

複数のデコード化と Levy Flight に基づく進化計算による室内レイアウト問題の解法

趙 冬青^{†1} アランニャ クラウス^{†2} 狩野 均^{†2}

概要：室内レイアウト問題とは、家具を与えられた領域内に制約条件を満たすように配置する問題である。また、作成されたレイアウトはユーザの希望を反映していることが望ましい。本論文では、室内レイアウト問題を制約充足問題として定式化し、進化計算を用いた新たな解法を提案する。本手法は、島ごとに異なるデコード化法を用いること並びに突然変異として Levy Flight を用いることに新規性がある。前者は、得られる解の多様性、後者は探索性能の向上を狙ったものである。本稿では、1 から 4 個までの部屋、7 から 30 個家具を持っている問題へ適用し、通常の ES、GA との比較実験により、提案手法の有効性を示す。

キーワード：進化計算、施設レイアウト問題、Levy Flight、デコード化

Solving Room Design Problems Using GA with Levy Flight and Different Decoding Methods

DONGQING ZHAO^{†1} CLAUS ARANHA^{†2}
HITOSHI KANO^{†2}

Abstract: Room design problem is the problem how to arrange the furniture so as to satisfy the constraints in a given room. However, the created layout should reflect the desire of the users. In this paper, we formulate the room design problem as a constraint satisfaction problem and propose a new method with evolutionary computation. We employed a GA using Levy Flight as basis for an improved mutation operator and used an island model GA with different decoding methods. The results show the diversity and the effectiveness of the proposed method.

Keywords: Facility Layout Problems, Levy Flight, ES, Decoding, Island Model GA, Optimization, combinatorial optimization problems

1. はじめに

施設レイアウト問題（FLP）とは、施設内に配置物（設備、機械、備品、家具、部署、職場など）を仕事の効率や作業時間が最適になるように配置する探索問題である。適切な配置は仕事の運営費を 50%削減できるといわれており、古くから FLP に対する研究が多数行われている[1]。FLP の計算複雑さは NP 困難であることが知られている。このため、問題を分類した上でメタヒューリスティックにより近似解を求めるというアプローチが主流となっている[2]。本論文では、複数の長方形の施設内に大きさが不揃いな複数の長方形の配置物を目的関数値が最小となるように配置する問題を扱う。この問題の解法としては、遺伝的アルゴリズム（GA）[3][4][5]、焼き鈍し法（SA）[6]、アントコロニー最適化法（ACO）[7][8]、タブーサーチ（TS）[9]、粒子群最適化法（PSO）[10]、カオス力学的モデルを用いる方法[11] などの近似解法が提案されている。これらの研究

においては、ベンチマーク問題[8]を対象として、各配置物間の物流コストの全合計（目的関数）がなるべく小さくなる配置をただ一つ求めることを主な目的としている。また、主な制約条件としては、①配置物は施設からはみ出さない、②配置物は重なってはいけない、という単純なものである。

しかし、現実の問題を考えると、目的関数も制約条件も複雑であり、施設を利用する人々の個性、直感、快適性、利便性などを考慮して問題をすべて定式化することは難しいと思われる。本論文では、現実的な FLP の一例として、複数の室内に多数の家具を配置する「室内レイアウト問題」を取り上げる。そして、満足できる目的関数値を有する複数の異なる近似解を求め、どの解を採用するかはユーザが決定するという戦略をとる。ユーザの嗜好を探索に取り入れる方法としては、対話型進化計算[12]が広く用いられている。しかし、本問題は探索空間が膨大であるため候補の集団サイズが大きくなり、対話型の計算には向いていないと考える。

本論文では、適応度が高い複数の異なる近似解を得るため、Levy Flight（LF）に基づく GA と複数のデコード化を有する島モデルを提案する。最近、膨大な探索空間の中でランダムに存在する解を効率的に探索する方法として、LF

^{†1} 筑波大学大学院システム情報工学研究科コンピュータサイエンス専攻
Department of Computer Science, Graduate School of Systems and
Information Engineering, University of Tsukuba.

