{F}^{-1}\,\mathrm{diag}\left(\tilde{\mathbf{b}}_{\delta_k}^*\right)\mathrm{diag}\left(\tilde{\mathbf{b}}_{\delta_k}\right)\mathbf{F} \\ &= \mathbf{F}^{-1}\,\mathrm{diag}\left(\boldsymbol{\lambda}\right)\mathbf{F}\end{aligned} \tag{21}$$

ここで，ベクトル $\boldsymbol{\lambda}$ の i 番目の要素 λ_i は次のように表される．

$$\lambda_i = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K-1} |\tilde{b}_{\delta_k\,[\mathrm{i}]}|^2 \tag{22}$$

行列 $\mathbf{F}$ はユニタリ行列であるので，式 (21) 右辺の対角成分は，行列 $\mathbf{B}_\infty^* \mathbf{B}_\infty$ の固有値となる．したがって，式 (19) を得る．　□

定理 1.（超解像の条件数定理）
式 (13) の超解像の基本方程式に対する条件数 $\mathrm{cond}(\mathbf{B}_\infty)$ は式 (23) のように表される．

$$\mathrm{cond}(\mathbf{B}_\infty) = \frac{1}{\sqrt{\min_i \tilde{\beta}^2{}_{[\mathrm{i}]}}} \tag{23}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}^2{}_{[\mathrm{i}]} &= \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} |\tilde{b}_{\delta_k\,[\mathrm{i}]}|^2 &(24)\\ &= \int_{-1/2}^{1/2} |\tilde{b}_{\delta\,[\mathrm{i}]}|^2\, d\delta &(25)\end{aligned}$$

である．本論文では，PSF の平均パワースペクトルを $\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2 = (\beta^2{}_{[0]}, \beta^2{}_{[1]}, \cdots, \beta^2{}_{[\mathrm{N\text{-}1}]})^T$ と定義する．なお，T はベクトルの転置を表す．

証明. 規格化されたカメラ PSF を考えた場合，式 (26) の関係を仮定することができる☆．

$$\max_i |\lambda_i(\mathbf{B}_\delta)| = \max_i |\tilde{b}_{\delta\,[\mathrm{i}]}| = \tilde{b}_{\delta\,[0]} = 1 \tag{26}$$

式 (26) を利用することにより，行列 $\mathbf{B}_\infty$ に対する式 (18) の分子は式 (27) となる．

$$\max_i \lambda_i(\mathbf{B}_\infty^* \mathbf{B}_\infty) = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K-1} 1 = \lim_{K\to\infty} K \tag{27}$$

式 (27) の右辺は無限大に発散してしまうが，条件数は式 (18) に示されるように最小固有値と最大固有値の比であるので，条件数は収束する．具体的には，式 (18)，(19)，(27) より，次式を得る．

$$\mathrm{cond}(\mathbf{B}_\infty) = \sqrt{\frac{\lim_{K\to\infty} K}{\min_i \left[\lim_{K\to\infty} \sum_{k=0}^{K-1} |\tilde{b}_{\delta_k\,[\mathrm{i}]}|^2\right]}} \tag{28}$$

式 (28) を簡単にすることにより，式 (23) を得る．なお，δ_k の変域は $-1/2$ から $1/2$ であり，δ_k が重ならず無限にあると考えた場合，式 (24) は式 (25) の積分の形式に変形することができる．　□

超解像の条件数定理を利用して条件数を算出するために必要なパラメータは次の 3 つのパラメータである．

(1)　連続 PSF $b(\mathbf{x})$
(2)　高解像度画像の低解像度画像に対する倍率 M
(3)　低解像度画像の大きさ

パラメータ (1)，(2) が必要な理由は条件数定理より明らかである．パラメータ (3) に関しては，PSF の平均パワースペクトルを計算するために必要である．

つまり，超解像の条件数定理は，任意の PSF に対して，任意の倍率での条件数を算出することを可能にする．得られた条件数は PSF 近似に対する重要な指標となる．したがって，条件数を比較し，条件数のより小さな PSF 近似を利用することにより，安定に高解像度画像を推定することができる．また，同一の PSF 近似で倍率を変化させた場合も，条件数を比較するこ

