

Delaunay 図の L_p Delaunay 図に対する形状最適性の実験的評価

Experimental evaluations of the shape optimality of the Delaunay diagram in L_p Delaunay diagrams

岩本 龍馬†
Ryoma Iwamoto

今井 敏行‡
Toshiyuki Imai

1 はじめに

ある領域を細かく分けて考えようとするとき、分割する図形として最も少ない頂点数で作成できる簡単な図形として三角形が用いられる [3]. 凸多角形内に点集合があるとき、多角形凸包の頂点すべての三角形を用いて凸多角形の内部を三角形で分割することを三角形分割という. 三角形分割の仕方は一意には定まらないが、一般につぶれた三角形が少ない方がよいとされる. つぶれた三角形を一意に定義することもできないが、内角が小さい、もしくはアスペクト比が大きいなどといった特徴をもつ三角形である. 図 1 が良い三角形の例で図 2 がつぶれた三角形の例である. ここで、アスペクト比とは三角形の外接円の半径を内接円の半径で割った値である. つぶれた三角形は良い三角形に対して同じ大きさの外接円を持つが、内接円が小さく、小さな内角を持つ. 三角形分割の組み合わせの中で、最小角最大、最大外接円最大等の最適性をもつものにドロネー図がある. 本研究では、ドロネー図の点の接続条件を変化させて、ドロネー図の形状最適性について実験的評価を行った.

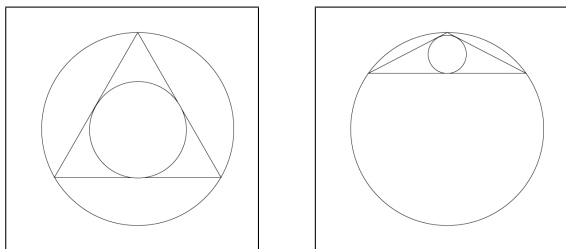


図 1: 良い三角形の例 図 2: つぶれた三角形の例

2 ドロネー図

平面上の n 点からなる集合 $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ が与えられているとする. P の 2 点 p_i, p_j を通る円を、内部に他の点を含まないように描くことができるとき、線分 p_i, p_j をドロネー辺という. たとえば、 $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ とし、線分 p_1p_2, p_3p_4 が交差するように配置

されていたとする (図 3). この 2 線分のうち、一方はドロネー辺であり、他方はドロネー辺でない. これにどちらかの線分のみが入る円を描くと図 4 のようになり、円内部に含まれる p_1p_2 がドロネー辺であることがわかる. これより、一般の $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ 全体で考えたとき、ドロネー辺は交差しないことを示している.

ドロネー辺 p_i, p_j に対して、 p_i, p_j を通る円を少しずつ大きくしていくとき、初めて出会うほかの点を p_k とすると、線分 p_ip_k, p_jp_k もドロネー辺である. したがって、 P のすべてのドロネー辺を描くと、三角形 p_i, p_j, p_k が現れる. また、ドロネー辺同士が交差しないので、全てのドロネー辺を描くと三角形分割になる. この三角形分割のことをドロネー図と呼ぶ.

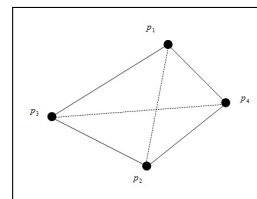


図 3: ドロネー辺の例

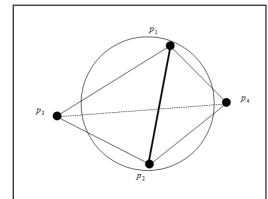


図 4: 外接円でドロネー辺を判別

3 研究の目的

ドロネー図は三角形分割の中で、三角形の内角を辞書式順序に昇順に並べたとき最大であり、三角形の外接円と辞書式に降順に並べたときに最小であるという意味で、つぶれていない三角形による三角形分割としての最適性をもつ. 3 次元でも同様に四面体分割として、ドロネー図を考えることができるが、つぶれた四面体が存在する. 3 次元でつぶれた三角形、四面体を減少させるために、ドロネー図を一般化した L_p ドロネー図を利用することを考える. しかし、一般に 3 次元において L_p ドロネー図の実験の実装は困難である. 2 次元でもドロネー図は、最適性の証明があるため、十分に調べられていない. そこで、 L_p ドロネー図を 3 次元で実験する前準備として、2 次元で L_p ドロネー図を実験し、三角形の形状がどのように変化するか比較