^{†2} 筑波大学システム情報系情報工学科
Division of Information Engineering, Faculty of Engineering, Information and
Systems, University of Tsukuba

が注目されている。LF に基づく探索方法は、通常の Random Walk (RW) に基づく探索よりも効果的であることが知られている [13] [14]。著者らは前記した FLP のベンチマーク問題[8]を対象として、通常の進化戦略 (ES) に LF を導入することにより、GA [3]、ACO [8]、カオス力学的モデル[11]よりも目的関数値の小さい解を発見できることを示した [15]。本論文では、GA の突然変異として LF を用いることにより適応度の向上を図る。次に、GA における集団を複数の部分集団 (島) に分割し、部分集団毎に異なるデコード化法を採用することにより、集団全体の多様性の維持を図る。通常の GA においては、適応度の高い一つの個体を得るために多様性の維持を図ることが多い。これに対して提案手法では、最終世代の個体にばらつきを持たせることを主な目的としている。

以下では、まずユーザの嗜好・快適性・利便性を考慮した問題の表現方法について述べる。つぎに、提案する手法のコード化・デコード化方法とアルゴリズムを詳細に説明する。最後に、部屋数が 1~4 の問題を対象として、従来手法との比較実験により本手法の有効性を示す。

2. 研究分野の概要

2.1 施設レイアウト問題とその解法

施設レイアウト問題 (Facility Layout Problem: FLP) は、プリント基板の設計、病院・学校・空港などのレイアウト、機器内部品の配置、倉庫詰め問題、水力タービンの設計など、幅広い分野に見られる組み合わせ最適化問題である[2]。これらの問題の計算複雑さは、NP 困難であることが知られており、施設内の通路の種類 (列状通路、ループ状通路、自由通路)、施設の数 (部屋数、階数)、配置物の形状 (同一形状／不揃い、長方形／凸凹形) などで問題を分類した上で解法が研究されている[1]。また、代表的な定式化モデルとしては、QAP (Quadratic Assignment Problem) として扱うモデル[17]、配置物をグラフのノードとして表現するグラフ理論モデル[18]、MIP (Mixed Integer Programing) で扱えるように配置物の位置を実数値として、全ての制約条件を数式で表現する MIP モデル[19]などが挙げられる。

本論文では、複数の長方形の施設内に大きさが不揃いな複数の長方形の配置物を目的関数値が最小となるように配置する問題を扱う。各配置物の面積を固定して縦横比に一定の尤度を持たせた問題は、ベンチマーク問題[8]が公開されているため多くの論文で取り扱われている。この問題の解法としては、メタヒューリスティックと MIP などをハイブリッド化する方法が広く研究されている。

Komarudin らは、解の表現として木構造を用いた Ant System を FLP に適用した[8]。木構造に基づいて施設の空間を順番に分割して職場を配置する。また、この手法を局所探索法とハイブリッド化することにより性能の向上を図っている。大森らは、FLP における職場間の物流量の大き

さをバネと見なし、「カオス挙動」を加えることで相対位置を効率的に求めるヒューリスティックを提案した[11]。この方法は MIP と組み合わせて大規模な問題に対応でき、かつ職場の移動における局所解への収束を抑制した。また、制約を軽減することにより高速化を図った。Liu らは、sequence-pair 表現を用いて MIP と GA をハイブリッド化した手法を提案し、大規模な問題に適用した[3]。Asl らは、ES、PSO、GA の 3 つの手法の比較実験を行って、ES が PSO や GA より良い結果を得ることができることを示した [20]。また、著者らは、Levy Flight を用いた ES と MIP をハイブリッド化した手法を提案し、上記の手法[3][8][11]より目的関数値が小さい解を求めることができることを示した [15]。

