Vol.2016-CG-165 No.2
Vol.2016-DCC-14 No.2
Vol.2016-CVIM-204 No.2
2016/11/9

圧縮センシングに用いる行列の検討

石川翔大[†1]　呉海元[†1]

概要：圧縮センシング(Compressed Sensing: CS)とはスパースな信号をより少ない観測成分数で復元するための手法であり，ある種のデータ圧縮ともいえる．その際，信号を圧縮するために行列(CS 行列)が用いられるが，従来の研究から CS 行列にはランダム行列が最適であるとされている．しかし，ランダム性に頼った生成では必ず圧縮に使えるという保証はなく再現性の観点からも問題がある．そこで，本研究ではランダム以外の方法で CS 行列を生成することに試みた．数値と画像を用いた実験結果より，提案 CS 行列の有効性を確認した．

キーワード：圧縮センシング，CS 行列，ランダム行列，固定行列

Study on Matrix Used in Compressed Sensing

ISHIKAWA SHOTA[†1]　WU HAIYUAN[†2]

Abstract: Compressed Sensing (CS) is a method to restore sparse signals form few observed components. It is a kind of compression of data. We use matrix (CS-Matrix) to compress data. It is said that Random-Matrix is the best for CS-Matrix. However the method relying Random Matrix doesn't promise to make CS-Matrix which can use for CS. It also has a problem with the reproducibility. So in our research, we tried to make CS-Matrix not at random. We confirmed its effectiveness from experiment.

Keywords: Compressed Sensing, CS-Matrix, Random-Matrix, Fixed-Matrix

1. はじめに

本稿では，圧縮センシングに用いる行列に関する検討結果について報告する．

信号を周波数に依存せず復元可能のサンプリング原理がある[1]が，その理論は画像などの圧縮にも利用される[1][2]．圧縮に使う行列（以下は CS 行列と呼ぶ）を生成するには適切な行数 n と列数 m を決定し，各要素の数値がランダムで決める行列を生成すればよいとされている[1][2]．しかし，それでは本当に圧縮に使えるのかどうかを確かめなければならず，再現性もない．何より適切に乱数が生成されない場合には正しく伸長できない．

そこでランダムではない方法で CS 行列を生成する方法の提案を本研究の目的とする．なお，本研究では伸長の手法に OMP(Orthogonal Matching Pursuit)法[3]を採用している．

2. 圧縮センシング

本章では，圧縮センシングについて概説する．

2.1 圧縮センシングとは

圧縮センシングはスパースなm次元ベクトル$\boldsymbol{x}$にn行m列(n ≪ m)の行列$\boldsymbol{N}$を掛けn次元ベクトル$\boldsymbol{y}$に圧縮する手法である．

「スパース」とは非零成分が少ないことを指す．例えば，以下のベクトル$\boldsymbol{v}$は

$$\boldsymbol{v} = [0\ 3\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^t$$

8 成分の中に 1 つの非零成分が存在するのみで，残りの 7 成分はすべて 0 である．零成分の数が s 以下の場合は s スパースと呼ぶ．このケースの$\boldsymbol{v}$は 1 スパースである．

一般的に行列$\boldsymbol{N}$とベクトル$\boldsymbol{y}$からベクトル$\boldsymbol{x}$を一意に決定することはできない．なぜなら$\boldsymbol{N}\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{y}$なる$\hat{\boldsymbol{x}}$が複数存在するからある．しかし，ベクトル$\boldsymbol{y}$がスパース性と行列$\boldsymbol{N}$が零空間特性を満たした場合にベクトル$\boldsymbol{x}$を一意に決定することが可能になる．伸長の際には$\hat{\boldsymbol{x}}$のうち lp ノルムが最小となる$\boldsymbol{x}'$に伸長する．以下に 2 行 3 列の例を示す．

$$\begin{matrix} \boldsymbol{N} & & \boldsymbol{x} & & \boldsymbol{y} & & \boldsymbol{y} & & \boldsymbol{x}' \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$

以下に零空間特性と圧縮センシングの関連を説明する．

(1) **零空間特性**

「零空間特性」について説明するためにまず「零空間」について説明する．零空間とは

$$\boldsymbol{N}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0} \qquad (3\text{-}1)$$

のベクトル$\boldsymbol{z}$の解の集合で Null($\boldsymbol{N}$)などと記述される．

本論文では以降，零空間の要素を「零空間要素」と呼称することとする．ただし，本研究では $\boldsymbol{0}$ は零空間要素として扱わないこととする．

次に零空間特性を説明する．s次の零空間特性とは零空間要素からs個の成分を取り出した時, その絶対値和が残りの成分の絶対値和未満になる性質である[2][3]（図 1 参照）．

このとき，次の両方が同時に成り立つ必要があり，

i.　どの成分の組み合わせでも成り立つこと

†1 和歌山大学
Wakayama University

ⓒ2016 Information Processing Society of Japan

Vol.2016-CG-165 No.2
Vol.2016-DCC-14 No.2
Vol.2016-CVIM-204 No.2
2016/11/9

ii.　全ての零空間要素で成り立つこと

この性質を定式化すると以下のようになる．

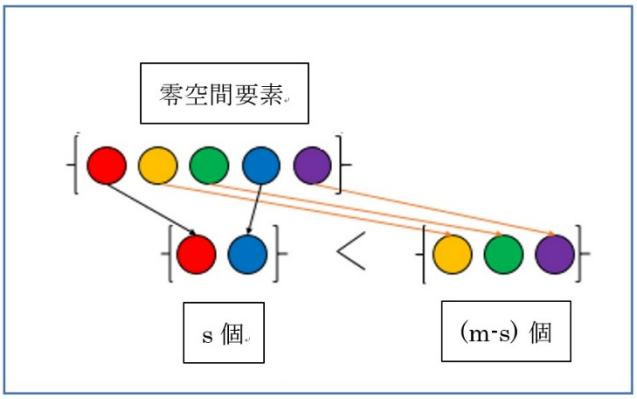


図 1　s次の零空間特性のイメージ

行列$\boldsymbol{N}$ がn行m列の場合，ベクトル$\boldsymbol{v}$と全体集合U = $\{1,2,\cdots,m\}$，$\Omega \subset U, |\Omega| \leq s$なる全ての集合Ωについて

$$v_{\Omega i} = v_i,\ v_{\Omega j} = 0\ (i \in \Omega,\quad j \notin \Omega)$$

となるベクトル$\boldsymbol{v_\Omega}$を定義する．そのとき行列$\boldsymbol{N}$のすべての零空間要素$\boldsymbol{z}$について

$$\|\boldsymbol{z_\Omega}\|_p^p < \|\boldsymbol{z_{\bar{\Omega}}}\|_p^p \qquad (3-2)$$