† 和歌山大学大学院, Graduate school of Wakayama university, ‡ 和歌山大学, Wakayama university

する。

4 L_p ドロネー図

三角形分割の両側に三角形をもつ辺 $p_i p_j$ に対して、両側の三角形を $\triangle p_i p_j p_k$, $\triangle p_j p_i p_l$ とする。 $\triangle p_i p_j p_k$ の外接円が p_e を含むことと、 $\triangle p_j p_i p_l$ の外接円が p_k を含むことは同値であり、このとき三角形分割から辺 $p_i p_j$ を消去し、辺 $p_k p_l$ を追加することをフリップ操作という。任意の三角形分割からフリップ操作を任意の順に続けていくとドロネー図になって、それ以上フリップ操作が続けられなくなることが知られている。2次元ドロネー図のフリップ操作で用いる中心を点 (a, b) とする三角形の外接円の方程式はユークリッド空間において、 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ と表される。この円の方程式を L_p 空間での式に変更したものが L_p ドロネー図である。ユークリッド空間上ではある2点 (x, y) , (a, b) 間の距離 D は $D^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$ と表されるが、 L_p 空間上では距離は $D^p = |x-a|^p + |y-b|^p$ と表される。したがって、2次元 L_p 空間でのフリップ操作で用いる円の方程式は $|x-a|^p + |y-b|^p = r^p$ に変更される。この円を L_p 円と呼ぶ。 L_p 円を用いてフリップ操作を行うことで、作成される三角形分割を L_p ドロネー図と呼ぶ。ドロネー図は L_2 ドロネー図である。

5 実験方法

5.1 条件1：点の密度を一様にした場合

対象領域として正方形を考える。そしてこの正方形の中に5000点をランダムに配置する。その点群からドロネー図および L_p ドロネー図を作成し、 p の値を1.2から3.8の値域で変更して比較する。比較方法は、メッシュの質のよさをはかるための尺度として、各三角形のアスペクト比（外接円の半径/内接円の半径）を用いる。理想的な三角形である正三角形の場合、アスペクト比は2となる。図5、図6に実験で用いていないドロネー図の各アスペクト比の個数を示す。アスペクト比2から6までは安定して個数が減り続けているのに対して、10以上はそのような傾向がみえず、不安定である。したがって、アスペクト比が10以上の三角形がフリップ操作でも残ってしまった形の悪い部分とみなす。また、形の悪い部分として大部分を占めているアスペクト比2から4の部分を調べ、どのような増減をするか計測する。なお、二次元において p の値が2のとき最適であるという事実から、3次元において L_p ドロネー図の実験を行った場合も良化を期待できるのは p が2に近い場合であると予想する。そこで、 p を1.8から3.8までの間で変化させてデータを取る。

5.2 条件2：点の密度を変更した場合

有限要素法では、解が激しく変化する領域とそうでない領域では、自動分割する場合にメッシュの密度が異なる。解が激しく変化する領域では、メッシュが粗すぎると十分な精度が得られないため、多くの点置いて細かく分割する必要がある。[1] 領域となる正方形の縦横比半分の大きさの領域を内部に用意し、その内部に全5000点のうち4000点を集中させて実験を行う。

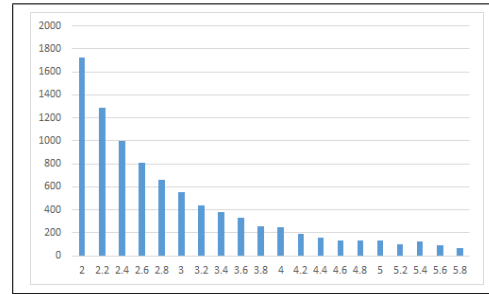


図5: アスペクト比6未満の三角形の個数 (横軸は三角形の個数, 縦軸はアスペクト比を表す)

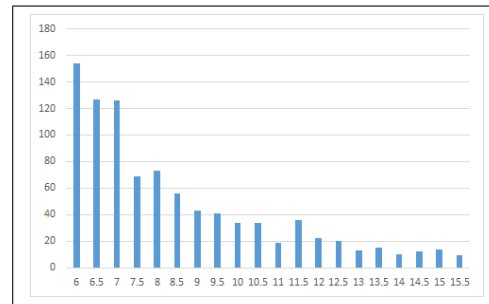


図6: アスペクト比6以上の三角形の個数 (横軸は三角形の個数, 縦軸はアスペクト比を表す)

6 結果

6.1 条件1

図7より、 $p = 2$ 周辺から離れるほどアスペクト比2から4、つまりつぶれていない三角形の個数は減少していく。 $p = 2$ から $p = 3.8$ までの変化は比較的緩やかに減少しているのに対して、 $p = 2$ から $p = 1.2$ までの変化は急な減少である。逆に図8より、アスペクト比10以上のつぶれた三角形は $p = 2$ 周辺から離れるほど個数が増大していく。 $p = 2$ から3.8までの変化は比較的緩やかに増大しているのに対して、 $p = 2$ から $p = 1.2$ までの変化は急な増大である。