2.2 対象問題と基本戦略

本論文では、現実的な FLP の一例として、住宅の複数の部屋に大きさが不揃いな複数の家具を配置する「室内レイアウト問題」を取り上げる。

本論文で用いた制約を表 1 に示す。各制約は、家具に関する制約と部屋に関する制約に分類されている。制約 c_2 と c_7 の違反点数に幅があるのは、違反の程度 (c_2 では窓のふさがれている面積の割合、 c_7 では家具とコンセントの距離) によって点数が変わるように計算しているからである。

表 1 制約と違反点数

分類	制約	制約の内容	違反点数
家具	C_1	家具は室内に配置する	20
	C_2	窓をふさぐ配置を行わない	1~12
	C_3	入り口付近にスペースがある	10
	C_4	高さの高い家具は壁際に配置する	12
	C_5	家具の位置と向きが合っている	10
	C_6	配置する部屋が希望と合っている	15
	C_7	電気器具はコンセントに近いところに配置する	1~8
	C_8	高さの近い家具は近くに配置する	5
部屋	C_9	一つの部屋の広さに対する家具の占有率は 3 分の 1 に超えない	5
	C_{10}	出入口と各家具とを結ぶ通路が存在する	15

探索にユーザの好みを反映させる方法として、対話型遺伝的アルゴリズム (IGA) [12]が広く用いられている。しかし、IGA を本問題に適用すると探索空間が広いため、探索が収束するまでに多数の世代ステップが必要になり、ユーザの対話回数が多くなりすぎる。ユーザとの対話を数世代毎にして回数を減らすと、収束時に集団の多様性が低くなり、ユーザの選択肢が少なくなる。この結果、ユーザの好みを反映したレイアウトを求めることができない可能性がある。

2.3 Levy Flight 探餌仮説と最適化問題

動物は変化する自然環境の中で、獲物の居場所をどうやって効率的に探しているのか、という疑問は古くから研究

されている。獲物は、広い範囲にランダムかつまばらに分布している。また、獲物の居場所に関する捕食者の知識は曖昧である。このような状況下で、動物は自然淘汰の結果として LF による採餌行動を行っているので、LF の探索効率は最適である（LF 採餌仮説）と仮定する[21]。

LF では探索空間における探索点の 1 ステップの移動は式(1)の分布に従う[21]。ただし、 l は移動距離(ステップ幅)、 u は範囲 $1 < u \leq 3$ の定数である。

$$P(l) \sim l^{-u} \quad (1)$$

通常のランダム探索では、同じ場所を繰り返して探索してしまうことが指摘されているが、LF に基づく探索では、遠方への大域探索を織りまぜて実行することになるので、動物の採餌行動に類似して効率よく探索することができると考えられている。

3. 提案手法

3.1 染色体

図 2 に染色体の例を示す。遺伝子座(変数 X)を配置順とする。また、遺伝子(領域 D)を部屋名または家具番号と家具の向きのペアとする。この例では、家具 1、6、5、3 をこの順番で部屋 A に配置し、次に家具 2、4 をこの順番で部屋 B に配置することを意味している。また、配置するときは、家具番号の下に記述された向きに配置する。家具の向きは、家具本体(白い部分)にワークスペース(掛け線の部分)を含めて図 3 のように設定している。

配置順	1	2	3	4	5	6	7	8
部屋と家具	A	1	6	5	3	B	2	4
家具の向き	-	左	右	上	下	-	左	上

図 2 染色体の例(1~6 は家具番号、A と B は部屋名)

