

レゾルベントの多項式によるフィルタを用いた 実対称定値一般固有値問題の解法

村上 弘^{1,a)}

概要：フィルタ対角化法を用いて実対称定値一般固有値問題を解く。フィルタとしてレゾルベントの多項式を用いる。フィルタの設計ではフィルタの伝達関数が良い形状になるようにレゾルベントのシフトと多項式をうまく調整する。フィルタに用いる多項式をチェビシェフ多項式で表わされる形に制限すると、伝達関数の形状はあまり良くはできないが、数値最適化による調製が省けるので設計は簡単になる。

レゾルベントの多項式をベクトルに作用させる計算の実現では、多項式の次数に等しい回数のレゾルベントの作用が必要になる。レゾルベントの作用を与える連立一次方程式を行列分解を用いて解く場合は、行列分解を最初に一度行なうと、その後は分解結果を利用することで連立一次方程式を素早く解くことができる。そのため、フィルタに単一のレゾルベントの多項式を用いる方法は、複数のレゾルベントの線形結合を用いる方法に比べて必要な記憶量や計算量を減らせる可能性がある。

固有値分布の内側の固有値を持つ固有対を求める場合にはレゾルベントのシフトとして虚数を用いるが、固有値分布の端にある固有値を持つ固有対を求める場合にはシフトとして実数を用いることができる。実数のシフトを用いることができる場合は、すべての計算は複素数を用いずに実数演算だけで行なえるので、演算量と記憶量が減らせて有利になる。

フィルタを単一のレゾルベントの多項式とする場合に、その多項式をチェビシェフ多項式に選べば、容易に阻止域での伝達率の大きさの上限を小さく抑えることができる。しかし通過域では伝達率の最大最小比が小さくないため、必要な近似対の精度は均一性が良くない可能性がある。そこでフィルタに用いるレゾルベントの多項式を、一つのチェビシェフ多項式で表わされるものから、複数のチェビシェフ多項式の和で表わされるチェビシェフ展開形に拡張することで、通過域に於ける伝達率の最大最小比をできるだけ抑えることを試みた。

キーワード：フィルタ対角化、固有値問題、レゾルベント、多項式

A Method to Solve a Real Symmetric Definite Generalized Eigenproblem by Using a Filter Which Is a Polynomial of a Resolvent

HIROSHI MURAKAMI^{1,a)}

Abstract: By using the filter diagonalization method, we solve approximations of those eigenpairs of a real symmetric definite generalized eigenproblem whose eigenvalues are in a specified interval. We use a polynomial of a resolvent as a filter. In the design of the filter, we tune the shift of the resolvent and the polynomial so that a good shape of the transfer function is obtained. If we restrict the polynomial for the filter to a form represented by a Chebyshev polynomial, then the shape of the transfer function cannot be made so good, but the design can be made easy since in the tuning the numerical optimization procedure can be avoided. In an application of a polynomial of a resolvent to a vector, applications of the resolvent are required as many times as the degree of the polynomial. When a simultaneous linear equations, which gives the action of a resolvent, is solved by the matrix decomposition method, first the decomposition is made once, and after then by using the result of the decomposition the linear equation can be solved quickly. Therefore, compared from other method which uses a linear combination of many resolvents as a filter, the present method which uses a polynomial of a single resolvent as a filter has a potential to reduce both amounts of computation and memory space. When we solve eigenpairs with interior eigenvalues we use a complex number for the shift of the resolvent. We can use a real number for the shift when we solve pairs with exterior eigenvalues. When a real number can be used for the shift, the calculation can be made without complex numbers by using only real arithmetics, therefore we have an advantage to reduce both amounts of computation and memory space. When a polynomial of a single resolvent is used for a filter, if a Chebyshev polynomial is chosen as the polynomial then a small upper-bound for the magnitude of the transfer rate of the filter in the stopband can be easily obtained. However, for such a filter, the ratio of the maximum and the minimum of the magnitude of the transfer rates in the passband cannot be made so small, it is likely that the uniformity of approximations of required eigenpairs is not good. Therefore, in this research, to reduce the ratio in the passband we try to extend the polynomial for the filter from a single Chebyshev polynomial to a sum of Chebyshev polynomials.

Keywords: filter diagonalization, eigenproblem, resolvent, polynomial

1. はじめに

いま係数行列 A と B が実対称で、 B は正定値である一般固有値問題

$$A\mathbf{v} = \lambda B\mathbf{v}$$

の、下端固有対であって固有値が指定された区間 $[a, b]$ にあるものを解くのにフィルタ対角化法を用いることにする (区間の左端 a は最小固有値以下の値とする). そのためのフィルタとして、固有値が $[a, b]$ 近傍にある固有ベクトルは良く通過させるが、 $[a, b]$ から離れた固有ベクトルは強く減衰させる線形作用素を用いる.

2. フィルタ対角化法の概要

フィルタ対角化法の概要は、以下のようになる.

- (1) まず固有値が $[a, b]$ 近傍の固有ベクトルを良く通過させるが、 $[a, b]$ から離れた固有ベクトルは強く阻止するフィルタ $\mathcal{F}$ を用意しておく.
- (2) ランダムな N 次ベクトル m 個の組を作り、それを B -正規直交化して X ($N \times m$ 行列) とする ($X^T B X = I$).
- (3) 作成した X へフィルタ $\mathcal{F}$ を作用させて、濾過されたベクトルの組 $Y \leftarrow \mathcal{F} X$ ($N \times m$ 行列) を作成する.
- (4) 得られた Y の列の適切な線形結合の組により「 $[a, b]$ 近傍にある固有値すべてに対応する不変部分空間」を近似する空間の基底を構成する (その構成は X, Y および伝達関数の特性を参照して決める).
- (5) 構成した基底にレイリー・リッツ法を適用して、得られたリッツ対を一般固有値問題の近似対にする.

3. レゾルベントの多項式のフィルタとその伝達関数

下端固有対を解くためのフィルタとして、「実数シフトのレゾルベント」の多項式を採用する. いま扱っている行列 A と B の一般固有値問題に対応して、シフトが ρ のレゾルベントを

$$\mathcal{R}(\rho) \equiv (A - \rho B)^{-1} B \quad (1)$$

と定義する. そうして実数 ρ と実多項式 $\mathcal{P}$ をうまく選んで作ったレゾルベントの多項式をフィルタとする:

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{P}(\mathcal{R}(\rho)). \quad (2)$$

ここで、 $\mathcal{P}$ は n 次の実多項式である. シフト ρ が最小固有値未満であればフィルタは有界作用素になる.

いまの固有値問題の場合は、固有対 $(\lambda, \mathbf{v})$ はすべて実にとれる. そうしてレゾルベントの固有ベクトルへの作用は

$$\mathcal{R}(\rho) \mathbf{v} = \frac{1}{\lambda - \rho} \mathbf{v} \quad (3)$$

となる. すると、フィルタ $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathcal{R}(\rho))$ の固有ベクトルに対する作用は

$$\mathcal{F} \mathbf{v} = f(\lambda) \mathbf{v} \quad (4)$$

となる. ここでフィルタの伝達関数 $f(\lambda)$ は実有理関数であり

$$f(\lambda) = \mathcal{P}\left(\frac{1}{\lambda - \rho}\right) \quad (5)$$

となる.

求めたい下端固有対の固有値を含む区間が $\lambda \in [a, b]$ であるとき、固有値 λ の正規化座標 t を $\lambda \in [a, b]$ から $t \in [0, 1]$ への 1 次変換 $\lambda = a + (b - a)t$ により定義する. その逆変換は $t = \frac{1}{b-a}(\lambda - a)$ となる. そうして正規化座標 t の伝達関数を $g(t) = f(\lambda)$ で定義する. そうしていま 1 より大きいパラメタ μ を導入して $0 \leq t \leq 1$ を通過域、 $1 < t < \mu$ を遷移域、 $\mu \leq t < \infty$ を阻止域とする (図 1 参照. 緑の線で固有値の存在しうる範囲を示している).

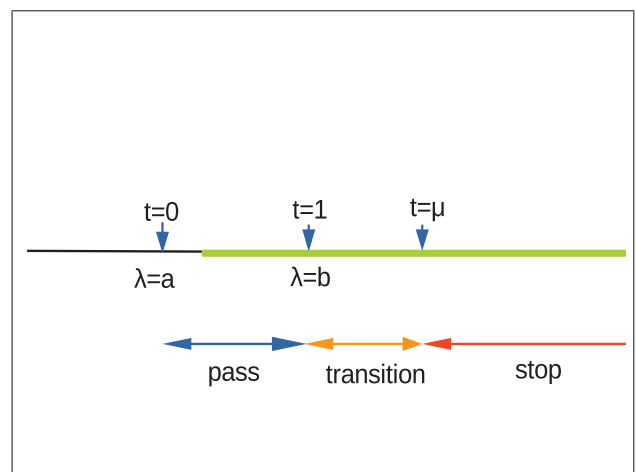


図 1 固有値 λ の区間 $[a, b]$ と正規化座標 t の関係
通過域 $\lambda \in [a, b]$, $t \in [0, 1]$; 遷移域 $t \in (1, \mu)$; 阻止域 $[\mu, \infty)$

伝達関数 $g(t)$ の形状について満たすべき条件を、パラメタ g_p, g_s を $1 > g_p \gg g_s > 0$ として、

- 阻止域では $|g(t)| \leq g_s$
- 通過域では $g(t) \geq g_p$ で、 t が非負の範囲では逆もなりたつ
- 通過域での $g(t)$ の最大値は 1 (と規格化)

であるとする (図 2).

固有値の座標 λ と正規化座標 t との関係から、 $\lambda = \rho$ ($< a$) に $t = -\sigma$ (< 0) が対応すれば、 n 次実多項式 $\mathcal{P}$ により実有理関数 $f(\lambda)$ が

$$f(\lambda) = \mathcal{P}\left(\frac{1}{\lambda - \rho}\right) \quad (6)$$

の形のとき、 $g(t)$ も実有理関数で、ある n 次実多項式 Q を用いて

¹ 首都大学東京・数理工学専攻
Department of Mathematics and Information Sciences,
Tokyo Metropolitan University
a) mrkmlhrsh@tmu.ac.jp

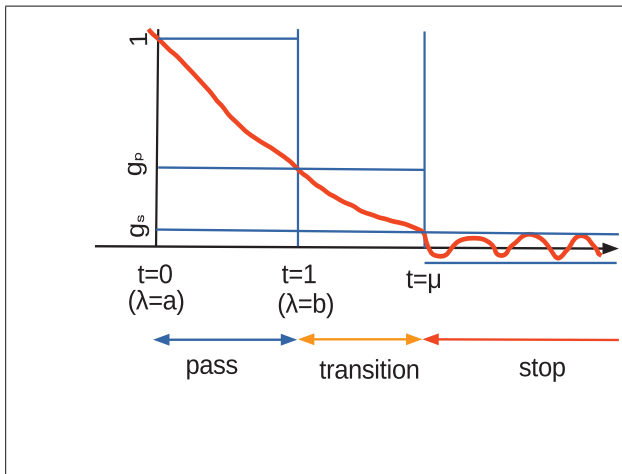


図 2 下端固有対用フィルタの伝達関数 $g(t)$ の概形

$$g(t) = Q\left(\frac{1}{t+\sigma}\right) \quad (7)$$

の形で書ける (λ を t に変換すると P から Q が決まる). 逆にこの形の式の $g(t)$ が決まれば, $f(\lambda)$ の表式も決まる.

4. 伝達関数の三つの形状パラメタについて

伝達関数の三つの形状パラメタ μ , g_s , g_p について, まず前提条件から $\mu > 1$, $1 > g_p \gg g_s > 0$ であることが必要で, その上で形状の良さや望ましさについては以下のように考える.

- μ は 1 に近いほど良い. なぜならば μ が大きいと遷移域が広くなり, それによって遷移域に固有値が多く入ればそれだけ (不変部分空間を近似する空間の基底を作るためには) 多くのベクトルを濾過する必要があるからである.
- 阻止域での伝達率の大きさの上限である g_s は, 微小であるほど良い. なぜならばこの値が微小でなければ, 固有値が阻止域にある固有ベクトルが十分には阻止されずに混入してしまい, 不変部分空間の近似が悪くなるからである.
- 通過域での伝達率の最小値である g_p は, 1 に近いほど良い. なぜならばこの値が 1 よりもずっと小さいと, 固有値が通過域にある固有対の相互間で伝達率の最大最小比が大きい場合は, 得られる近似対はその伝達率が小さいものはそれだけ精度が落ちてしまうからである.