が成り立つとき，行列$\boldsymbol{N}$はlpノルムでs階の零空間特性を満たすという．なお，pは必ず正の数または 0 なので，$\|\boldsymbol{z_\Omega}\|_p < \|\boldsymbol{z_{\bar{\Omega}}}\|_p$であれば式(3-2)も成り立つ．

この零空間特性が満たされれば，スパースなベクトルは圧縮センシングによる圧縮が可能となる．このことは以下のように証明することができる[2].

$\boldsymbol{N\hat{x}} = \boldsymbol{y}$となる$\hat{\boldsymbol{x}}$は$\boldsymbol{x}$を除いてすべて$\boldsymbol{x}$と行列$\boldsymbol{N}$の任意の零空間要素$\boldsymbol{z}$を用いて$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z})$と表せる．そこで，$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z})$のlpノルムのp乗$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}\|_p^p$と$\boldsymbol{x}$のlpノルムのp乗$\|\boldsymbol{x}\|_p^p$の差

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}\|_p^p - \|\boldsymbol{x}\|_p^p$$

を考えていく．$\boldsymbol{x}$について，非零成分の添え字すべてを要素とする集合Ωを用意する．$|\Omega| \leq s$，$|\bar{\Omega}| \leq (n-s)$である．一般に実数$q \geq 0, r \geq 0$と正の数pについて

$$|q+r|^p \geq |q|^p - |r|^p \qquad (3-3)$$

が成り立つことを利用する．

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}\|_p^p - \|\boldsymbol{x}\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i + z_i|^p - \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p$$

$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z})$と$\boldsymbol{x}$の成分を添え字がΩに属するものと$\bar{\Omega}$に属するものに分ける．

$$\sum_{i\in\Omega}^{n} |x_i + z_i|^p + \sum_{i\in\bar{\Omega}}^{n} |x_i + z_i|^p - \sum_{i\in\Omega}^{n} |x_i|^p - \sum_{i\in\bar{\Omega}}^{n} |x_i|^p$$

Ωの定義より$\boldsymbol{x}$の成分のうち$\bar{\Omega}$に属する成分は 0 なので

$$= \sum_{i\in\Omega}^{n} |x_i + z_i|^p + \sum_{i\in\bar{\Omega}}^{n} |z_i|^p - \sum_{i\in\Omega}^{n} |x_i|^p$$

式(3-3)より

$$\geq \sum_{i\in\Omega}^{n} \{|x_i|^p - |z_i|^p\} + \sum_{i\in\bar{\Omega}}^{n} |z_i|^p - \sum_{i\in\Omega}^{n} |x_i|^p$$

$$= \sum_{i\in\Omega}^{n} |x_i|^p - \sum_{i\in\Omega}^{n} |z_i|^p + \sum_{i\in\bar{\Omega}}^{n} |z_i|^p - \sum_{i\in\Omega}^{n} |x_i|^p$$

$$= \sum_{i\in\bar{\Omega}}^{n} |z_i|^p - \sum_{i\in\Omega}^{n} |z_i|^p$$

このように整理される．ここで，最後の式の$\sum_{i\in\bar{\Omega}}^{n} |z_i|^p$は$\|\boldsymbol{z_{\bar{\Omega}}}\|_p^p$と等しく$\sum_{i\in\Omega}^{n} |z_i|^p$は$\|\boldsymbol{z_\Omega}\|_p^p$と等しいため，

$$\|\boldsymbol{z_{\bar{\Omega}}}\|_p^p - \|\boldsymbol{z_\Omega}\|_p^p$$

と書くことができる．ここで零空間特性の定義式(3-2)より

$$\|\boldsymbol{z_{\bar{\Omega}}}\|_p^p - \|\boldsymbol{z_\Omega}\|_p^p > 0$$

となる．以上を整理すると，$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}\|_p^p > \|\boldsymbol{x}\|_p^p$となる．$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}\|_p^p$と$\|\boldsymbol{x}\|_p^p$, pのいずれも正の数(または 0)であるので，$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}\|_p > \|\boldsymbol{x}\|_p$である．つまり，ベクトルのスパース性と行列の零空間特性が保証されている場合，$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z})$すなわち$\boldsymbol{x}$以外の$\hat{\boldsymbol{x}}$はかならず$\boldsymbol{x}$よりlpノルムが大きくなる．逆に言えば，$\boldsymbol{N\hat{x}} = \boldsymbol{y}$となる$\hat{\boldsymbol{x}}$の中でlpノルムが最も小さいものが$\boldsymbol{x}$であり，これを一意に決定することができるのである．

(2) インコヒーレンス

どのような行列が零空間特性を持つのか．結論から述べると，列同士の相関が小さい行列がよいとされる[3]．行列には「インコヒーレンス」と呼ばれる値が存在し，m列の行列$\boldsymbol{N}$のインコヒーレンスX($\boldsymbol{N}$)は

$$X(\boldsymbol{N}) = \max_{1\leq i<j\leq m} \frac{|\boldsymbol{v_i} \cdot \boldsymbol{v_j}|}{|\boldsymbol{v_i}|_2 \cdot |\boldsymbol{v_j}|_2}$$

で定義される[3]．このインコヒーレンスの値が小さければ行列$\boldsymbol{N}$は圧縮センシングに用いることができる．具体的には，sスパースなベクトルを圧縮したい場合は

$$2sX(\boldsymbol{N}) < \sqrt{2} - 1 \qquad (3-4)$$

となればよい[3]．このインコヒーレンスと零空間特性との関係を詳しく説明するには「頑健零空間特性」や「制限等長性」と呼ばれる性質について説明しなければならない[3]．それらの説明は文献に譲るとするが，式(3-4)は$\boldsymbol{N}$が$\boldsymbol{s}$階の零空間特性を満たすための十分条件である[3]．