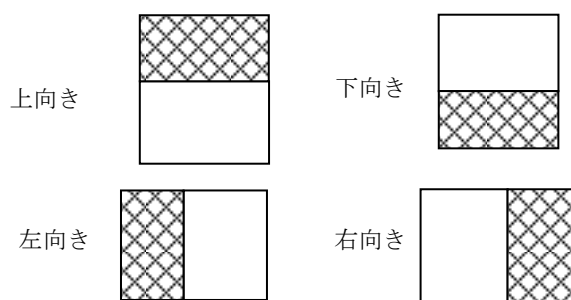


図 3 家具の向き

実際のレイアウトを設計するときは、何も置いていないスペースの配置が重要である[22]。本論文では部屋のサイズと家具の合計面積からスペースの全面積を計算し、小さく分割して単位スペースとして家具の一種と見なし、遺伝子に加えることとする。ただし、スペースの向きは考慮しな

い。単位スペースの種類と大きさは、文献[26]を参考に図 4 のように設定した。

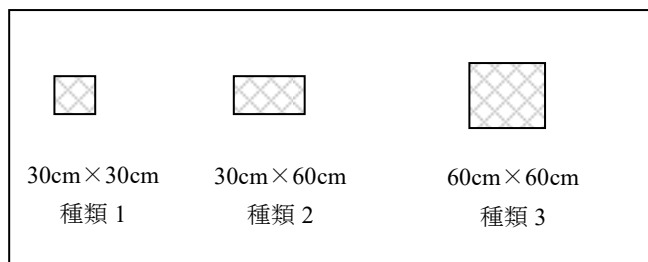


図 4 単位スペースの種類と大きさ

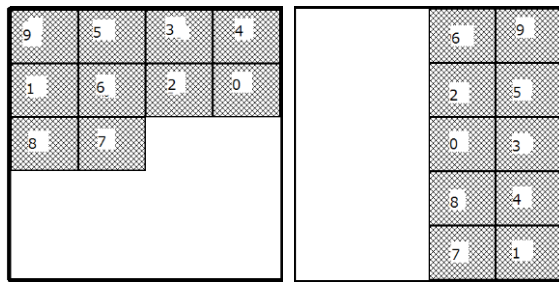
3.2 デコード化

本論文では個体の集団を部分集団(島)に分割し、各島の染色体に対して島ごとに異なるデコード化法を適用することにより多様なレイアウトを生成する。ここでは一つの染色体に対して、家具を配置する方向を変えることにより、異なるレイアウトを生成することを考える。配置する方向としては、右方向(r)、左方向(l)、上方向(u)、下方向(d)の 4 方向及びこれらの組合せとする(斜め方向への配置は考えない)。図 5 は、同じ大きさの家具を正方形の部屋に、染色体 9534162087 に従って配置する例を示している。このように定義すると、例えば 4 行(または列)配置する場合は、全部で $4^4=256$ 通りの組合せが存在することになる。組合せによっては類似のレイアウトが生成されるケースが存在する。このようなケースは本論文の目的に合わないので、除外して考えることとする。

まず、図 5 の rrr と lll 、ならびに uu と dd を比較すると、レイアウトが対象形となっており、実質的に同じレイアウトを生成している。次に、染色体 9534162087 と 9534026187 のように、下線部が逆位となっている 2 つの染色体に対して、それぞれ rrr と rlr を適用した場合、類似したレイアウトが生成されることが予想できる(図 5(a)と図 6 を参照)。そこで本論文では、 r, l, u, d の 4 方向ではなく、水平方向(h)と垂直方向(v)の 2 方向のみを考えることとする。さらに、 hhh と hvh のように、同じ部分構造を持つ配置方向も類似のレイアウトを生成する可能性がある。そこで本論文では、 h と v の出現確率によって場合分けすることにより、効率的に多様なレイアウトを生成することを目指す(表 2 参照)。

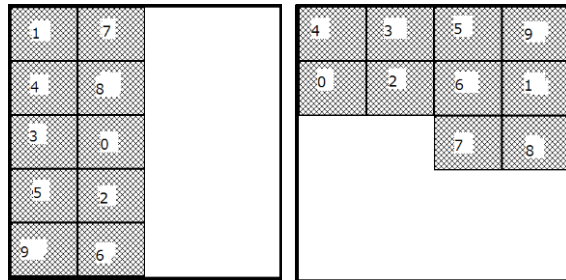
表 2 出現確率による配置方法の分類(4 行/列の場合)