たとえば, いま次数 n を固定したときに, 伝達関数

$$g(t) = Q\left(\frac{1}{t+\sigma}\right) \quad (8)$$

の極の位置 $t = -\sigma$ と n 次実多項式 Q を調整して, なるべく $g(t)$ の三つの形状パラメタ μ , g_s , g_p を良いものにしようとすることになる. ただし, これら三つの形状パラメタはそれらすべてを同時に良くすることができないトレードオフの関係にあるため, バランスを考えて最適化をする

ことになる. Q がまったく一般の実多項式とする場合には, 極の位置である $-\sigma$ をも含めた最適化の計算は数値的な手法になり, 最適な極の位置や多項式の係数は得られてもただ数値としてだけ得られることになる.

そこで, チェビシェフ多項式の性質を利用することで, 最適ではないが, 簡単な式計算により制約を満たす伝達関数 $g(t)$ が求まる設計法を導入する. それにより得られる $g(t)$ は阻止域では値の大きさを小さく抑えられるので良い特性を持つが, 通過域の方では値の最大最小比を小さくできず特性が良くない.

5. チェビシェフ多項式で表わされた伝達関数

いま伝達関数 $g(t)$ を n 次のチェビシェフ多項式で表わされた以下の形の式に制限する:

$$g(t) = g_s T_n(y), \quad y = 2x - 1, \quad x = \frac{\mu + \sigma}{t + \sigma}. \quad (9)$$

これはパラメタの三つ組 (n, μ, σ) で決定される (定数 g_s は規格化条件 $g(0) = 1$ を満たすように決める). 阻止域 $t \in [\mu, \infty)$ には $y \in (-1, 1]$ の全域が対応する. この $g(t)$ は阻止域では $|g(t)| \leq g_s$ を満たしており, チェビシェフ多項式の性質から阻止域以外の $t \in [0, \mu)$ に於いて単調減少となるので, 残りの二つの条件 $g(0) = 1$, $g(1) = g_p$ から

$$\frac{1}{g_s} = T_n\left(1 + 2\frac{\mu}{\sigma}\right), \quad \frac{g_p}{g_s} = T_n\left(1 + 2\frac{\mu-1}{\sigma+1}\right) \quad (10)$$

が得られる. これを逆双曲線関数を用いて表せば

$$\cosh^{-1} \frac{1}{g_s} = 2n \sinh^{-1} \sqrt{\frac{\mu}{\sigma}}, \quad \cosh^{-1} \frac{g_p}{g_s} = 2n \sinh^{-1} \sqrt{\frac{\mu-1}{\sigma+1}} \quad (11)$$

となる.

5.1 三つ組 (n, μ, σ) からの g_s と g_p の計算

パラメタの三つ組 (n, μ, σ) が与えられたとき, それから g_s と g_p の値を求めるのには, 以下の二つの式の右边をそれぞれ計算すれば良い.

$$\begin{cases} \frac{1}{g_s} \leftarrow \cosh\left(2n \sinh^{-1} \sqrt{\frac{\mu}{\sigma}}\right), \\ \frac{g_p}{g_s} \leftarrow \cosh\left(2n \sinh^{-1} \sqrt{\frac{\mu-1}{\sigma+1}}\right). \end{cases} \quad (12)$$

5.2 パラメタの三つ組として n , g_s , g_p を指定する場合

いま n , g_s , g_p が与えられたとき, それらから σ と μ の値を求めるのには,

$$\sqrt{\frac{\mu}{\sigma}} = \sinh\left(\frac{1}{2n} \cosh^{-1} \frac{1}{g_s}\right), \quad \sqrt{\frac{\mu-1}{\sigma+1}} = \sinh\left(\frac{1}{2n} \cosh^{-1} \frac{g_p}{g_s}\right). \quad (13)$$

上の各式の右边を計算して, それぞれ w_1 , w_2 とおくと

$$\frac{\mu}{\sigma} = w_1^2, \quad \frac{\mu-1}{\sigma+1} = w_2^2 \quad (14)$$

という二つの関係の組を得るが、これから σ と μ は

$$\sigma \leftarrow \frac{w_2^2 + 1}{(w_1 - w_2)(w_1 + w_2)}, \quad \mu \leftarrow \sigma w_1^2 \quad (15)$$

により簡単に求まる．こうして $g(t)$ に含まれるパラメタの三つ組 (n, μ, σ) が得られる．たとえば、 $g_p = 10^{-7}$ と $g_s = 10^{-15}$ と指定したときに、次数 n の値を 10 から 50 まで 5 刻みで変化させた場合の μ と σ の値を表 1 に示す．次数 n をかなり増やしてみても μ の値は緩慢にしか減少しない．

表 1 例： $g_p = 10^{-7}$, $g_s = 10^{-15}$ の場合の、次数 n の各場合に対する μ と σ の値

n	μ	σ
10	2.63	0.330
15	1.87	0.872
20	1.65	1.66
25	1.56	2.68
30	1.52	3.93
35	1.49	5.41
40	1.47	7.12
45	1.46	9.06
50	1.45	11.2

5.3 形状パラメタの三つ組に μ , g_p , g_s を指定する場合

形状パラメタの三つ組 μ , g_p , g_s が指定されたときに、それを（なるべく）満たすように σ と n を決めれば、伝達関数を決定する本来のパラメタの三つ組 (n, μ, σ) が揃うことになる．それには、二つの制約条件から得られる以下の n を表わす二通りの式：

$$n = \frac{\cosh^{-1} \frac{1}{g_s}}{2 \sinh^{-1} \sqrt{\frac{\mu}{\sigma}}}, \quad n = \frac{\cosh^{-1} \frac{g_p}{g_s}}{2 \sinh^{-1} \sqrt{\frac{\mu-1}{\sigma+1}}} \quad (16)$$

これら二つが一致する条件として、 σ の非線形方程式 $G(\sigma) = r$ が得られる．その左辺と右辺の式は：

$$G(\sigma) \equiv \frac{\sinh^{-1} \sqrt{\frac{\mu-1}{\sigma+1}}}{\sinh^{-1} \sqrt{\frac{\mu}{\sigma}}}, \quad r \equiv \frac{\cosh^{-1} \frac{g_p}{g_s}}{\cosh^{-1} \frac{1}{g_s}}. \quad (17)$$

この方程式 $G(\sigma) = r$ は（たとえば二分法を用いて）解くことができ、それにより σ の値を得る．そのとき次数 n を表わす二つの式の値はもちろん一致するが、一般には非整数となる．次数は正整数でなければならないので、計算により得られた実数 n の値を切り捨て（あるいは切り上げ）で整数化した値を次数 n として設定することにする．

すると、既に解いて得られた σ と整数化で得た次数 n ,

さらに最初に与えた μ を併せて得られた三つ組 (n, μ, σ) から、前述の方法で新たな g_s と g_p の値を求めることができる．このようにして得られた新たな g_s と g_p の値は最初に指定したときの値には一致しないが、その違いが応用上許容できるならば、逆にあたかも最初からそれら変更した後の値を指定していたかのように扱えばつじつまを合わせることができる．それにより、チェビシェフ多項式で表わされた $g(t)$ はこのようにして決めたパラメタの三つ組 (n, μ, σ) で与えられる．

6. 伝達関数 $g(t)$ からのフィルタ $\mathcal{F}$ の構成

伝達関数 $g(t)$ からフィルタ $\mathcal{F}$ を構成するには、以下のようにする．

正規化座標 t と固有値 λ の間の関係である $t = \frac{1}{b-a}(\lambda - a)$ を用いると、

$$x = \frac{\mu + \sigma}{t + \sigma} = \ell \frac{1}{\lambda - \rho} \quad (18)$$

である．ただしここで $\ell \equiv (b-a)(\sigma+\mu)$, $\rho \equiv a - (b-a)\sigma$ である（ $\sigma > 0$ だから $\rho < a$ である）．

伝達関数 $g(t) = g_s T_n(y)$ のチェビシェフ多項式の引数である $y = 2x - 1$ は

$$y = 2\ell \frac{1}{\lambda - \rho} - 1 \quad (19)$$

となるので、正規化座標 t による伝達関数である $g(t)$ を、固有値の座標 λ で表わした伝達関数 $f(\lambda)$ は、

$$f(\lambda) = g_s T_n \left(2\ell \frac{1}{\lambda - \rho} - 1 \right) \quad (20)$$

となる．

伝達関数 $f(\lambda)$ に対応するフィルタ作用素 $\mathcal{F}$ は、 $x = \ell \frac{1}{\lambda - \rho}$ を作用素 $\ell \mathcal{R}(\rho)$ に置き換えて、また定数 1 も恒等作用素 I に置き換えれば

$$\mathcal{F} = g_s T_n (2\ell \mathcal{R}(\rho) - I) \quad (21)$$

として得られる．

6.1 下端固有対用のフィルタの作用の実装

レゾルベント $\mathcal{R}(\rho) = (A - \rho B)^{-1} B$ をベクトルの組 W に作用させる処理 $Z \leftarrow \mathcal{R}(\rho) W$ はまず W から右辺ベクトルの組 BW を作り、係数 $C \equiv A - \rho B$ の連立一次方程式の組 $CZ = BW$ を Z について解くことで実現する．

行列 A , B は実対称で B は正定値であり、シフト ρ は実数で最小固有値未満であることから、行列 C は実対称正定値である．係数行列が実対称正定値である連立一次方程式は、ピボット交換を行なわない修正コレスキ法で実数演算だけを用いて安定に解くことができる．さらに A , B が帯行列であれば C も帯行列になるので、帯行列用の効率的な

解法が使用できる。

レゾルベントの n 次多項式を作用させる処理の中では、行列 C の連立一次方程式の組を解く処理が n 回現れる。そこで最初に C の行列分解を一度だけ行なっておくと、後はその分解の結果を利用することで連立一次方程式を少ない計算量で容易に解くことができる、

いま X と Y が N 次ベクトル m 個の組 ($N \times m$ 行列) であるときに、フィルタ $\mathcal{F}$ を X に作用して Y を作る処理 $Y \leftarrow \mathcal{F} X$ の算法を図 3 に示す。この計算にはチェビシェフ多項式の三項漸化式を利用している (Z, V, W は作業用の $N \times m$ 行列である)。

```

三つ組  $(n, \mu, \sigma)$  を与えて
 $\rho \leftarrow a - (b - a)\sigma$ ;  $\ell \leftarrow (b - a)(\sigma + \mu)$ ;

 $Z \leftarrow \mathcal{R}(\rho) X$ ;
 $V \leftarrow X$ ;
 $W \leftarrow 2\ell Z - X$ ;
for  $k := 2$  to  $n$  do begin
     $Z \leftarrow \mathcal{R}(\rho) W$ ;
     $Y \leftarrow 4\ell Z - 2W - V$ ;
     $V \leftarrow W$ ;
     $W \leftarrow Y$ 
end;
 $Y \leftarrow g_s Y$ 

```

図 3 算法：フィルタのベクトルの組への作用 $Y \leftarrow \mathcal{F} X$

7. 下端固有対用のフィルタの伝達関数の設計例

チェビシェフ多項式で表された下端固有対用のフィルタの伝達関数を設計する例を示す。正規化座標 t での伝達関数は、 $g(t) = g_s T_n(2x - 1)$ 、ただし $x \equiv \frac{\mu + \sigma}{t + \sigma}$ である。通過域は $t \in [0, 1]$ で、阻止域は $t \in [\mu, \infty)$ である。三つ組 (n, μ, σ) を指定すれば、簡単な式計算により g_p, g_s が求まる。