☆ この仮定を使わなくても定式化可能であるが，この仮定は十分合理的であり，式が簡単化されるためここではこの仮定を利用する．

とにより，安定に高解像度画像を推定することができる最適な倍率が設定でき，また倍率の限界を示すことも可能である．

3.4 勾配制限

本節では，式 (13) の超解像の基本方程式を ML 法で解く場合を考える．この場合に，PSF の平均パワースペクトル $\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2$ が ML 法の評価関数の勾配とどのような関係があるかを明らかにする．超解像の基本方程式に関する ML 法の評価関数は式 (29) のように定義される．

$$I = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} ||\mathbf{g}_{\delta_k} - \mathbf{B}_{\delta_k}\mathbf{h}||_2^2 \tag{29}$$

ここで，評価関数が発散するのを防ぐために K による規格化を行っている．評価関数の高解像度画像 $\mathbf{h}$ に関する微分は式 (30) となる．

$$\frac{\partial I}{\partial \mathbf{h}} = -2 \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{B}^*_{\delta_k}\mathbf{B}_{\delta_k}\mathbf{e}_{\delta_k} \tag{30}$$

ここで，

$$\mathbf{e}_{\delta_k} = \mathbf{B}^{-1}_{\delta_k}\mathbf{g}_{\delta_k} - \mathbf{h} \tag{31}$$

である．行列 $\mathbf{B}_{\delta_k}$ の逆行列が存在しないことも考えられる．しかしながら，行列 $\mathbf{B}_{\delta_k}$ は δ_k または倍率 M の関数と考えられ，極限値の意味で逆行列が存在すると考えることにする．

式 (30) の両辺にフーリエ変換に相当する回転行列 $\mathbf{F}$ をかけることにより，評価関数の微分の空間周波数成分を次式のように得ることができる．

$$\left|\mathbf{F}\frac{\partial I}{\partial \mathbf{h}}\right| = 2\left|\mathrm{diag}\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2\right)\tilde{\mathbf{e}}_{\delta_k}\right| \le 2\,\mathrm{diag}\left(\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2\right)|\tilde{\mathbf{e}}_{\max}| \tag{32}$$

ここで，$|\tilde{\mathbf{e}}_{\max}|$ の i 番目の要素は$\{|\mathbf{e}_{\delta_0}[i]|, |\mathbf{e}_{\delta_1}[i]|, \cdots\}$ の最大値である．式 (32) の不等式は，PSF の平均パワースペクトル $\tilde{\boldsymbol{\beta}}^2$ によって，評価関数の微分の空間周波数成分が抑え込まれるということを表している．つまり，PSF の平均パワースペクトルのある空間周波数成分が非常に小さければ，対応する評価関数の微分の空間周波数成分も小さくなる．評価関数の微分の空間周波数成分が小さいということは，高解像度画像のその空間周波数成分はほとんど更新されないということを示している．このような制限を，勾配制限と呼ぶことにする．特に PSF の平均パワースペクトルが 0 であれば，その空間周波数成分において高解像度画像はまったく更新されない．PSF の平均パワースペクトルが 0 である空間周波数を特異な空間周波数と呼ぶことにする．

4. Box 型および Gaussian 型 PSF の解析

前章では，一般的な PSF に関して理論的な解析を行った．本章では，具体的に Box 型および Gaussian 型 PSF を取り上げ，条件数および平均パワースペクトルを示す．なお，前章の理論解析は一次元での解析であったが，本章では二次元の場合の結果を示す．

4.1 条件数

Box 型および Gaussian 型 PSF それぞれに関して，倍率 M を変化させながら条件数を算出した．**図 2** に，条件数の逆数を対数軸としたときの結果を示す．条件数の逆数は，その値が大きいほど問題が安定していることを示し，特にゼロの場合はその問題が特異であることを表す．なお，低解像度画像サイズを 23×23 とし，式 (25) の積分計算には数値積分を利用した．さらに，Gaussian 型 PSF の標準偏差 σ は倍率 $M = 1$ のときに，条件数が Box 型 PSF の条件数と等しくなるように $\sigma = 0.3$ とした．