分類	h の出現確率	v の出現確率	代表例
1	1	0	$hhhh$
2	0.75	0.25	$hhhv$
3	0.5	0.5	$hhvv$
4	0.25	0.75	$hvvv$
5	0	1	$vvvv$



(a) 配置方向 rrr

(b) 配置方向 dd



(c) 配置方向 uu

(d) 配置方向 ll

図 5 配置方向が異なる場合の配置図の例

(染色体 : 9 5 3 4 1 6 2 0 8 7)

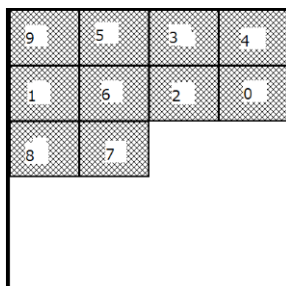


図 6 染色体: 9 5 3 4 0 2 6 1 8 7 に対して配置方向 rlr を適用した場合の配置図

3.3 適応度関数

得られたレイアウトに対して、違反している制約の重み（違反点数）の合計を適応度関数とする。表 1 に示した通り、各制約は家具に関する制約と部屋に関する制約に分類されている。前者については、家具ごとに違反点数を計算してその合計を求める。後者については、部屋ごとに違反点数を計算してその合計を求める。そして両者の合計をそのレイアウト（個体）の適応度とする。

3.4 遺伝的操作

交叉としては、遺伝子が順列を表現する場合に広く用いられている OX (order crossover) を採用する。突然変異は、遺伝子の交換とする。すなわち、ランダムに選択した 2 つの遺伝子座の遺伝子を交換する。本手法では、この交換の回数を LF によって決定する。また、世代交代モデルとしては、多様性の維持に優れているといわれている MGG

(Minimal Generation Gap) モデル[23]を用いる。

3.5 Levy Flight による解の更新方法

LF に基づく探索手法は、一般には、変数が連続値をとる最適化問題に適用されている。しかし、室内レイアウト問題の遺伝子は離散値であるため LF を直接適用することは難しい。このため、本論文では以下の方法を提案する。

まず、確率密度関数として式(3)の Levy 分布[24]を用い、移動距離 l をこれに従う Levy 乱数として生成する。図 7 は、この確率密度関数を図示したものである。このように Levy 分布は、正規分布に比べて、 l の値が大きくなっても出現確率の減少が緩やかであるという特徴がある。このため、探索点が現在地から遠い場所へ移動する確率が比較的高くなり、同じ場所を繰り返して探索してしまう回数が大幅に減少することが見込まれる。

次に、個体間の距離を以下のように定義する。一つの個体 A に交換を M 回施して生成した個体を B とし、 M を A-B 間の距離と見なす。すなわち、交換の回数を探索空間上の移動距離とする。

$$P(l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} l^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{2l}} \quad (3)$$

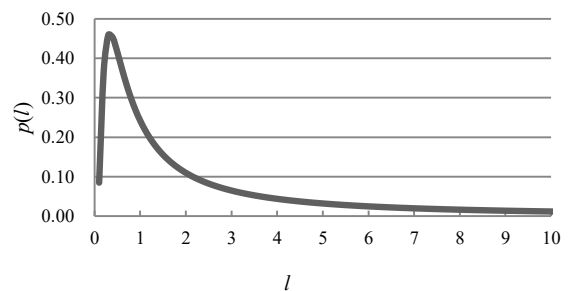


図 7 Levy 乱数の確率密度関数

以上より、突然変異による解の更新を式(4)の M を用いて行う（交換を M 回実行する）。ただし、 n は染色体の長さ、 $[l]$ は l の整数部分を表わす。

$$M = \begin{cases} [l] + 1 & \text{if } l < \frac{n}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