- **フィルタ 1** 設定した $g(t)$ のパラメタの三つ組は $n = 18, \mu = 2.0, \sigma = 1.8$ である。 $g_p = 3.10 \times 10^{-6}$, $g_s = 8.53 \times 10^{-15}$ となった。伝達関数の大きさ $|g(t)|$ のグラフを図 4 に示す。
- **フィルタ 2** 設定した $g(t)$ のパラメタの三つ組は $n = 24, \mu = 1.5, \sigma = 3.0$ である。 $g_p = 3.15 \times 10^{-7}$, $g_s = 3.75 \times 10^{-14}$ となった。伝達関数の大きさ $|g(t)|$ のグラフを図 5 に示す。
- **フィルタ 3** 設定した $g(t)$ のパラメタの三つ組は $n = 32, \mu = 2.0, \sigma = 6.11$ である。 $g_p = 1.13 \times 10^{-5}$, $g_s = 1.45 \times 10^{-15}$ となった。伝達関数の大きさ $|g(t)|$ のグラフを図 6 に示す。

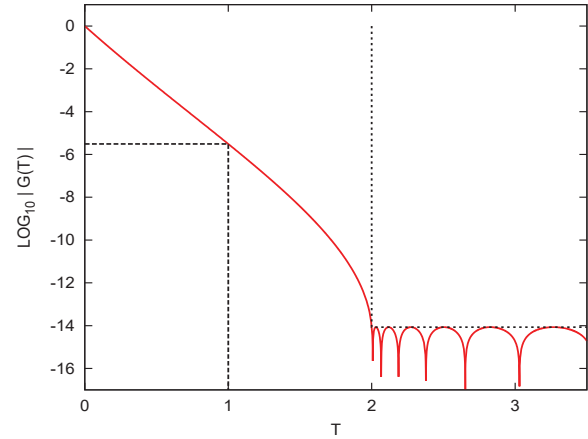


図 4 (フィルタ 1) 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ ($n=18, \mu=2.0, \sigma=1.8$) $g_p=3.10 \times 10^{-6}$, $g_s=8.53 \times 10^{-15}$

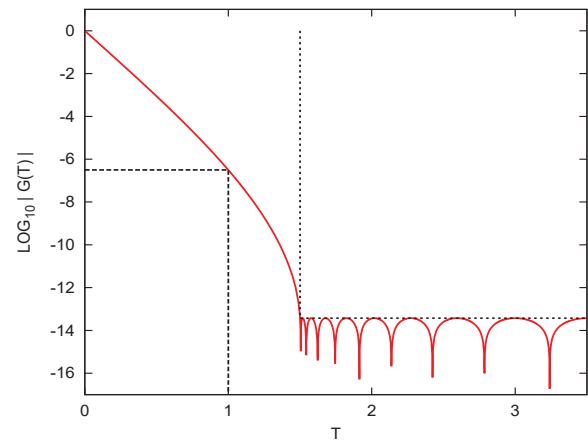


図 5 (フィルタ 2) 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ ($n=24, \mu=1.5, \sigma=3.0$) $g_p=3.15 \times 10^{-7}$, $g_s=3.75 \times 10^{-14}$

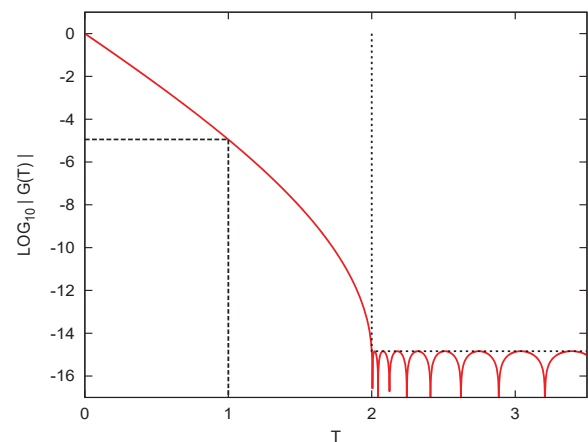


図 6 (フィルタ 3) 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ ($n=32, \mu=2.0, \sigma=6.11$) $g_p=1.13 \times 10^{-5}$, $g_s=1.45 \times 10^{-15}$

8. 伝達関数の通過域に於ける特性の改良案

さて、 n 次のチェビシェフ多項式を用いた伝達関数の式

$$g(t) = g_s T_n(2x - 1), \quad x \equiv \frac{\mu + \sigma}{t + \sigma} \quad (22)$$

の、通過域 $t \in [0, 1]$ に於ける値の最大最小比を減らすように改善をしたい。用いるレゾルベントは 1 個で、 $g(t)$ の極は $t = -\sigma$ だけにあるとする。

阻止域 $t \in [\mu, \infty)$ ではチェビシェフ多項式 T_n の引数 $2x - 1$ の値は $(-1, 1]$ にある。各区間の端と対応する x の値は、 $t = \infty$ は $x_\infty = 0$ に、 $t = \mu$ は $x_\mu = 1$ に、 $t = 1$ は $x_0 \equiv 1 + (\mu - 1)/(\sigma + 1)$ に、 $t = 0$ は $x_1 \equiv 1 + \mu/\sigma$ に、それぞれ対応する。それゆえに $x_\infty \equiv 0 < x_\mu \equiv 1 < x_1 < x_0$ であって、 $x \in (0, 1]$ が阻止域に、 $x \in (1, x_1)$ が遷移域に、 $x \in [x_1, x_0]$ が通過域に、それぞれ対応する。

8.1 チェビシェフ展開形への拡張

ここまでの方法の自然な拡張の一つは、伝達関数を n 次のチェビシェフ多項式で表わしたものから n 次以下の複数のチェビシェフ多項式の和であるチェビシェフ展開形

$$g(t) \equiv \sum_{k=0}^n c_k T_k(2x - 1) \quad (23)$$

にすることであり、それと対応してフィルタ作用素

$$\mathcal{F} \equiv \sum_{k=0}^n c_k T_k(2\ell \mathcal{R}(\rho) - I) \quad (24)$$

を採用することである。展開の係数 c_k は、あらかじめ（たとえば以下で示すような最小二乗法に類似した方法で）決定しておくものとする（簡単のためにシフト ρ は再調整しないとする）。このようにすると、用いるレゾルベントは一つだけで、フィルタ $\mathcal{F}$ のベクトル $\mathbf{v}$ に対する作用の計算は、チェビシェフ多項式に対する三項漸化式を用いて $T_k(2\ell \mathcal{R}(\rho) - I) \mathbf{v}$ を k を 0 から n まで上昇させて作りながら、そのたびにそれに係数 c_k を乗じて累積和を作ることと実現できる。

8.2 最小二乗法に類似の方法による最適化

阻止域 $x \in [0, 1]$ に於いて、「伝達関数の 0 からのずれ」の二乗の（重み付きの）積分は以下の式になる：

$$\begin{aligned} J_{\text{stop}} &\equiv \int_0^1 \frac{\{g(t)\}^2}{\sqrt{1 - (2x - 1)^2}} dx \\ &= \sum_{i,j=0}^n c_i c_j \int_0^1 \frac{T_i(2x - 1) T_j(2x - 1)}{\sqrt{1 - (2x - 1)^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^n c_i c_j \int_{-1}^1 \frac{T_i(y) T_j(y)}{\sqrt{1 - y^2}} dy \\ &= \frac{1}{2} \left(2c_0^2 + \sum_{j=1}^n c_j^2 \right). \end{aligned} \quad (25)$$

また、通過域 $x \in [x_1, x_0]$ に於ける「伝達関数の値の 1 からのずれ」の二乗の（簡単のため重み 1 の）積分は：

$$\begin{aligned} J_{\text{pass}} &\equiv \int_{x_1}^{x_0} \{1 - g(t)\}^2 dx \\ &= \int_{x_1}^{x_0} \{g(t)\}^2 dx - 2 \int_{x_1}^{x_0} g(t) dx + \text{Const} \\ &= \sum_{i,j=0}^n \mathcal{A}_{i,j} c_i c_j - 2 \sum_{j=0}^n b_j c_j + \text{Const} \end{aligned} \quad (26)$$

ここで、

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{i,j} &\equiv \int_{x_1}^{x_0} T_i(2x - 1) T_j(2x - 1) dx, \\ b_j &\equiv \int_{x_1}^{x_0} T_j(2x - 1) dx = \mathcal{A}_{j,0}. \end{cases} \quad (27)$$

定積分 $\mathcal{A}_{i,j}$ の計算

$y = 2x - 1$ から $y_1 \equiv 2x_1 - 1 = 1 + 2 \frac{\mu - 1}{\sigma + 1}$, $y_0 \equiv 2x_0 - 1 = 1 + 2 \frac{\mu}{\sigma}$ とおき、公式 $T_i(y) T_j(y) = \frac{1}{2} \{T_{i+j}(y) + T_{|i-j|}(y)\}$ を用いると

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{i,j} &= \frac{1}{2} \int_{y_1}^{y_0} T_i(y) T_j(y) dy \\ &= \frac{1}{4} \int_{y_1}^{y_0} \{T_{i+j}(y) + T_{|i-j|}(y)\} dy \\ &= \frac{1}{8} (K_{i+j} + K_{|i-j|}). \end{aligned} \quad (28)$$

定積分 K_ℓ の計算法

$K_\ell \equiv 2 \int_{y_1}^{y_0} T_\ell(y) dy$ ($\ell \geq 0$) に対応する不定積分は、

$$2 \int T_\ell(y) dy = \begin{cases} 2y & \text{case } \ell = 0, \\ \frac{1}{2} T_2(y) & \text{case } \ell = 1, \\ \frac{1}{\ell+1} T_{\ell+1}(y) - \frac{1}{\ell-1} T_{\ell-1}(y) & \text{case } \ell \geq 2. \end{cases} \quad (29)$$

よって定積分 K_ℓ ($\ell \geq 0$) は、

$$K_\ell = \begin{cases} 2(y_0 - y_1) & \text{case } \ell = 0, \\ y_0^2 - y_1^2 & \text{case } \ell = 1, \\ \frac{1}{\ell+1} \{T_{\ell+1}(y_0) - T_{\ell+1}(y_1)\} \\ - \frac{1}{\ell-1} \{T_{\ell-1}(y_0) - T_{\ell-1}(y_1)\} & \text{case } \ell \geq 2. \end{cases} \quad (30)$$

上記の方法で $\mathcal{A}_{i,j}$ と b_j の計算をすると、

$$\begin{cases} J_{\text{stop}} &\equiv \frac{1}{2} \left(2c_0^2 + \sum_{j=1}^n c_j^2 \right), \\ J_{\text{pass}} &\equiv \sum_{i,j=0}^n \mathcal{A}_{i,j} c_i c_j - 2 \sum_{j=0}^n b_j c_j + \text{Const}, \end{cases} \quad (31)$$

となる。

そこで、阻止域に対する制約条件 $2J_{stop} = \varepsilon^2$ を与えて、通過域に対する値 J_{pass} を最小にするときの係数のベクトル $\mathbf{c} = [c_0, c_1, \dots, c_n]$ を決める。それにはラグランジュの未定乗数法を用いる。

8.2.1 制約条件付き最小化

まず便利のために、 J_{stop} が変数の二乗和になるように上記のベクトル $\mathbf{c}$ の第 0 要素である c_0 だけをスケール変換したものを $\mathbf{c}'$ とする。それに対応して行列 $\mathcal{A}$ の第 0 行および第 0 列だけをスケール変換したものを $\mathcal{A}'$ とし、ベクトル $\mathbf{b}$ の第 0 要素 b_0 をスケール変換したものを $\mathbf{b}'$ とする。それはいま $n+1$ 次の対角行列を $\Delta \equiv \text{diag}(\sqrt{2}, 1, 1, \dots, 1)$ として、それを用いて $\mathbf{c}' \equiv \Delta \mathbf{c}$, $\mathcal{A}' \equiv \Delta^{-1} \mathcal{A} \Delta^{-1}$, $\mathbf{b}' \equiv \Delta^{-1} \mathbf{b}$ と書ける。それにより

$$\begin{cases} J_{stop} &= \frac{1}{2} \mathbf{c}'^T \mathbf{c}', \\ J_{pass} &= \mathbf{c}'^T \mathcal{A}' \mathbf{c}' - 2\mathbf{b}'^T \mathbf{c}' + \text{Const}, \end{cases} \quad (32)$$

