任意の $\mathcal{L}_p$ 距離による検索を可能とする距離変換規則

木村彰宏[†,††] 大西建輔[†††] 小早川倫広[†]
星守[†] 大森匡[†]

多次元データ集合に対して ε 近傍検索を実行するための索引構造は，索引構造生成に用いられる距離関数に依存する．1 つの索引構造で多くの距離関数での検索を可能とするために，Yi らは $\mathcal{L}_1$ 距離および $\mathcal{L}_\infty$ 距離での ε 近傍検索を $\mathcal{L}_2$ 距離（ユークリッド距離）での近傍検索として取り扱うための距離変換規則と，距離変換規則を用いた検索の枠組を示した．本稿では，$\mathcal{L}_v$ 距離で構築された索引構造に対して，任意の $\mathcal{L}_p$ 距離による ε 近傍検索を可能とする距離変換規則を提案し，距離変換規則を適用することによって生じる検索対象となる空間の拡大について解析を行う．実際に，人工データと楽曲データに対して $\mathcal{L}_v$ 距離で索引構造を構築し，その索引構造に対して $\mathcal{L}_v$ 距離変換規則を適用し，$\mathcal{L}_p$ 距離で検索を行った．その結果，1 つの索引構造のみを用いて任意の $\mathcal{L}_p$ 距離で検索が実現されていること，実験結果が検索対象となる空間の拡大に関する解析に即していることを確認した．

Distance Conversion Rule for Arbitrary $\mathcal{L}_p$ Distance

Akihiro Kimura,[†,††] Kensuke Onishi,[†††]
Michihiro Kobayakawa,[†] Mamoru Hoshi[†] and Tadashi Ohmori[†]

For high-dimensional data space, index structure for ε-neighbor search depends on a distance function which was used when the structure was constructed. To construct a "universal" index structure applicable to various distance functions, Yi et al. have already proposed a conversion rule which transforms $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{L}_\infty$ distance into $\mathcal{L}_2$ distance and a framework of retrieval based on the conversion rule. In this paper, we propose a generalized conversion rule which transforms arbitrary $\mathcal{L}_p$ distance into $\mathcal{L}_v$ distance, and analyze the performance of retrieval of the proposed conversion rule by the volume of retrieval range using our method. We constructed index structures based on $\mathcal{L}_v$ distance for random data and music data. For each index structure, we execute ε-neighbor search by $\mathcal{L}_p$ distance using $\mathcal{L}_v$ distance conversion rule. From experiments, we confirmed that our method achieved ε-neighbor search by arbitrary $\mathcal{L}_p$ distance with only one index structure and that the results of experiments were similar to the analysis of performance of retrieval by the volume.

1. はじめに

時系列データやマルチメディアデータに対して類似検索を行う場合，特徴量ベクトルで張られるデータ空間に対して作成された索引構造を用いて ε 近傍検索が行われる．ε 近傍検索を効率的に行うための索引構造として，R-tree[5]，SS-tree[11]，SR-tree[7]，VP-tree[13]，M-tree[4]，GNAT[2]，VA-file[10] など数多く提案されている．ここにあげた以外にも多くの索引構造が提案されており，それらの索引構造に関しては，Böhm による概説[1]，Chávez による概説[3] などがある．これらの索引構造のほとんどは，ある特定の距離関数（通常はユークリッド距離）を用いての検索を想定しており，索引構造もその距離関数を用いて構築されている．すなわち，索引構造は構築に用いる距離関数によって異なる．

Yi らは，多モデル対応（multi-modality support）という概念を提案した[12]．この概念は，データ空間には様々な類似度モデルが導入される可能性があり，そのデータを扱うためのデータ構造や索引構造は，そのどのモデルに対しても，対応が可能であるように索引構造を構築するという考えである．最も単純な実現方法としては，いくつかのモデルに対する索引構造をそれぞれ構築しておくという方法がある．しかしながら，この方法は，モデルごとに索引構造を作る必要があり，それに応じた記憶領域が必要となってしまう．もし，

† 電気通信大学大学院情報システム学研究科
Graduate School of Information Systems, University of Electro-Communications
†† NEC フィールディング株式会社
NEC Fielding, Ltd.
††† 東海大学理学部情報数理学科
Department of Mathematical Science, Tokai University

1つの索引構造だけで，多くのモデルでの問合せが行える構造が構築できれば，索引構造の構築コストや記憶領域の削減が可能となる．Yi らは，扱う類似度モデルとして，$\mathcal{L}_p$ 距離（ミンコフスキー距離）を対象に，多モデル対応のためのアイディアを提案した．そのアイディアは，$\mathcal{L}_p$ 距離による検索を実現するために，$\mathcal{L}_2$ 距離（ユークリッド距離）で構築された索引構造と距離変換規則を用いて問合せ半径を適切に拡大するというものである．彼らは，$\mathcal{L}_1$ 距離と $\mathcal{L}_\infty$ 距離から $\mathcal{L}_2$ 距離への変換規則を示したが，それ以外の $\mathcal{L}_p$ 距離（$3 \leq p < \infty$）に関しては，距離変換規則が導出できると述べているだけで実際には示していない．また，Lee らは Minimum distance という距離に対して Yi らの方法を適用している[8]．すでに Yi ら，Lee らとも，$\mathcal{L}_2$ 距離で構築された索引構造に対して多モデル対応を実現するための手法を提案しているが，ある $\mathcal{L}_v$ 距離で構築された索引構造に対して，任意の $\mathcal{L}_p$ 距離での検索を可能にする提案は，これまでなされていない．