Box 型 PSF の場合，2 以上の整数倍率において条件数の逆数がゼロとなっていることが特徴的である．これは，Box 型 PSF を仮定した場合，2 以上の整数倍率は特異な問題となっていることを示しており，Baker らおよび Lin らの従来研究と一致している[14),15)]．さらに，Box 型 PSF の条件数の逆数の大まかな形状も Lin らの定量的な解析と一致する[15)]．

超解像の条件数定理により，Box 型 PSF だけでなく，任意の PSF の条件数が計算できるため，Gaussian 型 PSF に関しても同様に条件数の逆数が算出できていることが，本論文の大きな特徴である．式 (16) に示すように，観測誤差の大きさが同じであれば，条件数の小さい PSF 近似を用いた超解像処理結果のほう

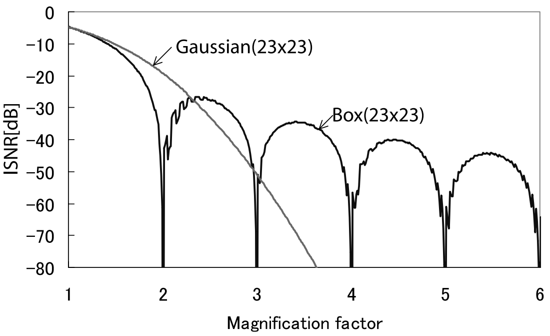


図 2　低解像度画像サイズが 23×23 のときの，Box 型 PSF と Gaussian 型 PSF（$\sigma = 0.3$）の条件数の逆数

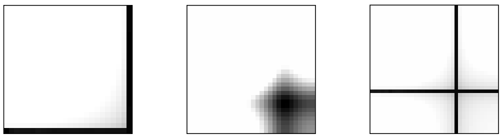
Fig. 2　Inverse condition numbers of Box type PSF and Gaussian type PSF ($\sigma = 0.3$) for LRI size 23×23.

が推定誤差が小さく，安定である．たとえば，倍率が 1 から 2.27 の範囲では，Gaussian 型 PSF の条件数の逆数が Box 型 PSF を上回っているため，この範囲の倍率に対しては Gaussian 型 PSF を利用するほうが安定であることが簡単に分かる．それ以外の倍率に関しても，条件数の逆数を比較することにより，超解像処理の安定性を判断することが可能である．

4.2 平均パワースペクトル

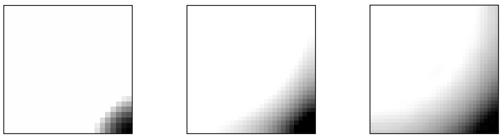
勾配制限は，PSF の平均パワースペクトルが小さければ，ML 法の評価関数の微分の空間周波数成分も小さいということを示している．具体的に，Box 型 PSF および Gaussian 型 PSF に関して，倍率 $M = 2.0$, 2.5，3.0 の場合の平均パワースペクトルを計算した．その結果を**図 3** に示す．

図 3 より，倍率によらず Gaussian 型 PSF の平均パワースペクトルは，空間周波数に対して単調に減少しているのが確認される．その一方で，Box 型 PSF の平均パワースペクトルは特定の空間周波数において，非常に小さな値となっている．特に倍率が $M = 2.0$，3.0 では，黒で示されている空間周波数の平均パワースペクトルは 0 であり，特異な空間周波数となっている．特異な空間周波数は $M = 2.0$ の場合，0.5 [HRI pixel^{-1}] であり，$M = 3.0$ の場合，0.333 [HRI pixel^{-1}] である．勾配制限により，高解像度画像を更新する際に，この特異な空間周波数成分は，まったく更新されないことが予想される．



$M = 2.0$, min $= 0$ $M = 2.5$, min $= 1.32 \times 10^{-4}$ $M = 3.0$, min $= 0$

(a) Box PSF



$M = 2.0$, min $= 5.76 \times 10^{-4}$ $M = 2.5$, min $= 1.02 \times 10^{-5}$ $M = 3.0$, min $= 7.95 \times 10^{-6}$