2.2 スパースベクトルについて

述べてきた圧縮センシングの原理はすべてベクトルのスパース性が前提となっている．

しかし，工学上の実データが本当にスパースであることはほとんどない． 実際の圧縮センシングでは，0 に近いものを 0 とみなすことと，生データを変換することによって 0 に近い値が多くなるようにすることが必要であるとされる．そこで圧縮可能性[2]という性質を導入する．

(1) 圧縮可能ベクトル

圧縮可能性はスパース性に似るが，絶対値が小さければそれも非零成分とみなさないという性質である[2]．例えば

ⓒ2016 Information Processing Society of Japan

Vol.2016-CG-165 No.2
Vol.2016-DCC-14 No.2
Vol.2016-CVIM-204 No.2
2016/11/9

次のベクトル

$\tilde{\boldsymbol{v}} = [0.001\ 9.000\ 0.002\ 0.004\ 0.003\ 0.001\ 0.005\ 0.000]^t$

はスパースベクトルではない． 9.000 という最大値に対して 0.001 や 0.005 という値は非常に小さい値であるにもかかわらず，これらの値のためにスパースと言えないわけである．しかし，圧縮可能性という考え方を用いると，0.001 や 0.005 といった値は 9.000 に比べて 0 に近いため非零成分として扱われ，$\tilde{\boldsymbol{v}}$は 9.000 という 1 つの絶対値の大きな値を持つ圧縮可能ベクトル，ほとんどスパースと呼べるベクトルとして扱えるのである．絶対値の大きな値がs以下の場合s圧縮可能と呼称することにする．$\tilde{\boldsymbol{v}}$は 1 圧縮可能である．

もちろん生データが圧縮可能なベクトルであることも少ない．しかし，離散コサイン変換や離散ウェーブレット変換などを適用することで圧縮可能なベクトルが得られやすいことも分かっている[1][2].

(2) 圧縮可能ベクトルと圧縮センシング

圧縮可能なベクトルを圧縮センシングで圧縮できるのかどうかを考えよう．零空間特性の定義式(3-2)を再掲する．

$$\|\boldsymbol{z}_{\Omega}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}} < \|\boldsymbol{z}_{\bar{\Omega}}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}}$$

さて，$0 < \sigma < 1$なる実数σについて，この式(3-2)は$\|\boldsymbol{z}_{\bar{\Omega}}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}}$をσ倍しても，σが十分大きければ成り立つはずである．零空間特性にはσの余裕があるというわけである．そこで行列$\boldsymbol{N}$のすべての零空間要素$\boldsymbol{z}$，$|\Omega| < \mathrm{s}$となるΩについて，

$$\|\boldsymbol{z}_{\Omega}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}} < \sigma\|\boldsymbol{z}_{\bar{\Omega}}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}} \qquad (3\text{-}5)$$

が成り立つ場合，「lpノルムs階の係数σの頑健零空間特性」を満たすという[2].

さて，圧縮可能ベクトル$\boldsymbol{x}$について$\boldsymbol{N}\boldsymbol{x} = \mathbf{y}$となる場合，$\boldsymbol{N}\hat{\boldsymbol{x}} = \mathbf{y}$となる$\hat{\boldsymbol{x}}$が$\boldsymbol{x}$以外に存在し，その中には$\|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}} \geq \|\tilde{\boldsymbol{x}}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}}$なる$\tilde{\boldsymbol{x}}$が存在する．そのため，圧縮センシングで圧縮し伸長した結果は$\tilde{\boldsymbol{x}}$になってしまい，完全に同じベクトルにはなり得ない．しかし，$\boldsymbol{x}$と$\tilde{\boldsymbol{x}}$に大きな差がなければ非可逆圧縮として成立する．そして，両者にその差があまりないことはそのことも以下のように証明されている[2].

零空間の定義から$\tilde{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x} + \tilde{\boldsymbol{z}})$となる零空間要素$\tilde{\boldsymbol{z}}$が存在する．$\boldsymbol{x}$は圧縮可能ベクトルであるので，Ωは絶対値の大きな成分の添え字の集合とする．$\boldsymbol{x}$と$\tilde{\boldsymbol{x}}$の差を考える前に数式の準備をする．

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}} \geq \|\tilde{\boldsymbol{x}}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}} = \|\boldsymbol{x} + \tilde{\boldsymbol{z}}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} |x_i + \tilde{z}_i|^{\mathrm{p}}$$

$$= \sum_{\mathrm{i}\in\Omega}^{\mathrm{n}} |x_i + \tilde{z}_i|^{\mathrm{p}} + \sum_{\mathrm{i}\in\bar{\Omega}}^{\mathrm{n}} |\tilde{z}_i + x_i|^{\mathrm{p}}$$

ここでも式(3-3)を用いて

$$\sum_{\mathrm{i}\in\Omega}^{\mathrm{n}} |x_i + \tilde{z}_i|^{\mathrm{p}} + \sum_{\mathrm{i}\in\bar{\Omega}}^{\mathrm{n}} |\tilde{z}_i + x_i|^{\mathrm{p}}$$

$$\geq \sum_{\mathrm{i}\in\Omega}^{\mathrm{n}} |x_i|^{\mathrm{p}} - \sum_{\mathrm{i}\in\Omega}^{\mathrm{n}} |\tilde{z}_i|^{\mathrm{p}} + \sum_{\mathrm{i}\in\bar{\Omega}}^{\mathrm{n}} |\tilde{z}_i|^{\mathrm{p}} - \sum_{\mathrm{i}\in\bar{\Omega}}^{\mathrm{n}} |x_i|^{\mathrm{p}}$$

以上を整理すると

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}} \geq \sum_{\mathrm{i}\in\Omega}^{\mathrm{n}} |x_i|^{\mathrm{p}} - \sum_{\mathrm{i}\in\Omega}^{\mathrm{n}} |\tilde{z}_i|^{\mathrm{p}} + \sum_{\mathrm{i}\in\bar{\Omega}}^{\mathrm{n}} |\tilde{z}_i|^{\mathrm{p}} - \sum_{\mathrm{i}\in\bar{\Omega}}^{\mathrm{n}} |x_i|^{\mathrm{p}}$$