となる。これに対して制約付き最小化のラグランジュの未定乗数法による目的関数を

$$\mathcal{L}(\mathbf{c}', \eta) \equiv \frac{1}{2} \mathbf{c}'^T \mathcal{A}' \mathbf{c}' - \mathbf{b}'^T \mathbf{c}' + \eta \frac{1}{2} (\mathbf{c}'^T \mathbf{c}' - \varepsilon^2) \quad (33)$$

とすると、その最小化条件は：

$$\begin{cases} (\mathcal{A}' + \eta I) \mathbf{c}' = \mathbf{b}', \\ \mathbf{c}'^T \mathbf{c}' = \varepsilon^2, \end{cases} \quad (34)$$

となる。すると、 η を未知数として $\mathbf{c}'$ を表わせば、

$$\mathbf{c}' = (\mathcal{A}' + \eta I)^{-1} \mathbf{b}' \quad (35)$$

であるから、それを制約条件の式 $\mathbf{c}'^T \mathbf{c}' = \varepsilon^2$ に代入すれば、 η だけについての以下の方程式：

$$\mathbf{b}'^T (\mathcal{A}' + \eta I)^{-2} \mathbf{b}' = \varepsilon^2, \quad (36)$$

が得られる。この方程式の解 η の値を用いて $\mathbf{c}'$ を

$$\mathbf{c}' \leftarrow (\mathcal{A}' + \eta I)^{-1} \mathbf{b}' \quad (37)$$

として計算する。このようにして得られた $\mathbf{c}'$ の最初の要素を $\mathbf{c} \leftarrow \Delta^{-1} \mathbf{c}'$ によりスケール変更して $\mathbf{c}$ を作る。

8.2.2 固有値分解を利用した η の解法

まず実対称正定値行列 $\mathcal{A}'$ の固有値分解 $\mathcal{A}' \rightarrow U D U^T$, $U^T U = I$ を行う。そうして $\beta \equiv U^T \mathbf{b}'$ とおくと、 η を決めるための方程式 (36) は：

$$\varepsilon^2 = \mathbf{b}'^T U (D + \eta I)^{-2} U^T \mathbf{b}' = \beta^T (D + \eta I)^{-2} \beta \quad (38)$$

となる。この関係をベクトルの成分を用いて書き表わせば：

$$\sum_{j=0}^n \left(\frac{\beta_j}{d_j + \eta} \right)^2 - \varepsilon^2 = 0 \quad (39)$$

となる。この等式 (39) の左辺を $h(\eta)$ と書けば、対角行列 D

は数学的には正値なので、 $\eta > 0$ において関数 $h(\eta)$ は連続で狭義単調減少であり、 $\eta \rightarrow \infty$ のとき $h(\eta)$ は負の値 $-\varepsilon^2$ に近づく。すると $\eta = 0$ のときの値 $h(0) \equiv \sum_{j=0}^n (\beta_j/d_j)^2 - \varepsilon^2$ が正であれば、方程式 $h(\eta) = 0$ には唯一の正の根 η が必ず存在する。(なお実際には数値誤差の影響で D の対角要素 d_j に負の値が現れたらすべて零に置き換えることにする。その場合は $\eta = 0$ は $h(\eta)$ の極になるが、それでも $h(\eta)$ は $\eta > 0$ で連続で狭義単調減少であり、 $\eta \rightarrow 0+$ のとき $h(\eta) \rightarrow +\infty$ であるから、やはり $h(\eta) = 0$ には唯一の正の根 η が必ず存在する。) すると非線形方程式 $h(\eta) = 0$ に対してたとえば二分法を用いることにより唯一の正根 η を必ず求めることができ、それにより式 (37) から

$$\mathbf{c}' = (\mathcal{A}' + \eta I)^{-1} \mathbf{b}' = U (D + \eta I)^{-1} U^T \mathbf{b}' = U (D + \eta I)^{-1} \beta \quad (40)$$

とすることでベクトル $\mathbf{c}'$ が求まる。その $\mathbf{c}'$ から第 0 要素だけのスケール変更 $\mathbf{c} \leftarrow \Delta^{-1} \mathbf{c}'$ を行えばチェビシェフ展開の係数 $\mathbf{c}$ が得られる。

8.2.3 チェビシェフ展開の低次項を省略する近似法

チェビシェフ展開に含まれる各項の基底多項式 T_k のうちで、通過域付近 ($1 < x$) では高次側のものが相対的に値が大きくて影響が支配的となる。そこで、展開係数を並べたベクトル $\mathbf{c}$ の要素のうちで、高次側の s 個 ($s \leq n$) の係数 $c_{n-s+1}, \dots, c_n$ の自由度だけを残して、それ以外の低次側の係数 $c_0, c_1, \dots, c_{n-s}$ は零にする「近似」を導入してみる。そうしてここでは零に制限しない高次側 s 個の係数を集めた s 次のベクトルを $\mathbf{c}' = \{c_{n-s+1}, \dots, c_n\}$ と表わし、またそれと対応するように $\mathcal{A}$ の行と列の添字の番号がどちらも $n-s+1$ 以上の部分の要素だけを並べた s 次の行列を $\mathcal{A}'$ とし、さらに同様に s 次のベクトル $\mathbf{b}' = \{b_{n-s+1}, \dots, b_n\}$ も作る。するとラグランジュの未定乗数法による制約付き最小化のための目的関数の式は、

$$\mathcal{L}(\mathbf{c}', \eta') \equiv \frac{1}{2} \mathbf{c}'^T \mathcal{A}' \mathbf{c}' - \mathbf{b}'^T \mathbf{c}' + \eta' \frac{1}{2} (\mathbf{c}'^T \mathbf{c}' - \varepsilon^2) \quad (41)$$

となるので、その最小化条件は前と同様に

$$\begin{cases} (\mathcal{A}' + \eta' I) \mathbf{c}' = \mathbf{b}', \\ \mathbf{c}'^T \mathbf{c}' = \varepsilon^2. \end{cases} \quad (42)$$

となる。すると、これもまた同様に η' を正の未知数として

$$\mathbf{c}' = (\mathcal{A}' + \eta' I)^{-1} \mathbf{b}' \quad (43)$$

と書けるので、それを $\mathbf{c}'^T \mathbf{c}' = \varepsilon^2$ に代入すると、単独の変数 η' に対する以下の方程式が得られる：

$$\mathbf{b}'^T (\mathcal{A}' + \eta' I)^{-2} \mathbf{b}' = \varepsilon^2. \quad (44)$$

この非線形方程式を解いて唯一の正の解 η' を得たら、それを用いて

$$\mathbf{c}' \leftarrow (\mathcal{A}' + \eta' I)^{-1} \mathbf{b}' \quad (45)$$

により $\mathbf{c}'$ を計算する。前と同様に η' や $\mathbf{c}'$ を求める実際の計算には、実対称行列 $\mathcal{A}'$ の固有値分解が利用できる。

9. チェビシェフ展開形による下端固有対用フィルタの伝達関数

上述の方法で構成されたフィルタが期待どおりに働くかどうかについては、実際に試してみる必要があると思われる。なぜならば、通過域において伝達率の最大最小比が低減できていても、それは加減算による数値相殺により実現されているので、フィルタで濾過して得られたベクトルは桁落ちにより有効精度が低下して、その結果として固有値が通過域にある求めたい固有ベクトルの近似精度も低下している可能性があるからである。

以下のグラフで、その懸念について見ていく。

- 図 7 は、 $n=30$, $\mu=2.0$, $\sigma=3.0$, $\epsilon=10^{-13}$ としてチェビシェフ展開の係数を最小二乗法に類似の方法で決めて構成した伝達関数 (その 1) の大きさのグラフである。 $g_p=9.2 \times 10^{-4}$, $g_s=1.4 \times 10^{-13}$ となった。
- 図 8 は、 $n=30$, $\mu=1.5$, $\sigma=3.0$, $\epsilon=10^{-12}$ としてチェビシェフ展開の係数を最小二乗法に類似の方法で決めて構成した伝達関数 (その 2) の大きさのグラフである。 $g_p=2.9 \times 10^{-5}$, $g_s=1.9 \times 10^{-12}$ となった。
- 図 9 は、 $n=40$, $\mu=1.25$, $\sigma=1.5$, $\epsilon=10^{-14}$ としてチェビシェフ展開の係数を最小二乗法に類似の方法で決めて構成した伝達関数 (その 3) の大きさのグラフである。 $g_p=3.4 \times 10^{-7}$, $g_s=1.5 \times 10^{-14}$ となった。

これらをみると、いずれも通過域で伝達関数の値は頂上付近で増加が抑制され振動していて、通過域での伝達率の最大最小比が低減できていることが分かる。しかしながら、 $g(t)$ の式計算の中では各項の数値は丸めを行いながら加算がされていることを思い出す必要がある。たとえば $g(t) = \sum_{k=0}^n c_k T_k(2x-1)$ の計算で、横軸 t の値に対して、チェビシェフ多項式の三項漸化式を利用して項の番号 k を 0 から n まで上げながら係数 c_k を乗じて和をとりながら計算していくときに、その途中で部分和の値が達成した絶対値最大の値をグラフに青線でプロットしたものを書き添えると、以下ようになる

- 図 10 は図 7 に部分和がとった最大の絶対値のグラフを書き加えたものである。
- 図 11 は図 8 に部分和がとった最大の絶対値のグラフを書き加えたものである。
- 図 12 は図 9 に部分和がとった最大の絶対値のグラフを書き加えたものである。

10. まとめ

実対称定値一般固有値問題の固有対のうちで固有値が区間 $[a, b]$ (但し a は最小固有値以下とする) にある下端固有対をフィルタ対角化法で求める方法について考察した。それに用いるフィルタを、シフトが実数である一つのレゾルベントの多項式で構成する方法について考察を行った。

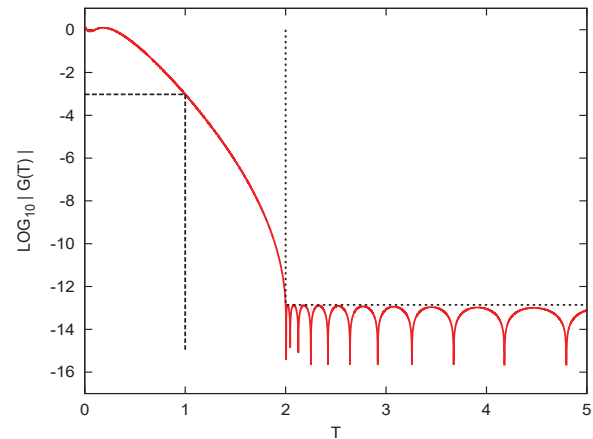


図 7 最小二乗法に類似の方法による伝達関数 (その 1): $|g(t)|$ ($n=30$, $\mu=2.0$, $\sigma=3.0$, $\epsilon=10^{-13}$) $g_p=9.2 \times 10^{-4}$, $g_s=1.4 \times 10^{-13}$

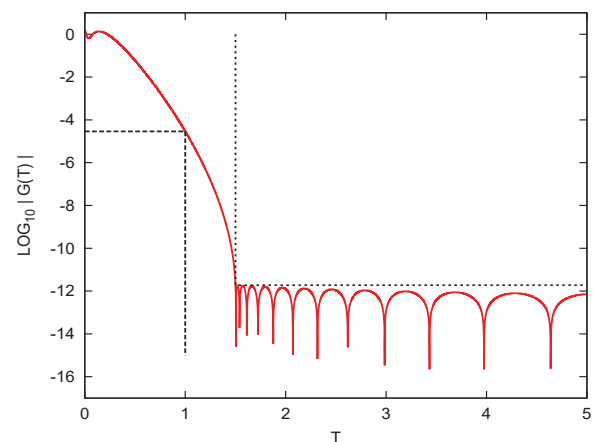


図 8 最小二乗法に類似の方法による伝達関数 (その 2): $|g(t)|$ ($n=30$, $\mu=1.5$, $\sigma=3.0$, $\epsilon=10^{-12}$) $g_p=2.9 \times 10^{-5}$, $g_s=1.9 \times 10^{-12}$