(b) Gaussian PSF ($\sigma = 0.3$)

(c) Scale

図 3 PSF の平均パワースペクトル（低解像度画像サイズ：23×23）．各図で，左上が原点，右下が最大空間周波数 $(0.5, 0.5)$ [HRI pixel^{-1}] である．また，それぞれの図のスケールも規格化されている

Fig. 3 Average power spectrum of PSF (LRI size: 23×23), the top left is the origin of spatial frequency $(0, 0)$, the bottom right is the maximum spatial frequency $(0.5, 0.5)$ in HRI pixel units, the scale is normalized for each image.

5. 合成画像による実験

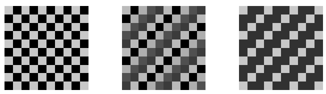
超解像の条件数定理と勾配制限の有効性を確認するために，合成画像を用いて実験を行った．**図 4** に示す画像を真の高解像度画像として用意した．この画像に対して，Box 型 PSF および Gaussian 型 PSF（$\sigma = 0.3$）を仮定し，それぞれ 256 枚の低解像度画像を作成した．このとき，低解像度画像の大きさを 23×23，平行移動の間隔は低解像度画像の画素間隔の 1/16 刻みとしている．位置合わせは正確であると仮定している．

勾配制限の効果が顕著に現れるように**図 5** に示す 3 種類の初期画像を用意した．これらの初期画像は，図 3 (a) の Box 型 PSF の平均パワースペクトルが最小値となる空間周波数成分のみを，それぞれ有している．

Box 型 PSF を仮定し合成された低解像度画像に対しては Box 型 PSF を，Gaussian 型 PSF（$\sigma = 0.3$）を仮定し合成された低解像度画像に対しては Gaussian 型 PSF（$\sigma = 0.3$）を，それぞれ用いて ML 法による超解像処理を行った．このとき，繰返し数は 200 回として，倍率は $M = 2.0$，2.5 および 3.0 の 3 種類に対して処理を行った．超解像処理結果を**図 6** に示す．また，それぞれの条件数の逆数も図の副題に示してある．**表 1** に，それぞれの超解像処理結果と真値画像と

図 4 真値とした画像

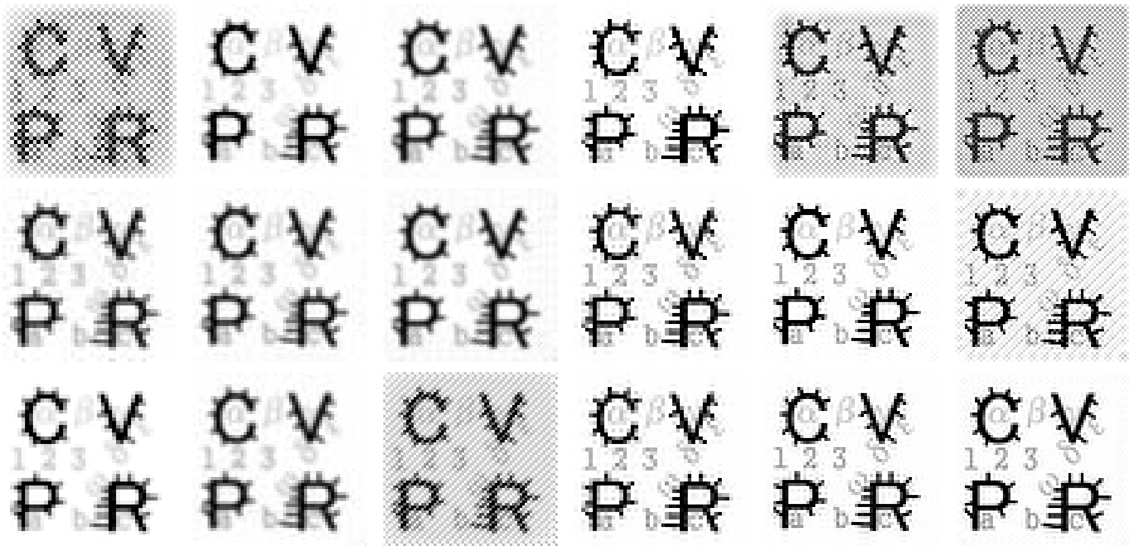
Fig. 4 Ground truth.