3.6 アルゴリズム

本手法では、5 つの島からなる島モデル GA（移住なし）を用いる。個体の適応度を計算するときは、表 2 の分類に従って、島ごとに異なるデコード化を適用する。各島におけるアルゴリズムを図 8 に示す。

```

初期集団をランダムに生成して適応度を求める;
while (指定世代まで)
{
    集団からランダムに2個体選択する;
    OXにより交叉を行う;
    Levy乱数  $l$  を生成する;
    子個体に突然変異(交換)を  $M$  回実行する;
    子個体のレイアウトを生成し適応度を求める;
    生存選択により次世代の個体を選択する;
}

```

図8 提案手法の各島のアルゴリズム

4. 評価実験

4.1 実験方法

提案する手法の有効性を確認するため、次の手法との比較実験を行った。

- ・ **ES**: 突然変異を交換とした通常の $(\mu+\lambda)$ ES。
- ・ **GA**: 図8のアルゴリズムにおいて、LFは用いないで突然変異の回数を固定した1集団のGA。
- ・ **GA+LF**: 図8のアルゴリズムを用いた1集団のGA。

各種パラメータの値は、予備実験により次のように設定した。ESとGAの集団サイズ = 1000、提案手法の各島の集団サイズ = 200 (島が5つあるので、全個体数は1000)、ESの子集団サイズ λ = 3000、GAの突然変異率 = 10%、また、ESとGAで、1回の突然変異として交換をそれぞれ2回と1回適用した。

以下の表に示すデータは、乱数の初期値を変えて30回実験を行ったときの最終世代における最良適応度の平均と標準偏差、ならびに30回中の最良値である。なお、混乱を避けるため、以下では適応度のことを違反点数と称す。

また、対象問題の属性を表3に示す。部屋のサイズと構造、および使用した家具の値は、市販されている家具と住宅のカタログを参考にして設定した。

表3 対象問題の属性と染色体長

問題	部屋数	家具数	単位スペース数	染色体長
A	1	8	20	28
B	2	13	37	50
C	3	17	48	65
D	4	25	51	76
E	4	30	54	84

4.2 適応度の評価

提案手法で用いたLFの効果を評価するため、ES、GA、GA+LFの比較実験を行った。図9は、問題Eに対する各手法の進化過程の一例である。縦軸は集団中の最良個体の違反点数を表している。この図から、最も規模の大きい問題Eに対して、3手法とも評価回数60000回以下で収束していることがわかる。

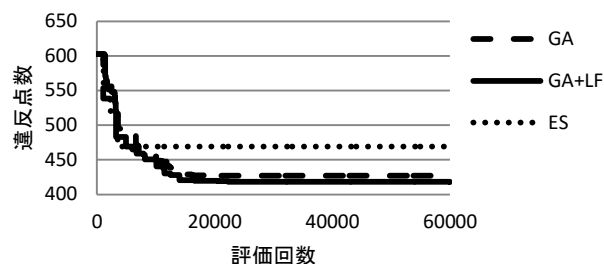


図9 問題Eに対する各手法の進化過程

次に、問題A～Eに対する実験結果を表4に示す。表中の下線で示した値は、各問題における最良値である。この表から次のことがわかる。

- ESとGAを比較すると、全ての問題に対してGAの方が優れている。
- GAとGA+LFを比較すると、全ての問題に対して違反点数の平均値はGA+LFの方が小さい。また、違反点数の最小値も小さいまたは等しい。

以上のことから、本問題に対する探索手法としては、ESよりもGAが適しているといえる。また、GAにLFを導入することにより、適応度の向上が期待できるといえる。

表4 各手法の違反点数の比較 (括弧内は標準偏差)