$\|\boldsymbol{x}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}} = \sum_{\mathrm{i}\in\Omega}^{\mathrm{n}} |x_i|^{\mathrm{p}} + \sum_{\mathrm{i}\in\bar{\Omega}}^{\mathrm{n}} |x_i|^{\mathrm{p}}$を代入すると

$$\sum_{\mathrm{i}\in\Omega}^{\mathrm{n}} |x_i|^{\mathrm{p}} + \sum_{\mathrm{i}\in\bar{\Omega}}^{\mathrm{n}} |x_i|^{\mathrm{p}} \geq \sum_{\mathrm{i}\in\Omega}^{\mathrm{n}} |x_i|^{\mathrm{p}} - \sum_{\mathrm{i}\in\Omega}^{\mathrm{n}} |\tilde{z}_i|^{\mathrm{p}} + \sum_{\mathrm{i}\in\bar{\Omega}}^{\mathrm{n}} |\tilde{z}_i|^{\mathrm{p}} - \sum_{\mathrm{i}\in\bar{\Omega}}^{\mathrm{n}} |x_i|^{\mathrm{p}}$$

$$2\sum_{\mathrm{i}\in\bar{\Omega}}^{\mathrm{n}} |x_i|^{\mathrm{p}} + \sum_{\mathrm{i}\in\Omega}^{\mathrm{n}} |\tilde{z}_i|^{\mathrm{p}} \geq \sum_{\mathrm{i}\in\bar{\Omega}}^{\mathrm{n}} |\tilde{z}_i|^{\mathrm{p}}$$

$$2\|\boldsymbol{x}_{\bar{\Omega}}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}} + \|\tilde{\boldsymbol{z}}_{\Omega}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}} \geq \|\tilde{\boldsymbol{z}}_{\bar{\Omega}}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}}$$

頑健零空間特性が成り立つことを利用して

$$2\|\boldsymbol{x}_{\bar{\Omega}}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}} + \sigma\|\tilde{\boldsymbol{z}}_{\bar{\Omega}}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}} > 2\|\boldsymbol{x}_{\bar{\Omega}}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}} + \|\tilde{\boldsymbol{z}}_{\Omega}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}} \geq \|\tilde{\boldsymbol{z}}_{\bar{\Omega}}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}}$$

$$2\|\boldsymbol{x}_{\bar{\Omega}}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}} > (1-\sigma)\|\tilde{\boldsymbol{z}}_{\bar{\Omega}}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}} \quad \cdots\cdots \quad \{(1-\sigma)\text{は正の数}\}$$

$$\tfrac{2}{(1-\sigma)}\|\boldsymbol{x}_{\bar{\Omega}}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}} > \|\tilde{\boldsymbol{z}}_{\bar{\Omega}}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}} \qquad (3\text{-}6)$$

が得られる．ここで，問題となる$\tilde{\boldsymbol{x}}$と$\boldsymbol{x}$の差を評価するため$\|\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}}$を考える．$\tilde{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x} + \tilde{\boldsymbol{z}})$なので

$$\|\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}} = \|\tilde{\boldsymbol{z}}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}}$$

$$= \|\tilde{\boldsymbol{z}}_{\Omega}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}} + \|\tilde{\boldsymbol{z}}_{\bar{\Omega}}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}}$$

さらに再び頑健健零空間特性を利用すると

$$\|\tilde{\boldsymbol{z}}_{\Omega}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}} + \|\tilde{\boldsymbol{z}}_{\bar{\Omega}}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}} < (1+\sigma)\|\tilde{\boldsymbol{z}}_{\bar{\Omega}}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}}$$

式(3-6)より

$$\|\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}} < 2\tfrac{(1+\sigma)}{(1-\sigma)}\|\boldsymbol{x}_{\bar{\Omega}}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}} = 2\tfrac{(1+\sigma)}{(1-\sigma)}\|\boldsymbol{x}_{\Omega} - \boldsymbol{x}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}} \qquad (3\text{-}7)$$

となる．Ωの定義および，$\boldsymbol{x}$が圧縮可能であることから$\|\boldsymbol{x}_{\Omega} - \boldsymbol{x}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}}$は非常に小さな値である．式(3-7)は，$\tilde{\boldsymbol{x}}$と$\boldsymbol{x}$の差の lp ノルム$\|\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|_{\mathrm{p}}^{\mathrm{p}}$は非常に小さいのである．

つまり，$\boldsymbol{x}$を圧縮センシングで圧縮したのち lp ノルムの最小化で伸長された結果$\tilde{\boldsymbol{x}}$と生データ$\boldsymbol{x}$との誤差は十分小さいといえる．すなわち圧縮可能なベクトルも圧縮センシングでわずかな誤差で圧縮できるというわけである．

3. ランダム行列による CS 行列生成

本章では従来のランダム行列を用いた CS 行列の生成方法について説明する．

3.1 ランダム行列による CS 行列の生成

2 章で述べた通り，CS 行列は零空間特性を持つ行列である必要があり，そのため，インコヒーレンス(列同士の相関)の低い行列がよい．そこで[2]などの先行研究では n 次元のランダムベクトルを m 個並べた行列でこれを行う方法が

Vol.2016-CG-165 No.2
Vol.2016-DCC-14 No.2
Vol.2016-CVIM-204 No.2
2016/11/9

提案されている．ランダムに作られた行列であれば列と列の相関も高くならないはずという考え方である．

ただし，ランダムなら何でもよいというわけではない．s スパースな m 次元ベクトルを圧縮したい場合，式(4-1)が成り立つように圧縮後の次元数 n を決定すれば，高い確率で CS 行列を構築できるとされている[2].

$$n \geq C s \log\left(\frac{m}{s}\right) \qquad (4\text{-}1)$$

ここで，C は個々の事例に依存する定数である． [1][2].