(a) (b) (c)

図 5 初期画像の一部分. (a), (b) および (c) はそれぞれ, $(0.5, 0.5)$, $(0.4, 0.4)$, および $(0.333, 0.333)$ の空間周波数のみを有する

Fig. 5 Part of the initial image for super-resolution by the ML method. Those shown in (a), (b) and (c) have only the spatial frequency component at $(0.5, 0.5)$, $(0.4, 0.4)$, and $(0.333, 0.333)$ in HRI pixel units, respectively.



(a) Box PSF ($M = 2.0$), ICN = 0
(b) Box PSF ($M = 2.5$), ICN=1.15×10^{-2}
(c) Box PSF ($M = 3.0$), ICN = 0
(d) Gaussian PSF ($M = 2.0$), ICN=2.40×10^{-2}
(e) Gaussian PSF ($M = 2.5$), ICN=3.20×10^{-3}
(f) Gaussian PSF ($M = 3.0$), ICN=2.82×10^{-3}

図 6 超解像処理結果．1 行目の結果は図 5 (a) を初期値として計算した結果を，2 行目および 3 行目は，それぞれ図 5 (b) および図 5 (c) を初期値として計算した結果を示す．なお，ICN（Inverse Condition Number）は条件数の逆数である

Fig. 6 Super resolution results. ICN represents the inverse condition number. The first, second and third rows are calculated from initial images shown in Fig. 5 (a), 5 (b) and 5 (c), respectively. The magnification factors of the first and fourth columns are 2.0, those of the second and fifth columns are 2.5, and those of the third and sixth columns are 3.0.

表 1 超解像処理結果の RMSE
Table 1 RMSE of Super resolution results.

Initial	Box PSF			Gaussian PSF		
image	$M = 2.0$	$M = 2.5$	$M = 3.0$	$M = 2.0$	$M = 2.5$	$M = 3.0$
Fig. 5 (a)	70.5	18.3	6.7	29.4	53.2	70.1
Fig. 5 (b)	8.4	18.3	7.6	29.4	36.3	40.8
Fig. 5 (c)	8.3	18.3	47.0	29.4	36.3	30.0

の RMSE をまとめる．なお，真値画像の大きさを超解像処理結果にあわせてから RMSE を求めた．

まず，Box 型 PSF（$M = 2.5$）と Gaussian 型 PSF（$M = 2.0$）の条件数の逆数に注目すると，それぞれ 1.15×10^{-2}，2.40×10^{-2} である．これらの条件数の逆数は，比較的大きな値を示している．対応する超解像処理結果も，他の条件と比較した場合，初期画像によらずノイズが小さく良好な結果を示している．超解像の条件数定理から導かれる条件数の逆数からも，また実験結果からも，Box 型 PSF（$M = 2.5$）と Gaussian 型 PSF（$M = 2.0$）の 2 つの PSF 条件が他の PSF 条件よりも安定であるという一致した結果が得られた．

これまでの研究においても[14),15)]，Box 型 PSF の場合，倍率が 2 以上の整数では特異な問題となるため，解が安定に得られないということが示されている．また，本論文の条件数定理から計算される条件数も，倍率が 2 以上の整数では無限大となり特異な問題であることが同様に示されている．しかしながら，$M = 2.0$ と $M = 3.0$ の Box 型 PSF に対する超解像結果は，図 6 に示すとおり，いくつかの初期画像に対しては，ノイズがなく良好な結果となっている．このような初期画像に対する依存性は，これまでの研究では説明することができない．一方，本論文の勾配制限の関係を利用することにより，この初期画像依存性を簡単に説明することが可能である．