問題	ES		GA		GA+LF	
	min	mean	min	mean	min	mean
A	5	9(4)	2	7(4)	<u>1</u>	<u>5(3)</u>
B	23	47(11)	14	14(1)	<u>11</u>	<u>13(1)</u>
C	182	214(13)	169	189(11)	<u>158</u>	<u>174(9)</u>
D	387	406(18)	<u>334</u>	352(5)	<u>334</u>	<u>340(7)</u>
E	459	487(10)	415	426(10)	<u>407</u>	<u>420(9)</u>

4.3 多様性の評価

次に提案手法の多様性を評価するため、提案手法とGA+LFによって生成された個体(レイアウト)における家具の位置座標の分布を比較した。図10と11は、問題A～Dのテレビとパソコンの位置座標をプロットしたものである。提案手法について、各島の上位20個体(合計100個体)、GA+LFについては、集団中の上位100個体を選択した。複数の家具の座標が完全に一致している場合は、一つの家具としてプロットした。図10と11中のすべてのグラフにおいて、提案手法の方がプロットの数が多く、分布の範囲も広いことがわかる。これより、提案手法はGA+LFよりも多様性の維持に優れているといえる。

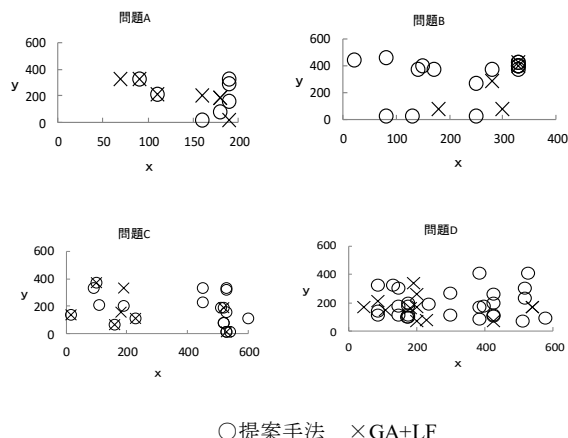


図 10 各問題におけるテレビの座標分布

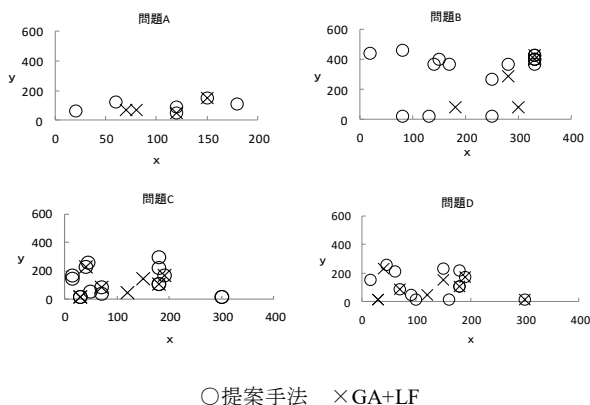


図 11 各問題におけるパソコンの座標分布

5. おわりに

本論文では室内レイアウト問題に対する新たな解法を提案した。家具数が 8~30 で部屋数が 1~4 の問題を対象とした実験から、本手法は通常の進化計算より適応度と多様性の両面で優れていることを確認した。

本論文では、多様性の評価として家具の座標分布を利用したが、これだけでは十分とはいえない。今後は、多様性の定量的な評価方法を開発することが必要と考える。また、提案手法は、室内レイアウト問題を対象としているが、今後、別の探索問題への適用検討を通して、本手法をより一般化したいと考えている。

謝辞 本研究は、JSPS 科研費 15K00296 の助成を受けたものである。

参考文献

- [1] Drira, A. and Pierreval, H.. Facility layout problems: A survey, Annual Review in Control 31, 2007, p. 255-267.
- [2] Singh, S. P. and Sharma, R. R. K.. A review of different approaches to the facility layout problems, International Journal of Advanced Manufacturing Technology 30, 2006, p. 425-433.
- [3] Liu, Q. and Meller, R. D.. A sequence-pair representation and MIP-model-based heuristic for the facility layout problem with rectangular departments. IIE Transactions, 2007, Vol 39, p. 377-