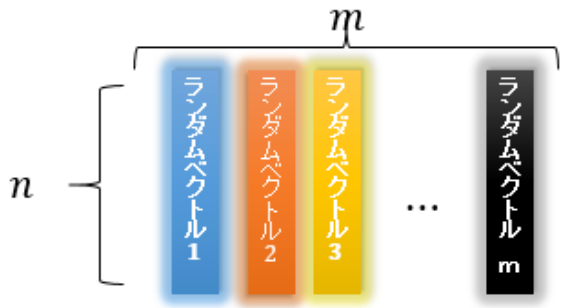


図 2　ランダムベクトルを並べて CS 行列を生成する

3.2 ランダム行列への疑問

ランダムに行列を作った場合，圧縮センシングで圧縮し正しく伸長できるかどうか検証した．そのシミュレーション実験および実画像での実験の結果は 5 章を参照されたい．

本研究ではランダム行列は以下のように生成する．まず大きさは 6 行 8 列と決定する．続いて 499 から－500 の間の乱数(整数)を各成分に当てはめ，各列の l2 ノルムが 1 になるように正規化する．正規化は[1][2]に基づいている．

この方法で 20 個のランダム行列を生成した．20 個のランダム行列を用いた予備評価実験を以下にまとめて示す．

成功率が 1%未満の組み合わせが発生した行列	14 個
成功率が 50%未満の組み合わせが発生した行列	19 個
すべての組み合わせで成功率が 75%以上の行列	1 個
すべての組み合わせで成功率が 100%の行列	0 個

総じて，成功する個所では高確率で成功するものの，失敗率が高い組み合わせもあるという結果が目立った．20 回の試行で 1 回しか圧縮精度の高い行列が生成されなかった(このチャンピオン行列を以下$\boldsymbol{R_{cs}}$と呼称する)．このことから文献[1]などで提案されているランダム行列による圧縮の有効性に疑問が残ると考えられる．

4. CS 行列生成の提案手法

本章では，従来のランダム行列に代わる CS 行列の生成方法を提案する．提案する CS 行列の基本設計方針はインコヒーレンス(列同士の相関)ができるだけ低く，データの奇数行と偶数行を同時考慮することである．

4.1 CS 行列の生成の方針

3 章で議論した以外に，ランダムに行列を生成する方法には以下のような 4 つの問題点もあげられる．

① CS 行列でない場合がある
② CS 行列であるかどうか計算するだけでも計算コストがかかる
③ 再現性の確保が困難である．

いずれもランダムであるが故の不定性に起因する問題である．これらの問題を解決するために，本研究では，ランダムな方法に頼らず CS 行列を生成する方法について議論する．

文献[2]によると，以下の行列 $\boldsymbol{A}$ について

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/\alpha \\ 0 & 1 & 1/\alpha \end{bmatrix}$$

定数αが$|\alpha| < 2$を満たせば, 1 スパースベクトルを行列 $\boldsymbol{A}$ による圧縮センシングで圧縮して l1 ノルム最小化による伸長が可能である．本研究ではまず，$\alpha = 1$とした行列

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

による圧縮と伸長を考える．例えば，ベクトル$\boldsymbol{x} = [0 \quad 0 \quad 3]^t$を圧縮すると

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y} = [3 \quad 3]^t$$

となる．ベクトル$\boldsymbol{y}$を伸長した結果$\tilde{\boldsymbol{x}}$は以下の通りである．

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = [0 \quad 0 \quad 3]^t$$

この場合，1 スパースベクトルを圧縮し，伸長することに成功している．さらに零成分の場所ごとに 2000 個のランダムな(1 スパース)ベクトルを圧縮し, 伸長した場合の成否も調べた結果

第 1 成分が非零成分である場合　2000 回成功
第 2 成分が非零成分である場合　2000 回成功
第 3 成分が非零成分である場合　2000 回成功

となり，1 スパースなベクトルを圧縮し，全て正しく伸長できることを確認した．

この行列 $\boldsymbol{A}$ の 1 列目と 2 列目に注目すると，2 次の単位行列

$$\mathrm{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と全く同じである．3 章で述べたインコヒーレンスを考えた場合，単位行列のインコヒーレンスは 0 であり最小値となる．つまり，単位行列を利用することでインコヒーレンスを小さくすることができる．

4.2 CS 行列の生成

以上の結果を踏まえて，我々は単位行列に複数の列を加えることで CS 行列を生成できると考える. 以下の行列$\boldsymbol{N}$のインコヒーレンス値が小さい例である．

ⓒ2016 Information Processing Society of Japan

Vol.2016-CG-165 No.2
Vol.2016-DCC-14 No.2
Vol.2016-CVIM-204 No.2
2016/11/9

$$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&1&0&1\end{bmatrix}$$

ここで，$\alpha=1$として，6 次の単位行列の右側に互いの相関が 0 になる列ベクトルを 2 つ追加した．しかし，5 章で示すこの行列によるシミュレーション実験の結果を見ると，非零成分の組み合わせによって失敗してしまう場合があった．失敗した例を調べた結果，

Ⅰ. 第 1，3，5 成分のうち 2 成分または第 2，4，6 成分のうち 2 成分が非零

Ⅱ. 第 7 成分と第 8 成分以外の 6 成分いずれか 2 成分が非零

Ⅲ. 2 非零成分の符号が同じ

という 3 つの特徴があるベクトルが多く見られた. 例えば，$\boldsymbol{x}=[2\ 0\ 3\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^t$のようなベクトルでは失敗しやすかったということである．本研究で伸長方法として採用している OMP 法は, 行列の列との相関(内積の絶対値)の高い成分から決定していくという特徴があるが，これが原因であると考えられる．例えば$\boldsymbol{x}=[2\ 0\ 3\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^t$の場合，圧縮結果は$\boldsymbol{y}=[2\ 0\ 3\ 0\ 0\ 0]^t$となるが, 繰り返しの 1 回目において，$\boldsymbol{N}$の第 1 列との相関は 2，第 3 列との相関は 3 となる．このどちらかが決定されればいいのだが，第 7 列との相関は 5 となり，この第 7 列が選ばれ失敗する．

この問題を回避するために，本論文では，$\alpha=2$とし，行列$\boldsymbol{N}$の改良版

$$\boldsymbol{N}'=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0.5&0\\0&1&0&0&0&0&0&0.5\\0&0&1&0&0&0&0.5&0\\0&0&0&1&0&0&0&0.5\\0&0&0&0&1&0&0.5&0\\0&0&0&0&0&1&0&0.5\end{bmatrix}$$