例として，Box 型 PSF（$M = 3.0$）の場合を考える．ノイズの多い結果を与えている図 5 (c) の初期画

像は，$(0.333, 0.333)$ の空間周波数成分のみを持つ画像である．また，図 3 (a) に示すように Box 型 PSF（$M = 3.0$）の平均パワースペクトルは，$(0.333, 0.333)$ において 0 であり，この空間周波数は特異な空間周波数であることが確認できる．したがって，初期画像が持つ特異な空間周波数成分は ML 法では更新されることなく，超解像処理結果に現れてしまう．これが超解像処理結果のノイズである．その一方で，図 5 (a) および (b) の初期画像が有している空間周波数成分に関する Box 型 PSF（$M = 3.0$）の平均パワースペクトルは 0 ではない．したがって，初期画像は更新され，超解像処理の結果にも初期画像の成分は現れず，良好な結果を示す．

次に，Gaussian 型 PSF に注目する．Gaussian 型 PSF の平均パワースペクトルは空間周波数に対して単調に減少する．本論文では，高解像度画像の画素間隔を 1 と仮定しているので，空間周波数の最大値は 0.5 である．したがって，Gaussian 型 PSF の平均パワースペクトルは空間周波数が $(0.5, 0.5)$ において最小となる．以上のことから，空間周波数 $(0.5, 0.5)$ の成分のみを有する図 5 (a) の初期画像に対する超解像処理結果が最も悪いことが予想される．図 6 の結果も，この予想と一致している．特に，図 5 (a) の初期画像に対する超解像処理結果を，倍率を変化させながら比較すると，倍率を大きくするに従って，ノイズが大きくなっていることが確認される．この結果も，Gaussian 型 PSF の条件数の逆数が倍率に対して単調減少するという理論解析の結果と一致している．

Box 型 PSF（$M = 3.0$）と Gaussian 型 PSF（$M = 3.0$）を比較した場合，Gaussian 型 PSF（$M = 3.0$）の条件数の逆数は，Box 型 PSF（$M = 3.0$）に比較して大きく，安定していることを示している．ところが，図 5 (a) および (b) に対する超解像処理結果は，Box 型 PSF（$M = 3.0$）のほうが良好である．これは，条件数が平均パワースペクトルの最小値のみを評価しているためである．つまり，平均パワースペクトルの最小値は，Box 型 PSF（$M = 3.0$）のほうが小さいものの，図 5 (a) および (b) に対応する周波数の平均パワースペクトルは Box 型 PSF（$M = 3.0$）のほうが大きいためである．このような結果は条件数のみでは説明できず，平均パワースペクトルによる勾配制限の有効性を示すものである．

6. む す び

本論文では，超解像の条件数定理を導出し，証明を行った．条件数定理は，任意の PSF に対して，任意の倍率における条件数を算出する方法を示したものである．さらに，ML 法において，評価関数を最適化する勾配法に対する勾配制限も示した．勾配制限により，PSF の平均パワースペクトルによって評価関数の勾配が制限されることを示した．超解像の条件数定理と勾配制限を合成画像を利用した実験により確認した．従来の研究では，説明できない現象についても，条件数定理と勾配制限により明確に説明可能であることを示した．

PSF の近似誤差に起因する推定誤差を含めた定量的な誤差解析が今後の課題である．

参 考 文 献

1) Park, S.C., Park, M.K. and Kang, M.G.: Super-Resolution Image Reconstruction: A Technical Overview, *IEEE Signal Proc. Magazine*, Vol.20, No.3, pp.21–36 (2003).

2) Tom, B.C. and Katsaggelos, A.K.: Reconstruction of a high-resolution image by simultaneous registration, restoration, and interpolation of low-resolution images, *Proc. IEEE Int. Conf. Image Processing*, Vol.2, pp.539–542 (1995).

3) Schulz, R.R. and Stevenson, R.L.: Extraction of high-resolution frames from video sequences, *IEEE Trans. Image Processing*, Vol.5, pp.996–1011 (1996).

4) Stark, H. and Oskoui, P.: High resolution image recovery from image-plane arrays, using convex projections, *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol.6, pp.1715–1726 (1989).