6.2 条件2

図9の様に、 $p = 2$ 周辺から離れるほどアスペクト比2から4の三角形の個数が減少していく傾向は条件

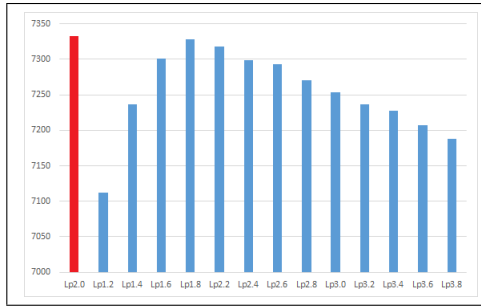


図 7: アスペクト比 2 から 4 である三角形の個数
(横軸は p の値, 縦軸は個数を表す)

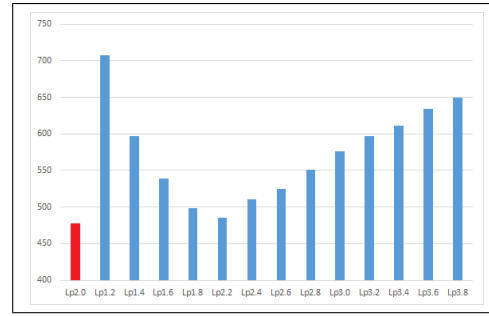


図 10: アスペクト比が 10 以上である三角形の個数
(横軸は p の値, 縦軸は個数を表す)

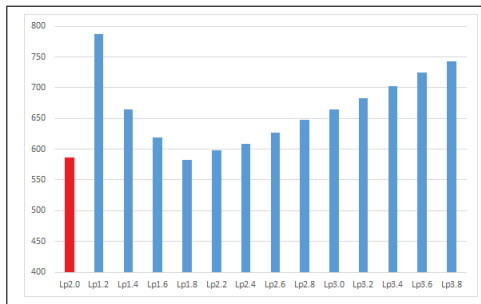


図 8: アスペクト比が 10 以上である三角形の個数
(横軸は p の値, 縦軸は個数を表す)

1 と同じである。また、図 10 のアスペクト比 10 以上のグラフでも条件 1 と同様の傾向が見られる。

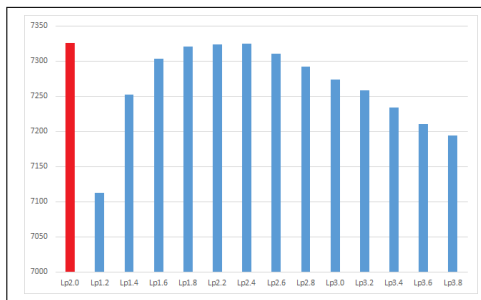


図 9: アスペクト比 2 から 4 である三角形の個数
(横軸は p の値, 縦軸は個数を表す)

6.3 考察

最も良い三角形分割は $p = 2$ の場合である。これは最小角最大, 最大外接円最小などの最適性が証明済みなのが示している。アスペクト比, 角度の良し悪しで見てもほぼ最も優れた数値を示していた。さらに, 他の p との優位性として, 計算が非常に簡単なことが挙げられる。次に良い三角形分割であったのは $p = 2$ に近い分である。 $p = 1.8, p = 2.2$ などアスペクト比の比率においてほぼ悪化をみせていない。アスペクト比 10

以上の比率の増加が $p = 2$ の場合に比べて, 1%におさまっている部分として, 条件 1 条件 2 で共通している部分は $1.6 < p < 2.8$ の値である。つまり, $1.6 < p < 2.8$ の値域ならば, $p = 2$ に比べてあまり悪化していないといえる。逆に, $p = 2$ から離れるほど良い三角形の個数が悪化する。また, $p < 2$ の方が $p > 2$ よりも悪化が急激である。3 次元 L_p ドロネー図を作成する上で良化している可能性のある部分としては, $p = 2$ を除く $1.6 < p < 2.8$ の部分であると推測する。今後の課題として, L_p ドロネー図は多くの手順を踏む必要がある。そのため, 3 次元に適用し, つぶれた四面体を減らせたとしても, それが従来の方法と比べてあまり有効な手段とは言えない可能性がある。

参考文献

- [1] 今井浩 今井桂子 著, 数理解析研究所講究録 934 巻 149-166, 3 三角形分割と凸多面体, 1996
- [2] 杉原厚吉 著, なわばりの数理モデル -ボロノイ図からの数理工学入門-, 共立出版, 2009
- [3] 三好俊郎 著, 有限要素法入門, 培風館, 2008