を提案する．これによって，上記Ⅰ,Ⅱ,Ⅲのような場合でも$\boldsymbol{N}'$の第 1 列との相関は 2，第 3 列との相関は 3，第 7 列との相関は 2.5 となり，第 3 列が選ばれる．また，繰り返しの 2 回目は条件が変わり，第 2 列が選ばれて成功となる．確かにこの行列でも失敗は確認されたが，全体的に成功率は高く圧縮センシングに有効な行列であるといえる．

5. 圧縮センシングによる圧縮実験

本章では，提案手法の有効性を確認するために，シミュレーション実験と圧縮センシングを用いて実際の画像データの圧縮実験を行い，その結果を示す．

5.1 シミュレーション実験

まず，従来研究のランダム行列による圧縮センシングと 5 章で提案した$\boldsymbol{N}$と$\boldsymbol{N}'$による圧縮センシングのシミュレーション実験を行う．

(1) 実験方法

まず，3 章で示したランダムで生成した行列の中のチャンピオン行列$\boldsymbol{R_{cs}}$を含む 20 個のランダム行列と 4 章で提案した$\boldsymbol{N}$と$\boldsymbol{N}'$多数の 2 スパースベクトルを圧縮した．非零成分の組み合わせごとに 2000 回ずつ試行した．例えば，第 1 成分と第 2 成分にそれぞれ非零成分(499~－500 の乱数)をあてはめ，残りを 0 にして 2 スパースベクトルを作る．そのベクトルをそれぞれで圧縮し, OMP 法で伸長した結果が正しいかどうかを調べる．理想的なスパースベクトルでは圧縮前のベクトルが完全に正しく伸長されるはずだが，それでも計算誤差が生じる可能性がある．そこで，今回の評価実験では，いずれかの成分の誤差の絶対値が 0.1 を超えた場合に正しくない，つまり圧縮センシングは失敗したとみなし，すべての成分の誤差の絶対値が 0.1 以下であれば成功とする．

(2) 実験結果

まずランダム行列の中で最も成功率のよかった$\boldsymbol{R_{cs}}$による圧縮の結果を表 1 示す.

表 1　ランダム行列$\boldsymbol{R_{cs}}$によるシミュレーション結果

比零成分	1	2	3	4	5	6	7	8
1		2000	1884	1898	1812	1866	1920	2000
2			1755	2000	1725	1883	1841	2000
3				2000	1757	1966	2000	1999
4					2000	1952	1970	2000
5						1880	1613	1918
6							2000	2000
7								2000
8								

この表は比零成分の組み合わせ別に成功回数を示したもので，例えば 2,3 の数字は第 2 成分と第 3 成分に比零成分がある場合の成功回数を示す．全体の成功数は 53639 回で成功率はおよそ 95.78%である．

続いて提案行列$\boldsymbol{N}$による圧縮の結果を表 2 に示す.

表 2　行列$\boldsymbol{N}$によるシミュレーション結果

比零成分	1	2	3	4	5	6	7	8
1		2000	524	1999	1015	2000	2000	2000
2			2000	513	1999	993	2000	2000
3				2000	1152	2000	2000	2000
4					2000	1136	2000	2000
5						2000	2000	2000
6							2000	2000
7								2000
8								

組み合わせ別に成功数に極端な偏りがみられた．

最後に提案行列$\boldsymbol{N}'$による圧縮の結果を表 3 に示す.

ⓒ2016 Information Processing Society of Japan

Vol.2016-CG-165 No.2
Vol.2016-DCC-14 No.2
Vol.2016-CVIM-204 No.2
2016/11/9

表 3　行列$\boldsymbol{N'}$によるシミュレーション結果

比零成分	1	2	3	4	5	6	7	8
1		2000	1999	2000	2000	2000	1808	2000
2			2000	1999	2000	2000	2000	1790
3				2000	2000	2000	1775	2000
4					2000	1999	2000	1784
5						2000	1796	2000
6							2000	1807
7								2000
8								

この表では，$\boldsymbol{R_{cs}}$と比較して成功数の多いものを赤文字，少ないものを青文字とした．合計でも成功数が 54757 回で成功率が 97.78%となり，$\boldsymbol{N'}$のほうが優れているといえる．

5.2　流体データ圧縮実験

続いて流体データを提案行列$\boldsymbol{N'}$またはランダム行列$\boldsymbol{R_{cs}}$で圧縮して伸長しその誤差を計測する．今回は人間がくしゃみをした際の時刻ごとの気温の変化のデータを圧縮する．このデータ 1 時刻分を可視化したものを図 3 に掲載する．

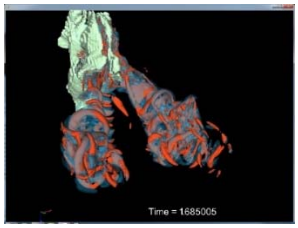


図 3　流体データ可視化

このデータは xyz の 3 次元空間のデータであるが，巨大すぎるため$0 \le z \le 180$を 4 区間に分割しそれぞれの領域からからランダムに選ばれた$z = 5,63,114,170$のみを圧縮する．圧縮可能性を得るため，この実験では前の時刻との差分をとっている．流体は穏やかに変化すると考え，微小時間ではあまり変化しないと考えたためである．次の図 5-1～図 5-4 のグラフに各 z 座標の結果を示す．すべて縦軸が 1 座標ごとの誤差の大きさの合計，横軸が y 座標である．

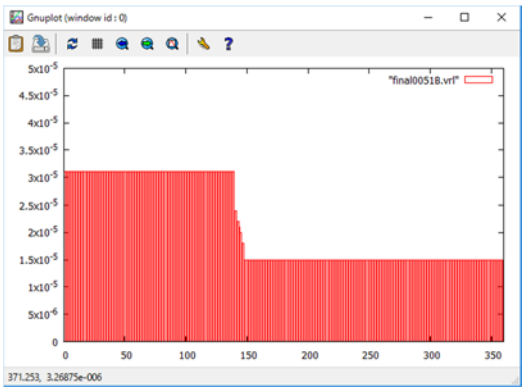


図 4-1　データ圧縮の結果(z=5)