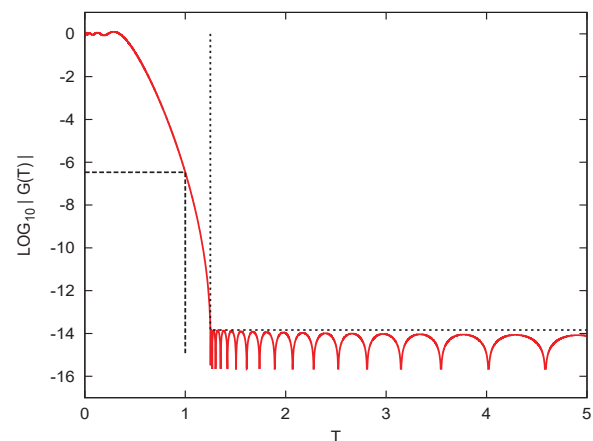


図 9 最小二乗法に類似の方法による伝達関数 (その 3): $|g(t)|$ ($n=40$, $\mu=1.25$, $\sigma=1.5$, $\epsilon=10^{-14}$) $g_p=3.4 \times 10^{-7}$, $g_s=1.5 \times 10^{-14}$

最小固有値より小さい実数をシフトとして用いるので、レゾルベントの作用を実現する連立一次方程式の行列は実対称正定値となる。その連立一次方程式を行列分解を利用して解く場合には、分解結果を保持できるのであれば、分解を最初に一度だけ行えば後はそれを再利用することにより係数が同じ連立一次方程式を素早く解くことができる。

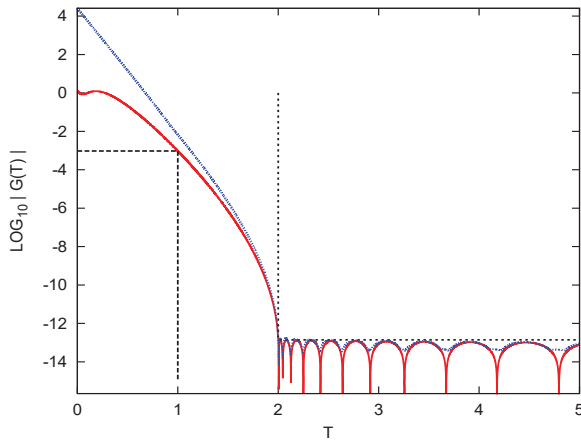


図 10 最小二乗法に類似の方法による伝達関数 (その 1):
 $|g(t)|$ ($n=30$, $\mu=2.0$, $\sigma=3.0$, $\epsilon=10^{-13}$) $g_p=9.2 \times 10^{-4}$,
 $g_s=1.4 \times 10^{-13}$

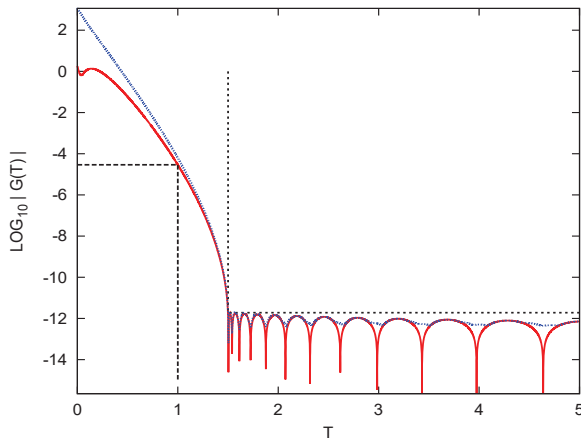


図 11 最小二乗法に類似の方法による伝達関数 (その 2):
 $|g(t)|$ ($n=30$, $\mu=1.5$, $\sigma=3.0$, $\epsilon=10^{-12}$) $g_p=2.9 \times 10^{-5}$,
 $g_s=1.9 \times 10^{-12}$

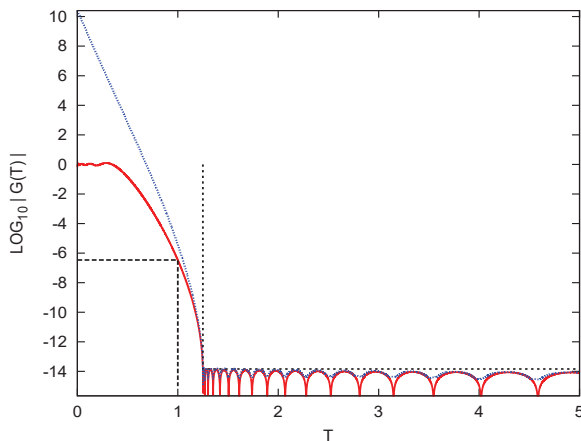


図 12 最小二乗法に類似の方法による伝達関数 (その 3):
 $|g(t)|$ ($n=40$, $\mu=1.25$, $\sigma=1.5$, $\epsilon=10^{-14}$) $g_p=3.4 \times 10^{-7}$,
 $g_s=1.5 \times 10^{-14}$

そのため、レゾルベントの多項式の作用の計算の中でレゾルベントの作用を多項式の次数と同じ回数だけ適用する際に好都合である。用いるレゾルベントが一つだけなので、実対称正定値行列を一つ対称分解するだけで良く、レゾル

ベントを複数用いる場合に比べて行列分解に費やす計算量が少ないことが利点である。

レゾルベントのチェビシェフ多項式として構成されたフィルタは、極めて簡単な式を用いて設計を行なえる。しかし得られるフィルタの伝達特性は、通過域での伝達率の最大最小比が大きいのので、得られる近似固有対の精度は均一にはならない。レゾルベントのチェビシェフ多項式で構成されたフィルタは、それを用いた対角化がある程度うまく働くことは実際に使用してみて確認してある。

今回は、レゾルベントのチェビシェフ多項式であるフィルタからの改良への一つの方向として、異なる次数のチェビシェフ多項式 (ただし引数は共通) の線形和への一般化、すなわちチェビシェフ展開形を採用する場合の設計の方法を検討した。チェビシェフ多項式からチェビシェフ展開へ拡張することで増した自由度を用いて、通過域に於ける伝達率の最大最小比を減らすことを狙ったものである。

なお (紙数の制約から) 付録に記述を回すが、実対称定値一般固有値問題の固有対で固有値の範囲が固有値分布の端ではなくて一般的な位置にある「中間固有対」はフィルタにシフトが虚数のレゾルベント (の虚部) の多項式を用いることにより同様の方法で求められる。それには上記中で $x \equiv \frac{\mu+\sigma}{t+\sigma}$ としている箇所を $x \equiv \frac{\mu^2+\sigma^2}{t^2+\sigma^2}$ に置き換えて、フィルタの伝達関数を x の実多項式として扱えばよい。そうすると (付録の記述のように) 中間固有対用のフィルタの伝達特性の調整や設計は、下端固有対用のものとはほぼ同様の方針でできる。そのように設計された伝達関数から構成されるフィルタは、「シフトが虚数のレゾルベントの虚部」の実多項式になる。実多項式としてチェビシェフ多項式を用いたフィルタは、それを実際に対角化に使用してある程度うまく働くことを確認してある。また (上記までと同様に) 多項式をチェビシェフ多項式から拡張してチェビシェフ展開形にすれば、通過域での伝達率の最大最小の比が低減できる。しかしその低減した効果がはたして数値計算として実際に有効であるのかについては、今後実際に実験を行なって確かめてみる必要がある。

付 録

A.1 付録：中間固有対を求める場合のフィルタ

いま行列 A, B は実対称で、 B は正定値の実対称定値一般固有値問題を $A\mathbf{v} = \lambda B\mathbf{v}$ とする。この問題の固有対で固有値が固有値分布の端ではなくて任意の区間 $[a, b]$ にあるもの（中間固有対）をフィルタ対角化法を用いて解くことにする。この場合には、シフト ρ を虚数にとることでレゾルベント $R(\rho) = (A - \rho B)^{-1}B$ が有界作用素となることを保証する。そうして、対角化に用いるフィルタをレゾルベント $R(\rho)$ を用いて構成する。フィルタは実作用素（実ベクトルから実ベクトルへの作用素）となるようにする。レゾルベントの次数が与えられた多項式をフィルタとする場合は、シフトの位置と多項式の係数をうまく決めてフィルタの伝達特性が望ましいものとなるように設計する。

伝達関数をチェビシェフ多項式を用いて表される形にすると阻止域での強い減衰特性を容易に実現できるので設計が簡単になる。ただし通過域での伝達率の最大最小比はあまり小さくできない。

A.1.1 中間固有対用のフィルタ作用素と伝達関数

指定された区間 $[a, b]$ に固有値 λ をもつ固有対を求める場合に、固有値の座標 λ に対してその正規化座標 t を $\lambda \in [a, b]$ から $t \in [-1, 1]$ への 1 次変換 $\lambda = \frac{a+b}{2} + \left(\frac{b-a}{2}\right)t$ を用いて定義する。そうして正規化座標 t を引数とする伝達関数を $g(t) \equiv f(\lambda)$ で定義し、ある実数 $\mu > 1$ により、 $t \in [-1, 1]$ は通過域、 $|t| \in [\mu, \infty)$ は阻止域、その中間の $|t| \in (1, \mu)$ は遷移域とする。伝達関数 $g(t)$ に対して課す制約条件は、1) 最大値が 1 であること、2) 通過域に於ける最小値は g_p で、逆に $g(t) \geq g_p$ となるのは通過域に限られること、3) さらに阻止域に於ける $|g(t)|$ の上限値が g_s であること、とする。レゾルベントのシフト ρ に虚数を用いる場合は、特別な理由がなければ $g(t)$ を偶関数にすると便利なので、(互いに複素共役である) $g(t)$ の極を純虚数にする。

伝達関数の形状を与える三つのパラメタ μ, g_s, g_p については（下端固有対用の場合と同様に）：

- 遷移域と通過域の幅の形状比である 1 より大きい μ の値は、1 に近いことが望ましい。 μ が大きければ遷移域が広くなり、遷移域に多くの固有値が入る可能性が増す。固有値が遷移域にある固有対の数が増すと、フィルタで濾過するベクトルの数をそれだけ多くする必要が生じる。
- 阻止域に於ける伝達率の大きさの上限 g_s は極めて小さい正数であることが望ましい。 g_s が微小でなければ、固有値が阻止域にある不要な固有ベクトルが十分に減衰を受けずにフィルタで濾過された結果に混入して、

それから張られる不変部分空間の近似を悪くする。

- 通過域での伝達率の最大最小比の逆数 g_p の値は 1 以下の正数であるが、1 に近いことが望ましい。 g_p の値が小さいと計算で求めた（固有値が通過域にある）近似対の精度はそれだけ不均一になる可能性がある。

ただし、これら形状パラメタ μ, g_s, g_p の値の改善への要求は互いに相反するので、つりあいを考えて調整することになる。最良の特性を持つフィルタの設計は、次数 n を固定した場合には虚数のシフト ρ の値とフィルタを与える多項式の係数値の最適化問題となり、結果は数値だけで得られて、困難でありまた見通しも悪い。そこで以下ではまず、チェビシェフ多項式の性質を利用した簡易な設計法を示す。これは $g(t)$ の関数形を一つのチェビシェフ多項式で表わされるものに制限する。関数の選択の範囲を狭めているので、得られる伝達関数の形状は最良ではないが、制約条件を指定した場合の伝達関数 $g(t)$ を簡単な式計算で決定できる利点がある。

A.1.2 チェビシェフ多項式で表わされた伝達関数の設計

いま通過域は $t \in [-1, 1]$ 、阻止域は $|t| \in [\mu, \infty)$ とし、 σ を正の実数パラメタとして、伝達関数の関数形を一つの n 次チェビシェフ多項式で表わされた以下の形に制限する。

$$g(t) = g_s T_n(y), \quad y = 2x - 1, \quad x = \frac{\mu^2 + \sigma^2}{t^2 + \sigma^2}. \quad (\text{A.1})$$