5) 後藤知将，奥富正敏：単板カラー撮像素子の RAW データを利用した高精細画像復元，情報処理学会論文誌：コンピュータビジョンとイメージメディア，Vol.45, No.SIG 8(CVIM 9), pp.15–25 (2004).

6) Goto, T. and Okutomi, M.: Direct Super-Resolution and Registration Using Raw CFA Images, *Proc. IEEE Computer Society Conference on CVPR*, Vol.II, pp.600–607 (2004).

7) 田中正行，奥富正敏：再構成型超解像処理の高速化アルゴリズム，情報処理学会研究報告 2004-CVIM-146，Vol.2004, No.113, pp.97–104 (2004).

8) Nguyen, N., Milanfar, P. and Golub, G.: A Computationally Efficient Superresolution Image Reconstruction Algorithm, *IEEE Trans. Image Processing*, Vol.10, No.4, pp.573–583 (2001).

9) 田中正行，奥富正敏，清水雅夫，後藤知将：高速超解像処理システムの実現，第 11 回画像センシングシンポジウム（SSII05）予稿集，pp.533–536

(2005).
10) Donaldson, K. and Myers, G.K.: Bayesian Super-Resolution of Text in Video with a Text-Specific Bimodal Prior, *International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition* (*CVPR2005*), Vol.I, pp.1188–1195 (2005).
11) Shechtman, E., Caspi, Y. and Irani, M.: Space-Time Super-Resolution, *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol.27, No.4, pp.531–545 (2005).
12) Chiang, M.-C. and Boult, T.E.: Efficient Super-Resolution Via Image Warping, *Image and Vision Computing*, Vol.18, No.10, pp.761–771 (2000).
13) Elad, M. and Feuer, A.: Restoration of a Single Superresolution Image from Several Blurred, Noisy, and UnderSampled Measured Images, *IEEE Trans. Image Processing*, Vol.6, No.12, pp.1646–1658 (1997).
14) Baker, S. and Kanade, T.: Limits on Super-Resolution and How to Break Them, *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol.24, No.9, pp.1167–1183 (2002).
15) Lin, Z. and Shum, H.Y.: Fundamental Limits of Reconstruction-Based Superresolution Algorithms under Local Translation, *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol.26, No.1, pp.83–97 (2004).
16) 田中正行，奥富正敏：再構成型超解像処理の理論限界に関する検討，情報処理学会研究報告 2004-CVIM-147, pp.147–154 (2005).
17) Tanaka, M. and Okutomi, M.: Theoretical Analysis on Reconstruction-Based Super-Resolution for an Arbitrary PSF, *International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition* (*CVPR2005*), Vol.II, pp.947–954 (2005).
18) Capel, D.: *Image Mosaicing and Super-Resolution,* Springer Verlag (2004).
19) 伊理正夫：線形代数 I，II，岩波書店 (1994).

(平成 17 年 5 月 17 日受付)
(平成 17 年 11 月 18 日採録)

(担当編集委員　岡谷 貴之)

田中　正行

1998 年東京工業大学工学部制御システム工学科卒業．2000 年同大学大学院理工学研究科制御工学専攻修士課程修了．2003 年同大学院理工学研究科機械制御システム専攻博士課程修了．同年アジレント・テクノロジー（株）入社．2004 年東京工業大学大学院理工学研究科機械制御システム専攻研究員．超解像，画像処理に関する研究に従事．博士（工学）．計測自動制御学会，電子情報通信学会，IEEE 各会員．

奥富　正敏（正会員）

1981 年東京大学工学部計数工学科卒業．1983 年東京工業大学大学院理工学研究科制御工学専攻修士課程修了．同年キヤノン（株）入社．1987～1990 年カーネギーメロン大学コンピュータサイエンス学科客員研究員．1994 年東京工業大学大学院情報理工学研究科情報環境学専攻助教授．2002 年同大学理工学研究科機械制御システム専攻教授．コンピュータビジョン，画像処理，画像計測に関する研究に従事．工学博士．計測自動制御学会，電子情報通信学会，日本ロボット学会，画像電子学会，IEEE 各会員．