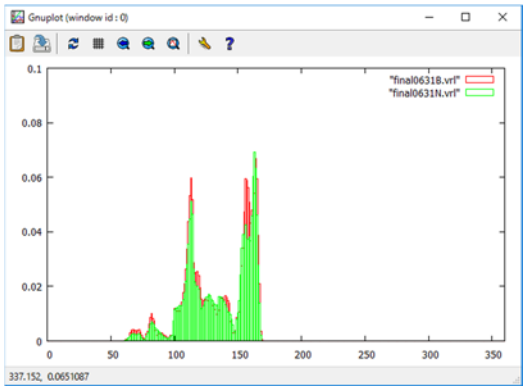


図 4-2　データ圧縮の結果(z=63)

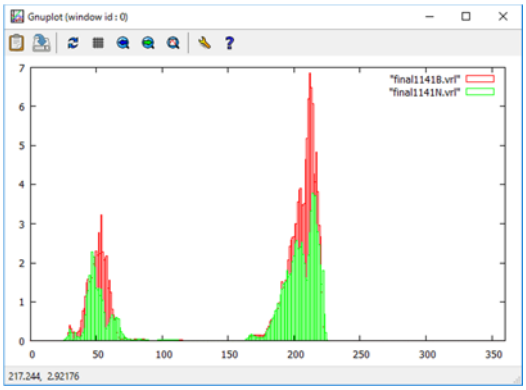


図 4-3　データ圧縮の結果(z=114)

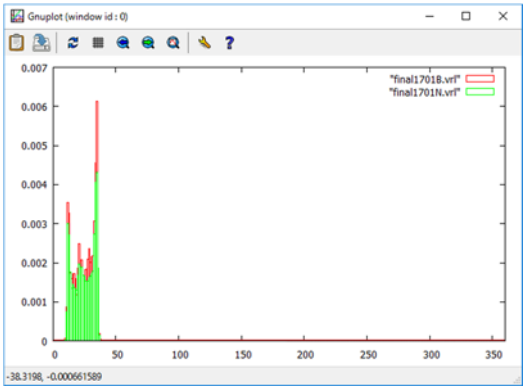


図 4-4　データ圧縮の結果(z=170)

いずれのグラフでも赤がランダム行列$\boldsymbol{R_{cs}}$による圧縮と伸長の誤差で緑が提案行列$\boldsymbol{N'}$による圧縮と伸長の誤差である．ランダム行列$\boldsymbol{R_{cs}}$の誤差が小さい部分もあるものの多くの場合提案行列$\boldsymbol{N'}$の結果のほうが誤差が小さいことが見て取れる．シミュレーションだけでなく実際のデータでも提案行列$\boldsymbol{N'}$は有効である．

5.3　画像データ圧縮実験

実際の画像データなどを圧縮し伸長する実験の結果を示す．いずれもまず離散コサイン変換で圧縮可能にし，そこに行列をかけることで圧縮する．伸長した後に逆コサイン変換を適用して元の画像に戻している．画像データは画像データベース SIDBA のもの 3 枚を使用し，縦横を 55%

ⓒ2016 Information Processing Society of Japan

Vol.2016-CG-165 No.2
Vol.2016-DCC-14 No.2
Vol.2016-CVIM-204 No.2
2016/11/9

に縮小した．いずれも上が原画像を縮小したもの，左下が提案行列$\boldsymbol{N'}$で右下がランダム行列$\boldsymbol{R_{cs}}$による結果である．



図 5-a　LENNA 原画像



図 5-b　提案行列$\boldsymbol{N'}$



図 5-c　ランダム行列$\boldsymbol{R_{cs}}$



図 6-a　AIRPLANE 原画像



図 6-b　提案行列$\boldsymbol{N'}$

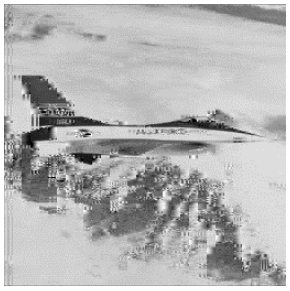


図 6-c　ランダム行列$\boldsymbol{R_{cs}}$

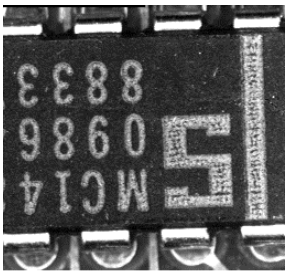


図 7-a　Text 原画像

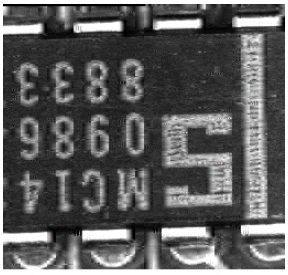


図 7-b　提案行列$\boldsymbol{N'}$

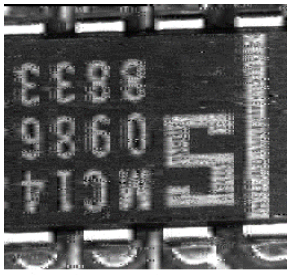


図 7-c　ランダム行列$\boldsymbol{R_{cs}}$

いずれも左の提案行列$\boldsymbol{N'}$による結果のほうが画像が綺麗なのが分かる．

上の 3 枚に加えて BRIDGE，Lighthouse，Lax の 3 枚の画像を圧縮して伸長した結果の 1 画素当たりの誤差をまとめた表を以下の図 8 に示す．右から LENNA，AIRPLANE，BRIDGE，Lighthouse，LAX である．

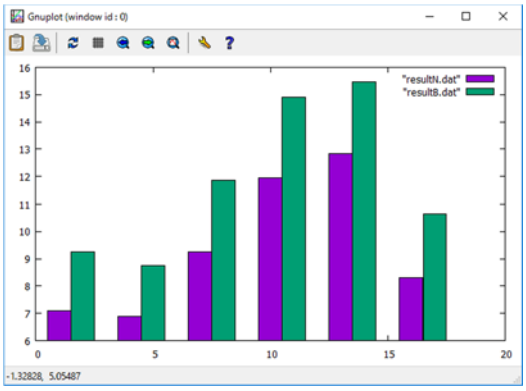


図 8　1 画素当たりの誤差

いずれも左(紫)が提案行列$\boldsymbol{N'}$の結果で右(緑)が$\boldsymbol{R_{cs}}$の結果である．数値で見ても提案行列$\boldsymbol{N'}$のほうが誤差が小さいことが分かる．

6. おわりに

本論文では圧縮センシングに使う CS 行列の生成方法を提案した．比較実験より，提案した CS 行列$\boldsymbol{N'}$は一般的とされているランダム行列よりよい精度で圧縮することができた．しかも，ランダムな方法に頼らず生成できたため，

ⓒ2016 Information Processing Society of Japan

Vol.2016-CG-165 No.2
Vol.2016-DCC-14 No.2
Vol.2016-CVIM-204 No.2
2016/11/9

CS 行列であることが保証されており再現性にも問題ない.