阻止域の全体に対応してチェビシェフ多項式の引数である y は $(-1, 1]$ の全域を動く。この関数は t の $2n$ 次の実有理関数で、偶関数である。複素共役な純虚数 $t = \pm \sigma \sqrt{-1}$ を極に持ち、それぞれ n 位の極である。チェビシェフ多項式の性質から、阻止域 $|t| \geq \mu$ における制約条件 $|g(t)| \leq g_s$ は最初から満たされており、阻止域の外部の $t \in [0, \mu)$ では単調減少である。すると残りの二つの制約条件 $g(0) = 1$ と $g(1) = g_p$ はそれぞれ、

$$\frac{1}{g_s} = T_n \left(1 + 2 \frac{\mu^2}{\sigma^2} \right), \quad \frac{g_p}{g_s} = T_n \left(1 + 2 \frac{\mu^2 - 1}{\sigma^2 + 1} \right) \quad (\text{A.2})$$

となる。またこれらを逆双曲線関数を用いて表わせば以下のようになる（公式 $\cosh^{-1}(1 + 2x^2) = 2 \sinh^{-1}|x|$ も用いている）。

$$\begin{cases} \cosh^{-1} \frac{1}{g_s} = 2n \sinh^{-1} \frac{\mu}{\sigma}, \\ \cosh^{-1} \frac{g_p}{g_s} = 2n \sinh^{-1} \sqrt{\frac{\mu^2 - 1}{\sigma^2 + 1}}. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

A.1.2.1 三つ組として n, μ, σ の値を指定する場合

いま三つ組 n, μ, σ の値を指定する場合は、以下のチェビシェフ多項式あるいは（逆）双曲線関数で表わされた二つの関係式の右辺の値をそれぞれ計算すれば、ただちに g_s と g_p の値が求まる。

$$\begin{cases} \frac{1}{g_s} \leftarrow T_n \left(1 + 2 \frac{\mu^2}{\sigma^2} \right) = \cosh \left(2n \sinh^{-1} \frac{\mu}{\sigma} \right), \\ \frac{g_p}{g_s} \leftarrow T_n \left(1 + 2 \frac{\mu^2 - 1}{\sigma^2 + 1} \right) = \cosh \left(2n \sinh^{-1} \sqrt{\frac{\mu^2 - 1}{\sigma^2 + 1}} \right) \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

求めた特性値 g_s と g_p が望ましくなければ、三つ組 n, μ, σ の値を変えて再度試行する。

A.1.2.2 三つ組として g_p, g_s, μ の値を指定する場合

三つ組として三つの形状パラメタである g_p, g_s, μ の値 (ただし $1 > g_p \gg g_s > 0, \mu > 1$) を指定して、それから σ と n の値を決定する場合を考える。上述した二つの制約条件の式から、 n の値を表わす二通りの式が得られる。

$$n = \frac{\cosh^{-1} \frac{1}{g_s}}{2 \sinh^{-1} \frac{\mu}{\sigma}}, \quad n = \frac{\cosh^{-1} \frac{g_p}{g_s}}{2 \sinh^{-1} \sqrt{\frac{\mu^2 - 1}{\sigma^2 + 1}}}. \quad (\text{A.5})$$

これら n を表わす二通りの式を等しいとおくと、正の実数 σ についての非線形方程式 $G(\sigma) = r$ が得られる。この方程式の左辺と右辺は具体的には以下のものである。

$$G(\sigma) = \frac{\sinh^{-1} \sqrt{\frac{\mu^2 - 1}{\sigma^2 + 1}}}{\sinh^{-1} \frac{\mu}{\sigma}}, \quad r = \frac{\cosh^{-1} \frac{g_p}{g_s}}{\cosh^{-1} \frac{1}{g_s}}. \quad (\text{A.6})$$

非線形方程式 $G(\sigma) = r$ はたとえば二分法を用いて解く。もしも方程式に正の実数解 σ が存在しない場合は、与えられた三つ組の実現が不可能であることを意味する。方程式を解いて σ の値が得られれば、それを用いて次数 n を表わす二通りの式の値を計算すれば一致するが、その n の値は一般には整数ではなく矛盾を生じる。そこで、計算で求めた実数値を切り捨てて整数化した値を n として設定する。この整数 n の値、最初に与えられた μ の値、先ほど求めた σ の値の三つ組 n, μ, σ から式を計算して g_s と g_p の数値を求めて、最初に指定した g_s と g_p の値を修正する。そうしてあたかもそれらの修正後の g_s と g_p の値が最初から指定されていたことにすれば、矛盾は解消する。このように変更を行なった値が、作成したいフィルタの特性値として適切ではない場合は、最初に指定する g_s と g_p の片方あるいは両方の値を変えて再度試行するか、もしくは μ の値を変えて試行する。

A.1.3 伝達関数に対応するフィルタの構成法

一つのチェビシェフ多項式を用いて表わされた $g(t)$ を伝達関数に持つフィルタ $\mathcal{F}$ を、レゾルベントを用いて構成する方法を示す。まず σ と固有値の正規化座標 t は共に実数であるとして

$$\frac{1}{t^2 + \sigma^2} = \frac{1}{\sigma} \operatorname{Im} \frac{1}{t - \sigma\sqrt{-1}} \quad (\text{A.7})$$

である。ここで Im は虚部をとる操作を表わす。さらに正

規化座標 t と固有値の座標 λ の間の関係 $t = \frac{2}{b-a}(\lambda - a) - 1$ を用いれば、 $\rho \equiv \frac{a+b}{2} + \left(\frac{b-a}{2}\right)\sigma\sqrt{-1}$ において、

$$\frac{1}{t - \sigma\sqrt{-1}} = \left(\frac{b-a}{2}\right) \frac{1}{\lambda - \rho} \quad (\text{A.8})$$

である。さらに表記の簡単化のために、

$$\ell \equiv \frac{\mu^2 + \sigma^2}{\sigma} \left(\frac{b-a}{2}\right) \quad (\text{A.9})$$

とおく。すると t を用いて表わされているチェビシェフ多項式の引数の式を λ を用いて表わせば

$$2 \frac{\mu^2 + \sigma^2}{t^2 + \sigma^2} - 1 = 2\ell \operatorname{Im} \frac{1}{\lambda - \rho} - 1 \quad (\text{A.10})$$

となる。これに対応する作用素は $2\ell \operatorname{Im} \mathcal{R}(\rho) - I$ であるから、伝達関数：

$$\begin{cases} g(t) = g_s T_n \left(2 \frac{\mu^2 + \sigma^2}{t^2 + \sigma^2} - 1 \right), \\ f(\lambda) = g_s T_n \left(2\ell \operatorname{Im} \frac{1}{\lambda - \rho} - 1 \right) \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

と対応するフィルタは $\mathcal{F} = g_s T_n (2\ell \operatorname{Im} \mathcal{R}(\rho) - I)$ であることがわかる。ここで $\mathcal{R}(\rho)$ はシフトが虚数 ρ のレゾルベントであり、 I は恒等作用素を表わす。

A.1.4 中間固有対用のフィルタの作用を与える算法

上述のように構成された伝達関数を持つ中間固有対用のフィルタ $\mathcal{F}$ を、与えられた実の N 次列ベクトルを m 個並べた組 X ($N \times m$ 実行列) に作用させて、別の実の N 次列ベクトルを m 個並べた組 Y (これも $N \times m$ 実行列) を作る処理 $Y \leftarrow \mathcal{F} X$ の算法は、たとえば図 A-1 のようにすれば実現できる。ただし V, W はそれぞれ作業用の実の列ベクトルの組 ($N \times m$ 実行列) で、 Z は作業用の複素列ベクトルの組 ($N \times m$ 複素実行列) である。またレゾルベント $\mathcal{R}(\rho)$ を作用させる処理 $Z \leftarrow \mathcal{R}(\rho) W$ は実際には与えられたベクトルの組 W からまず右辺ベクトルの組 BW を作り、次に行列 $C \equiv A - \rho B$ を係数とする連立一次方程式の組 $CZ = BW$ を Z について解くことで実現する。行列 A, B が実対称でシフト ρ は複素数なので C は複素対称行列 ($C^T = C$) である。さらに、もしも A, B が帯行列の場合は C も帯行列となり、連立一次方程式は複素版の帯行列用の修正コレスキ法を用いて能率よく解ける (ピボット選択をしない場合に精度の面で支障がないか、については今後の検討を要する)。連立一次方程式の右辺の組 BW は実であるが、係数行列 C や解の組 Z は複素である。 n 次の多項式を用いたフィルタの実現には、行列 C を係数とする連立一次方程式の組を解く処理が全部で n 回含まれているが、行列分解を用いて連立一次方程式を解く場合には、 C の行列分解を最初に一度だけ行なってその結果を保持しておけば、その後は分解計算を新たに行わずに少ない演算量で連立一次方程式の組を解くことができる。

```

 $\rho \leftarrow \frac{a+b}{2} + \left(\frac{b-a}{2}\right) \sigma \sqrt{-1};$ 
 $\ell \leftarrow \frac{\mu^2 + \sigma^2}{\sigma} \left(\frac{b-a}{2}\right);$ 
 $Z \leftarrow \mathcal{R}(\rho) X;$ 
 $V \leftarrow X;$ 
 $W \leftarrow 2\ell \operatorname{Im} Z - X;$ 
for  $k := 2$  to  $n$  do begin
     $Z \leftarrow \mathcal{R}(\rho) W;$ 
     $Y \leftarrow 4\ell \operatorname{Im} Z - 2W - V;$ 
     $V \leftarrow W;$ 
     $W \leftarrow Y$ 
end;
 $Y \leftarrow g_s Y$ 

```

図 A.1 中間固有値用フィルタの作用 $Y \leftarrow \mathcal{F} X$ の算法

A.1.5 チェビシエフ多項式で表わされた伝達関数の例

チェビシエフ多項式で表わされる形の伝達関数 $g(t)$ を実際にパラメータを指定して設計し構成した例をいくつか示す。通過域は $t \in [-1, 1]$ で、阻止域は $|t| \in [\mu, \infty)$ である。伝達関数の極の位置は純虚数 $t = \pm \sigma \sqrt{-1}$ である。各図のグラフでは伝達率の大きさ $|g(t)|$ の対数値を赤い曲線で、 t の偶関数であるから右半分 $t \geq 0$ だけをプロットした。黒い補助線は、通過域の端 $t = 1$ とそのときの伝達率の値 g_p 、それと阻止域の端 $t = \mu$ とそのときの伝達率の値 g_s を示している。

3 組として n, μ, σ の値を指定して伝達関数を設計した例を表 A.1 に示す。また、三つ組として g_p, g_s, μ を指定する場合の例を表 A.2 に示す（これはまず方程式を解いて σ を得て、次に n を表わす式を用いて求めた値を切り捨てて整数 n とし、そうして n, μ, σ の値から最初に指定された g_p, g_s の値を修正する）。

表 A.1 三つ組として n, μ, σ を指定した場合の伝達関数の設計例

n	μ	σ	g_p	g_s	グラフ
10	2.0	1.0	2.64×10^{-4}	5.78×10^{-13}	図 A.2
15	2.0	1.5	6.38×10^{-4}	9.71×10^{-15}	図 A.3
20	1.5	1.5	7.41×10^{-6}	9.77×10^{-16}	図 A.4
20	1.5	2.0	2.08×10^{-4}	1.82×10^{-12}	図 A.5
30	1.5	3.0	3.10×10^{-4}	5.78×10^{-13}	図 A.6

表 A.2 三つ組として g_p, g_s, μ を指定した場合の伝達関数の設計例

g_p	g_s	μ	σ	n	修正後 g_p	修正後 g_s	グラフ
10^{-4}	3×10^{-13}	1.5	1.87	20	1.03×10^{-4}	3.32×10^{-13}	図 A.7
10^{-2}	3×10^{-13}	2.0	4.06	32	1.04×10^{-2}	1.32×10^{-13}	図 A.8

A.1.6 チェビシエフ展開形への拡張

伝達関数を n 次のチェビシエフ多項式で表わせるものから n 次以下のチェビシエフ多項式の和であるチェビシエフ展開形

$$g(t) \equiv \sum_{k=0}^n c_k T_k(2x-1) \quad (\text{A.12})$$

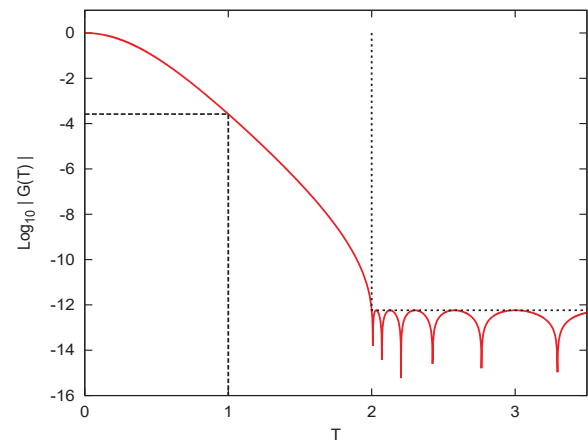


図 A.2 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ ($n=10, \mu=2.0, \sigma=1.0$)
 $g_p=2.64 \times 10^{-4}, g_s=5.78 \times 10^{-13}$