- 394.
- [4] Gonçalves, J. F. and Mauricio, G. C. R.. A biased random-key genetical gorithm for the unequal area facility layout problem, European Journal of Operational Research, 2015, p. 86-107.
- [5] Hernández, L. G and Romero, J. M. P. et al.. A novel hybrid evolutionary approach for capturing decision maker knowledge into the unequal area facility layout problem, European Journal of Operational Research, 2015, p. 4697-4708.
- [6] Tam, K. Y.. A Simulated Annealing Algorithm for Allocation Space To Manufacturing Cells. Int.J.Prod.Res, 1992, Vol.30, p. 63-87.
- [7] Guan, J. and Lin, G.. Hybridizing variable neighborhood search with ant colony optimization for solving the single row facility layout problem. European Journal of Operational Research 248, 2016, p. 899-909.
- [8] Komarudin, W. K. Y.. Applying Ant System for solving Unequal Area Facility Layout Problems. European Journal of Operational Research 202, 2016, p. 730-746.
- [9] Scholz, D. and Petrick, A. et al.. A slicing tree and tabu search based heuristic for the unequal area facility layout problem. European Journal of Operational Research 197 (1), 2009, p.166-178.
- [10] Kulturel-Konaka, S. and Konak, A.. A new relaxed flexible bay structure representation and particle swarm optimization for the unequal area facility layout problem, Engineering Optimization, 2011, Vol.43, No. 12, p. 1263-1287.
- [11] 大森峻一, 吉本一穂. 力学的モデルを用いた施設レイアウト問題の解法, 日本経営工学会論文誌 64, 2013, p.145-156.
- [12] 是永基樹, 萩原将文. 対話型進化計算法によるインテリアレイアウト支援システム, 情報処理学会論誌, 2000, vol.41, No.1, p. 3152-3160.
- [13] Bartumeus, F.. Animal search strategies: a quantitative random-walk analysis. Ecology 86, 2005, p.3078-3087.
- [14] Viswanathan, G. M.. Lévy flights and super diffusion in the context of biological encounters and random searches. Physics of Life Reviews, 2008, p. 133-150.
- [15] Zhao, D. and Aranha, C. and Kanoh, H.. Solving Facility Layout Problems Using Evolutionary Strategy Based on Levy Flight, 2016 IEEE 9th International Workshop on Computational Intelligence and Applications, 2016, p. 39-44.
- [16] Francis, R. L. and White, J. A.. Facility layout and location an analytical approach, Prentice Hall, 1974.
- [17] Kusiak, A. and Heragu, S. S.. The facility layout problem. European Journal of Operational Research 29, 1987, p. 229-251.
- [18] Hassan, M. and Hogg, G.. A review of graph theory applications to the facilities layout problem. Omega, 1987, Volume 15, Issue 4, p. 291-300.
- [19] Montreuil, B.. A modeling framework for integrating layout design and flow network design, Proceedings of the material handling research colloquium, 1990, p. 43-58.
- [20] Asl, A. D.. Unequal-area stochastic facility layout problems: solutions using improved covariance matrix adaptation evolution strategy, particle swarm optimization, and genetic algorithm. International Journal of Production Research, 2016, Volume 54, Issue 3, p.799-823.
- [21] Viswanathan, G. M.. The Physics of Foraging, Cambridge University Press, 2011.
- [22] 秋川寿美礼. 住まいのインテリア設計, 2013, p. 40-43.
- [23] 佐藤浩, 小野功, 小林重信. 遺伝的アルゴリズムにおける世代交代モデルの 提案と評価, 人工知能学誌, 1996, Vol .12, No.5, p.734-748.
- [24] 四辻哲章. 計算機シミュレーションのための確率分布乱数生成法, プレアデス出版, 2010, p. 175-180.