しかし，本研究が残した課題は 2 つある.

1 つ目は$\boldsymbol{N'}$で圧縮すると正しく伸長できない場合があることである. ランダムに生成した$\boldsymbol{R_{cs}}$より精度が向上したとはいえ，どうしても失敗するケースがあった.

2 つ目は圧縮効率がよくないこと．6 行 8 列の行列によって圧縮したため，圧縮ごとのデータの大きさは圧縮前のデータの大きさの 75%の大きさにとどまっている.

どちらもの問題も伸長方法と組み合わせて考える，規模を大きくして考えるなどして改善を図りたっていきたいと思う.

謝辞

本研究の一部は，文部科学省科学研究費補助金基盤研究(c)15K01331 の補助を受けている.

参考文献

1) E.J.Cand'es, M.B. Wakin,"An Introduction to Compressive Sampling", IEEE Signal Processing Magazine, Vol.25, No.2, pp.21-30, March 2008
2) 平林晃，"[チュートリアル講演]Compressed Sensing ―基本原理と最新研究動向―"，信学技法，CAS2009-，VLD2009-1，(2009).
3) 三村和史，"圧縮センシング　–疎情報の再構成とそのアルゴリズム–"，数理解析研究所講究録, No.1803, pp.26-56, (2012.08)
4) 山本隆博，川村正樹，"Wet Paper 符号に対する IST 法の導入とその問題点に関する検討" 電子情報通信学会技術研究報告. EMM, マルチメディア情報ハイディング・エンリッチメント，113 巻 66 号 pp.19-24，(2013-05-17)
5) 岩田賢一，森井昌克，植松友彦，"ファイルのダイエット―ファイル圧縮の基礎知識―"，情報の科学と技術，47 巻 1 号，pp.17-23，(1997).
6) 小林正明，鎌田清一郎，"カラードキュメント画像の可逆圧縮方法"，電子情報学会論文誌,D-II, Vol.J85-DII, No.4, pp.584-597, (2002).
7) 郡光則，"データハウス向け高性能データ圧縮方式"，情報処理学会論文誌，Vol47，No.SIG 13(TOD 31)，(2006).
8) 杉森吉夫, 木俣省英, 荒木洋哉，"文字放送における図形情報ならびに音楽情報の圧縮伝送技術"，テレビジョン学会誌，36(8)，pp.696-703，(1982-08-20)

付録 OMP(Orthogonal Matching Pursuit)法

圧縮センシングを行う際，圧縮されたベクトルはノルム最小化によって行うが，ノルムの最小化には計算コストがかかる．そこで，[3]をはじめとした論文でいくつかの伸長方法が提案されているが，本研究では OMP 法[3]を採用した．以下にその概要を記す.

OMP 法

入力 1： 圧縮結果のベクトル$\boldsymbol{y}$

入力 2： 圧縮に用いた行列$\boldsymbol{N}$

初期化 1：正解候補を$\hat{\boldsymbol{x}}$を$\boldsymbol{0}$ベクトルで初期化する

初期化 2：添え字集合Γを空集合で初期化する

初期化 3：反復回数 t を 0 で初期化する

出力：伸長結果のベクトル$\hat{\boldsymbol{x}}$

アルゴリズム

1. $|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{N}\hat{\boldsymbol{x}}|_2$が閾値以下または t が一定数以上の場合終了する
2. 行列Nから$(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{N}\hat{\boldsymbol{x}})$との内積が最大の列ベクトルを取り出す(その添え字を集合Γに加える)
3. $\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{N}_\Gamma\hat{\boldsymbol{x}}_\Gamma\|_2$を最小にする$\hat{\boldsymbol{x}}$を求める(擬似逆行列$\boldsymbol{N}_\Gamma{}^+$を使う)
4. t＝t+1 と更新してから 1 に戻る

ここで, N_ΓはNのうち添え字がΓに含まれない列ベクトルをすべて $\boldsymbol{0}$ にしたものである.

$$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix}\nu_{11} & \nu_{12} & \nu_{13} & \nu_{13} & \nu_{14}\\ \nu_{21} & \nu_{22} & \nu_{23} & \nu_{24} & \nu_{25}\\ \nu_{31} & \nu_{32} & \nu_{33} & \nu_{34} & \nu_{35}\end{bmatrix},\Gamma=\{1,2,4\}\text{の時,}$$

$$\boldsymbol{N}_\Gamma=\begin{bmatrix}\nu_{11} & \nu_{12} & 0 & \nu_{13} & 0\\ \nu_{21} & \nu_{22} & 0 & \nu_{24} & 0\\ \nu_{31} & \nu_{32} & 0 & \nu_{34} & 0\end{bmatrix}$$

ここで，$\hat{\boldsymbol{x}}_\Gamma$は $\boldsymbol{x}$のうち添え字がΓに含まれない成分をすべて 0 にしたものである.

$\boldsymbol{x}=[x_1\ x_2\ x_3\ x_4],\Gamma=\{1,3\}$の時,

$\hat{\boldsymbol{x}}_\Gamma=[x_1\ 0\ x_3\ 0]$

ここで, 擬似逆行列$\boldsymbol{N}^+$は 行列$\boldsymbol{N}$について$\boldsymbol{N}\boldsymbol{N}^+\boldsymbol{N}=\boldsymbol{N}$および$\boldsymbol{N}^+\boldsymbol{N}\boldsymbol{N}^+=\boldsymbol{N}^+$を満たす行列である．正則行列の場合は逆行列がこれに該当し, 正則でない行列でも$\boldsymbol{N}^+$は 1 つだけ存在する.

ⓒ2016 Information Processing Society of Japan