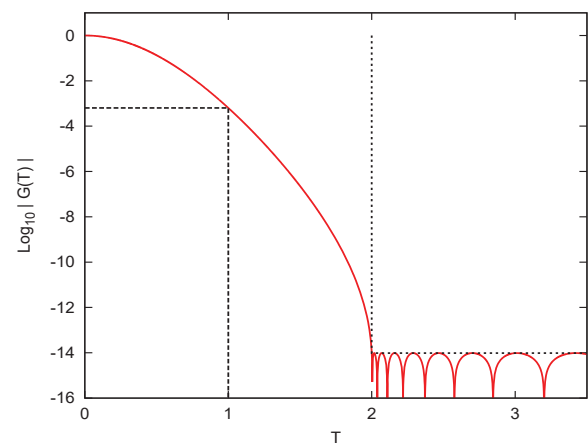


図 A.3 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ ($n=15, \mu=2.0, \sigma=1.5$)
 $g_p=6.38 \times 10^{-4}, g_s=9.71 \times 10^{-15}$

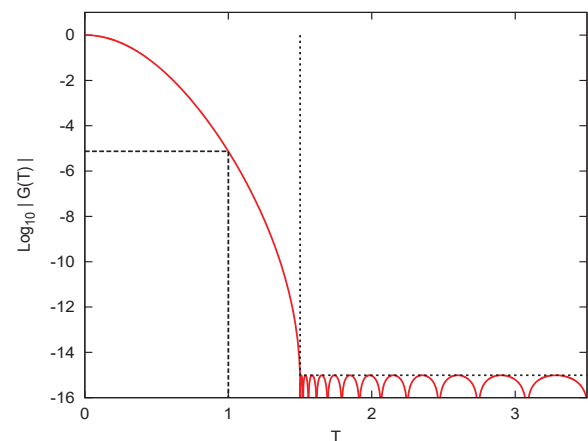


図 A.4 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ ($n=20, \mu=1.5, \sigma=1.5$)
 $g_p=7.41 \times 10^{-6}, g_s=9.77 \times 10^{-16}$

にする。（下端固有対の場合と同様に）展開の係数 c_k は最小二乗法に類似の方法であらかじめ決定しておく。使用するレゾルベントは一つだけで、フィルタ $\mathcal{F}$ のベクトル $\mathbf{v}$ に対する作用の計算は、 $\rho \equiv \frac{a+b}{2} + \left(\frac{b-a}{2}\right) \sigma \sqrt{-1}$, $\ell \equiv \frac{\mu^2 + \sigma^2}{\sigma} \left(\frac{b-a}{2}\right)$ として、チェビシエフ多項式に対する三項漸化式を用いて $T_k(2\ell \mathcal{R}(\rho) - I) \mathbf{v}$ を k を 0 から n まで

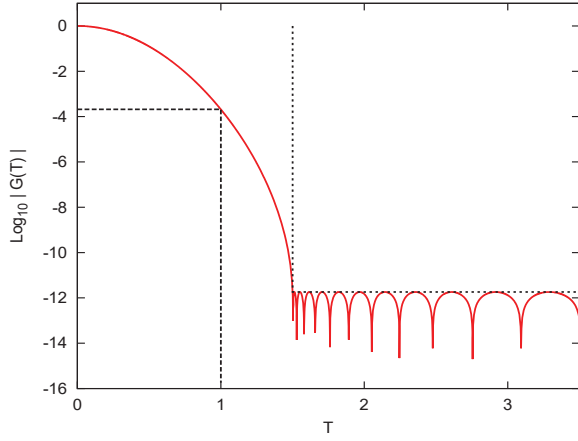


図 A.5 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ ($n=20$, $\mu=1.5$, $\sigma=2.0$)
 $g_p=2.08 \times 10^{-4}$, $g_s=1.82 \times 10^{-12}$

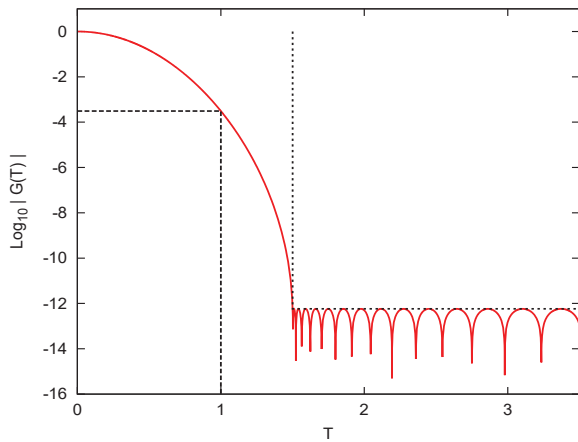


図 A.6 伝達関数の大きさ $|g(t)|$ ($n=30$, $\mu=1.5$, $\sigma=3.0$)
 $g_p=3.10 \times 10^{-4}$, $g_s=5.78 \times 10^{-13}$

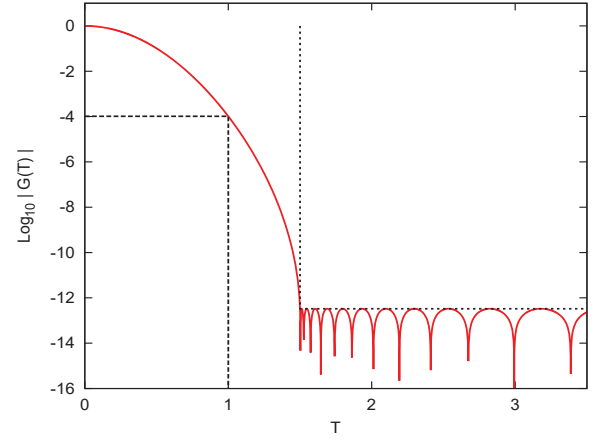


図 A.7 伝達関数の大きさ $|g(t)|$
($g_p=1.03 \times 10^{-4}$, $g_s=3.32 \times 10^{-13}$, $\mu=1.5$)

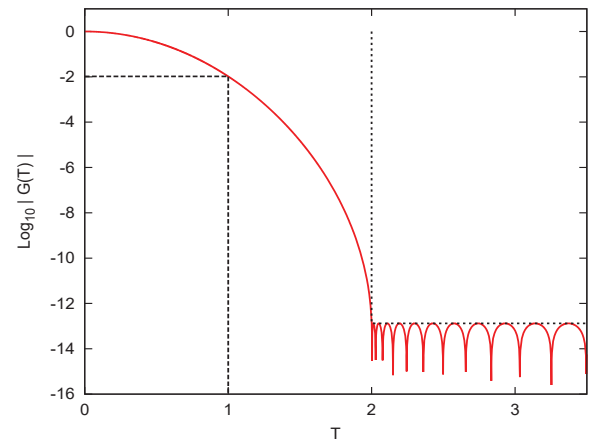


図 A.8 伝達関数の大きさ $|g(t)|$
($g_p=1.04 \times 10^{-2}$, $g_s=1.32 \times 10^{-13}$, $\mu=2.0$)

上昇させて作りながら、そのつどそれに係数 c_k を乗じて累積和を作ることによって実現できる。

A.1.6.1 最小二乗法に類似の方法による最適化

いまの伝達関数 $g(t)$ は $x = (\mu^2 + \sigma^2)/(t^2 + \sigma^2)$ の関数で t の偶関数だから右半分だけを考えれば良い。すると阻止域は $x \in [0, 1]$ に対応し、伝達域は $x \in [x_1, x_0]$ に対応する。ここでは $x_1 \equiv 1 + (\mu^2 - 1)/(\sigma^2 + 1)$, $x_0 \equiv 1 + \mu^2/\sigma^2$ である (さらに $y_1 \equiv 2x_1 - 1$, $y_0 \equiv 2x_0 - 1$ である)。阻止域 $x \in [0, 1]$ に於いて、「伝達関数の 0 からのずれ」の二乗の (重み付きの) 積分は (下端固有対用の場合と同じで)

$$\begin{aligned} J_{\text{stop}} &\equiv \int_0^1 \frac{\{g(t)\}^2}{\sqrt{1 - (2x-1)^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \left(2c_0^2 + \sum_{j=1}^n c_j^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

また、通過域 $x \in [x_1, x_0]$ に於ける「伝達関数の値の 1 からのずれ」の二乗の (重み 1 の) 積分は:

$$\begin{aligned} J_{\text{pass}} &\equiv \int_{x_1}^{x_0} \{1 - g(t)\}^2 dx \\ &= \int_{x_1}^{x_0} \{g(t)\}^2 dx - 2 \int_{x_1}^{x_0} g(t) dx + \text{Const} \\ &= \sum_{i,j=0}^n \mathcal{A}_{i,j} c_i c_j - 2 \sum_{j=0}^n b_j c_j + \text{Const} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

ここで、

$$\begin{cases} \mathcal{A}_{i,j} &\equiv \int_{x_1}^{x_0} T_i(2x-1) T_j(2x-1) dx, \\ b_j &\equiv \int_{x_1}^{x_0} T_j(2x-1) dx = \mathcal{A}_{j,0}. \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

定積分 $\mathcal{A}_{i,j}$ と b_j の定義とその具体的な計算方法は下端固有対の場合と全く同様で、定積分の下限 x_1 と上限 x_0 の値だけが異なる。そうして、阻止域に対する制約条件 $2J_{\text{stop}} = \varepsilon^2$ を与えて、通過域に対する値 J_{pass} を最小にするときの係数のベクトル $\mathbf{c} = [c_0, c_1, \dots, c_n]$ を決める方法も全く同様になる。

A.1.7 チェビシエフ展開形により構成した伝達関数の例

具体的に構成したチェビシエフ展開形を用いた伝達関数の例をいくつか示す。

- 図 A・9 は、 $n=20$, $\mu=2.0$, $\sigma=1.0$, $\epsilon=10^{-12}$ としてチェビシエフ展開の係数を最小二乗法に類似の方法で決めて構成した伝達関数（その 4）の大きさのグラフである。 $g_p=9.8 \times 10^{-2}$, $g_s=1.3 \times 10^{-12}$ となった。
- 図 A・10 は、 $n=25$, $\mu=2.0$, $\sigma=1.5$, $\epsilon=10^{-14}$ としてチェビシエフ展開の係数を最小二乗法に類似の方法で決めて構成した伝達関数（その 5）の大きさのグラフである。 $g_p=1.5 \times 10^{-1}$, $g_s=1.6 \times 10^{-14}$ となった。
- 図 A・11 は、 $n=40$, $\mu=1.5$, $\sigma=1.5$, $\epsilon=10^{-15}$ としてチェビシエフ展開の係数を最小二乗法に類似の方法で決めて構成した伝達関数（その 6）の大きさのグラフである。 $g_p=2.4 \times 10^{-2}$, $g_s=1.6 \times 10^{-15}$ となった。

これらのグラフをみると、いずれも通過域で伝達関数の値は頂上付近で押し潰されて振動していて、通過域での伝達率の最大最小比が低減できていることが分かる。さらにこれらの伝達関数について、数値相殺による桁落ちの状況を調べるために式 $g(t) = \sum_{k=0}^n c_k T_k(2x-1)$ の値の計算において、横軸の値 t に対して、チェビシエフ多項式の三項漸化式を利用して項の番号 k を 0 から n まで上げながら係数 c_k を乗じて和をとりながら計算していくときに、途中で部分和の値が到達した絶対値最大の値をグラフに青でプロットしたものを書き添えると、以下ようになる

- 図 A・12 は式計算の途中で部分和がとった最大の絶対値のグラフを図 A・9 に書き加えたものである。
- 図 A・13 は式計算の途中で部分和がとった最大の絶対値のグラフを図 A・10 に書き加えたものである。
- 図 A・14 は式計算の途中で部分和がとった最大の絶対値のグラフを図 A・11 に書き加えたものである。

参考文献

- [1] 村上弘: 固有値が指定された区間内にある固有対を解くための対称固有値問題用のフィルタの設計, 情報処理学会論文誌: コンピューティングシステム (ACS31), Vol.3, No.3 (2010 年 9 月), pp.1-21.
- [2] 村上弘: 対称一般固有値問題のフィルタ作用素を用いた不変部分空間の近似構成, 情報処理学会論文誌: コンピューティングシステム (ACS35), Vol.4, No.4 (2011 年 10 月), pp.1-14.
- [3] 村上弘: レゾルベントを用いたフィルタによる固有値問題の解法について, 情報処理学会研究報告, Vol.2012-HPG-133, No.22 (2012 年 3 月), pp.1-8.
- [4] 村上弘: 実対称定値一般固有値問題の最小側固有値を持つ固有対に対する実数シフトのレゾルベントを組み合わせたフィルタによる解法, 先進的計算基盤システムシンポジウム論文集 2012, (2012 年 5 月), pp.81-82.
- [5] 村上弘: Hermite 対称不定値一般固有値問題のフィルタ対角化法について, 情報処理学会研究報告, Vol.2012-HPG-134, No.1 (2012 年 6 月), pp.1-8.

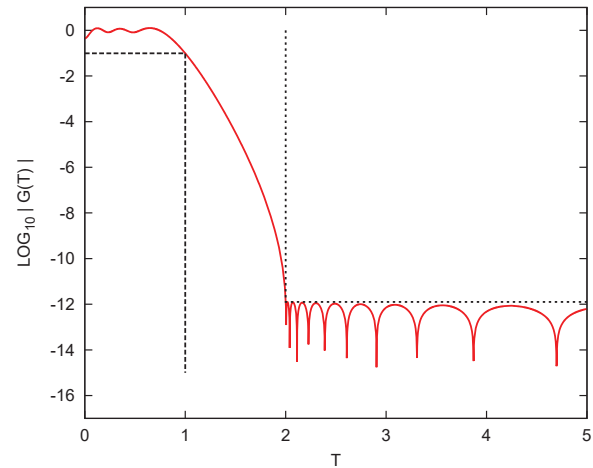


図 A・9 最小二乗法に類似の方法による伝達関数（その 4）: $|g(t)|$
($n=20$, $\mu=2.0$, $\sigma=1.0$, $\epsilon=10^{-12}$)
 $g_p=9.8 \times 10^{-2}$, $g_s=1.3 \times 10^{-12}$

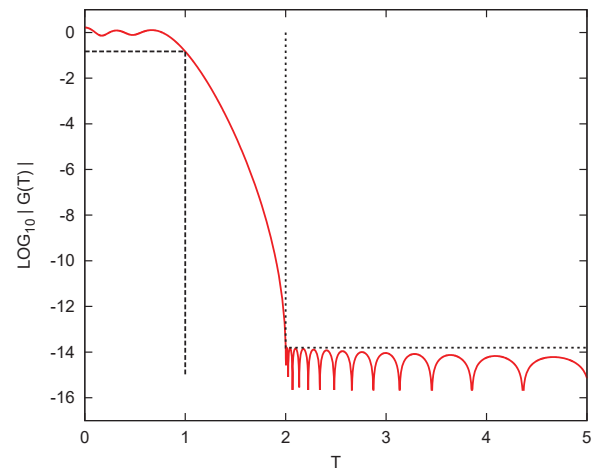


図 A・10 最小二乗法に類似の方法による伝達関数（その 5）: $|g(t)|$
($n=25$, $\mu=2.0$, $\sigma=1.5$, $\epsilon=10^{-14}$)
 $g_p=1.5 \times 10^{-1}$, $g_s=1.6 \times 10^{-14}$

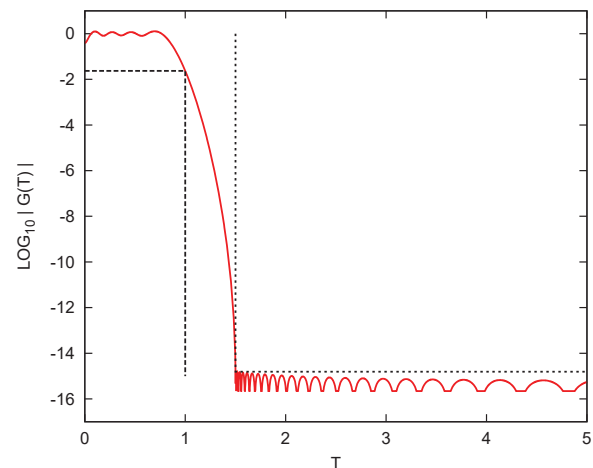


図 A・11 最小二乗法に類似の方法による伝達関数（その 6）: $|g(t)|$
($n=40$, $\mu=1.5$, $\sigma=1.5$, $\epsilon=10^{-15}$)
 $g_p=2.4 \times 10^{-2}$, $g_s=1.6 \times 10^{-15}$

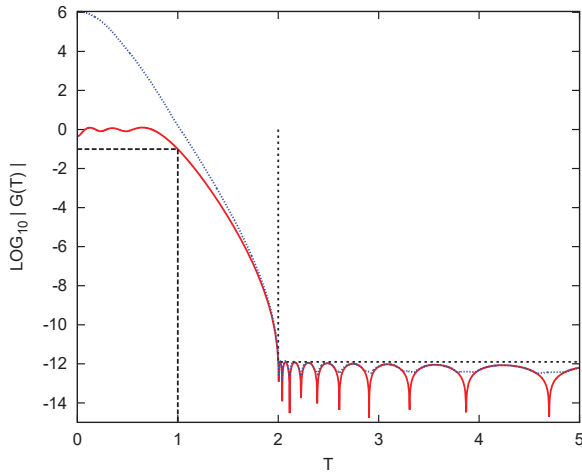


図 A-12 最小二乗法に類似の方法による伝達関数 (その 4) : $|g(t)|$
($n=20$, $\mu=2.0$, $\sigma=1.0$, $\epsilon=10^{-12}$)
 $g_p=9.8 \times 10^{-2}$, $g_s=1.3 \times 10^{-12}$

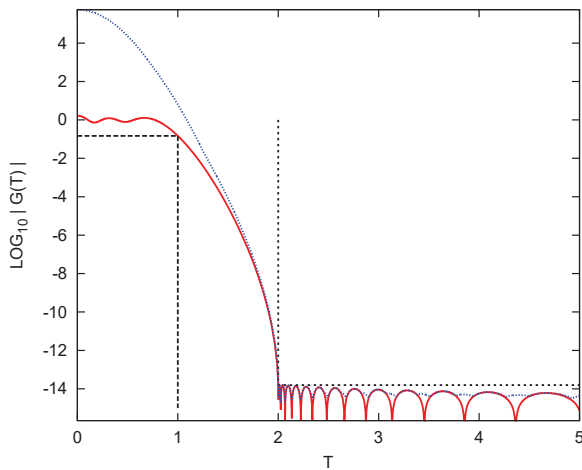


図 A-13 最小二乗法に類似の方法による伝達関数 (その 5) : $|g(t)|$
($n=25$, $\mu=2.0$, $\sigma=1.5$, $\epsilon=10^{-14}$)
 $g_p=1.5 \times 10^{-1}$, $g_s=1.6 \times 10^{-14}$

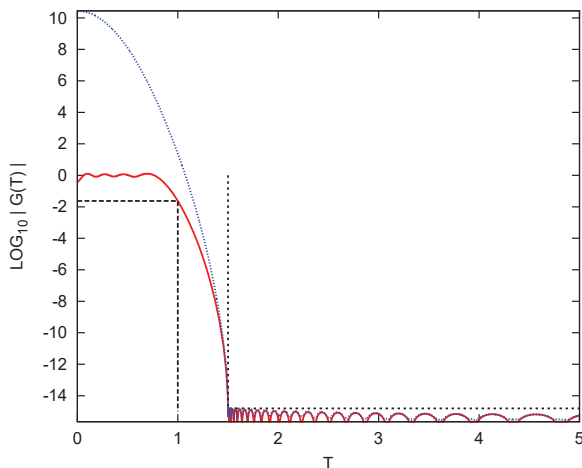


図 A-14 最小二乗法に類似の方法による伝達関数 (その 6) : $|g(t)|$
($n=40$, $\mu=1.5$, $\sigma=1.5$, $\epsilon=10^{-15}$)
 $g_p=2.4 \times 10^{-2}$, $g_s=1.6 \times 10^{-15}$

- [6] 村上弘: レゾルベントの線形結合をフィルタに用いたエルミート定値一般固有値問題のフィルタ対角化法, **情報処理学会論文誌: コンピューティングシステム** (ACS45), Vol.7, No.1 (2014 年 3 月), pp.57-72.
- [7] 村上弘: フィルタ対角化法について, **日本応用数学会 2014 年度年会予稿集** (2014 年 8 月), pp.329-330.
- [8] 村上弘: レゾルベントの多項式をフィルタとして用いる対角化法について, **情報処理学会研究報告**, Vol.2014-HPC-146, No.13 (2014 年 9 月), pp.1-4.
- [9] 村上弘: 実対称定値一般固有値問題に対するレゾルベントの多項式によるフィルタの構成法の検討, **情報処理学会研究報告**, Vol.2014-HPC-147, No.2 (2014 年 12 月), pp.1-10.
- [10] 村上弘: 実数シフトのレゾルベントを組み合わせたフィルタによる実対称定値一般固有値問題の下端付近の固有値を持つ固有対の解法, **HPCS2015 シンポジウム論文集**, Vol.2015 (2015 年 5 月), pp.38-51.
- [11] 村上弘: 一つのレゾルベントから構成されたフィルタを用いた実対称定値一般固有値問題に対するフィルタ対角化法の実験, **情報処理学会研究報告**, Vol.2015-HPC-149, No.7 (2015 年 6 月), pp.1-16.
- [12] 村上弘: 「実数シフトのレゾルベントの多項式をフィルタに用いた実対称定値一般固有値問題の下端付近の固有値を持つ固有対の解法」, **日本応用数学会 2015 年度年会予稿集 (統合版)** (2015 年 9 月 2 日), pp.442-443.
- [13] Hiroshi Murakami: "Filter diagonalization method for a real symmetric definite generalized eigenproblem whose filter is a polynomial of a resolvent", poster presentation [P-13] at EPASA2015 (International Workshop on Eigenvalue Problems: Algorithms; Software and Applications, in Petascale Computing), at International Congress Center, EPOCAL TSUKUBA, Tsukuba, Japan. (Sep.15th,2015). in abstracts, p.28 (single page poster abstract).
- [14] 村上弘: 「レゾルベントの多項式によるフィルタの伝達特性の調整」, RIMS 共同研究「数式処理とその周辺分野の研究」, 於京都大学益川ホール (2015 年 12 月 4 日) に対する **RIMS 講義録原稿**, 14 頁分 (発行予定).
- [15] 村上弘: 「固有値問題の解法に用いるレゾルベントの多項式型のフィルタの設計」, **情報処理学会研究報告**, Vol.2016-HPC-153, No.38(2016 年 3 月 3 日), pp.1-13.
- [16] 村上弘: 「虚数シフトのレゾルベントの多項式の実部をフィルタに用いた実対称定値一般固有値問題の中間固有対の解法」, **HPCS2016 シンポジウム論文集** (ポスタ発表論文) (2016 年 6 月 6 日), p.49(全 1 頁).
- [17] 村上弘: 「実対称定値一般固有値問題の最小側固有対を解くための実数シフトのレゾルベントの多項式によるフィルタの簡易な設計法」, **情報処理学会研究報告集**, Vol.2016-HPC-155, No.44 (2016 年 8 月 10 日), pp.1-27.
- [18] 村上弘: 「レゾルベントの多項式をフィルタに用いた対称定値一般固有値問題のフィルタ対角化法」, **日本応用数学会 2016 年度年会予稿集** (2016 年 9 月 13 日)2 頁分.