我々は，ある $\mathcal{L}_v$ 距離（$v = 1, 2, \ldots, \infty$）で構築された索引構造に対して，任意の $\mathcal{L}_p$ 距離（$p = 1, 2, \ldots, \infty$）による ε 近傍検索を可能とするための距離変換規則，すなわち，任意の $\mathcal{L}_p$ 距離を $\mathcal{L}_v$ 距離に置き換えることのできる距離の変換規則，$\mathcal{L}_v$ 距離変換規則を提案する．そして，その変換規則を適用することによって生じる検索対象となる空間の拡大について解析を行う．また，人工データと楽曲データに対して，実際に $\mathcal{L}_v$ 距離変換規則を適用して検索実験を行い，$\mathcal{L}_v$ 距離で構築された索引構造だけで任意の $\mathcal{L}_p$ 距離で検索が実現されていることを確認し，検索対象となる空間の拡大に関する解析結果を検証する．

以下に本稿の構成を述べる．2 章では，関連研究として，Yi らの手法について述べる．3 章では，任意の $\mathcal{L}_p$ 距離を $\mathcal{L}_v$ 距離に置き換える $\mathcal{L}_v$ 距離変換規則を示し，4 章で $\mathcal{L}_v$ 距離変換規則を適用することによって生じる検索対象となる空間の増加に関して解析を行う．5 章では人工データと楽曲データを用いた検索実験について述べ，6 章では実験結果に基づいて従来手法との比較を行うとともに，検索対象となる空間の増加に関する解析を検証する．最後に 7 章では，まとめを述べる．

2. 関 連 研 究

ここでは，Yi らの距離の変換規則および彼らの示した検索の手順を説明する[12]．

Yi らの距離の変換規則

$\mathcal{L}_p$ 距離関数 $dist_p(\cdot, \cdot)$ は，2 つの d 次元ベクトルデータ $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_d)$ に対し次のように定義される．

$$dist_p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{d} \mid x_i - y_i \mid^p \right)^{\frac{1}{p}} & (1 \leq p < \infty) \\ \max_{i=1}^{d} \mid x_i - y_i \mid & (p = \infty). \end{cases} \tag{1}$$

Yi らは，幾何学的性質から次の距離変換規則を導出している．

$$dist_1(\mathbf{0}, \boldsymbol{x}) \leq \varepsilon \Rightarrow dist_2(\mathbf{0}, \boldsymbol{x}) \leq \varepsilon, \tag{2}$$

$$dist_\infty(\mathbf{0}, \boldsymbol{x}) \leq \varepsilon \Rightarrow dist_2(\mathbf{0}, \boldsymbol{x}) \leq \sqrt{d} \cdot \varepsilon. \tag{3}$$

式 (2) により，$\mathcal{L}_1$ 距離による ε 近傍検索は $\mathcal{L}_2$ 距離による ε 近傍検索に置き換えることができる．また，式 (3) により $\mathcal{L}_\infty$ 距離による ε 近傍検索は，$\mathcal{L}_2$ 距離による $\sqrt{d} \cdot \varepsilon$ 近傍検索に置き換えることができる．このように，ある距離関数を他の距離関数に置き換える関係式を距離変換規則と呼ぶ．

Yi らは式 (2) および式 (3) の距離変換規則は $3 \leq p < \infty$ なる $\mathcal{L}_p$ 距離についても導くことができるとだけ述べているが，式 (3) と同様の変換式

$$dist_p(\mathbf{0}, \boldsymbol{x}) \leq \varepsilon \Rightarrow dist_2(\mathbf{0}, \boldsymbol{x}) \leq \sqrt{d} \cdot \varepsilon \quad (3 \leq p < \infty) \tag{4}$$

が成立することは容易に分かる．そこで本稿では，式 (2)，式 (3)，式 (4) を用いる方法を Yi らの変換規則と呼ぶことにする．Yi らの変換規則は $\mathcal{L}_2$ 距離への変換規則であるため，索引構造は $\mathcal{L}_2$ 距離で構築する必要がある．また，我々は式 (3)，式 (4) の係数が $\sqrt{d}$ よりさらに小さな係数で抑えられることを次章で示す．

検索の手順

Yi らは次に示す枠組みに基づいて，彼らの提案した距離変換規則を用いて $\mathcal{L}_p$ 距離（$p = 1, 2, \infty$）による検索を行っている．

$\mathcal{L}_p$ 距離による問合せ半径 ε を距離変換規則を用いて，問合せ半径 ε' に変換する．この半径 ε' を用い，変換された後の距離（$\mathcal{L}_2$ 距離）と $\mathcal{L}_2$ 距離を用いて構築された索引構造を用いて，検索対象の絞り込みを行う．この絞り込みが行われた結果得られた点集合には，$\mathcal{L}_2$ 距離で，問合せ点から ε' 以下の点がすべて含まれている．距離変換規則から，$\mathcal{L}_p$ 距離で ε 以下の点もすべてその点集合に含まれることが保証される．よって，この絞り込まれた点集合のすべての点に対し，問合せ点から $\mathcal{L}_p$ 距離で ε 以下であるかどうかを調べることで，元の $\mathcal{L}_p$ 距離での ε 近傍検索を行うことが

可能となる．

$\mathcal{L}_2$ 距離により構築された索引構造に対し，$\mathcal{L}_p$ 距離による検索を行う場合の手続きを以下にまとめる．

手順 1 距離変換規則を用いて，$\mathcal{L}_p$ 距離での問合せ半径 ε を $\mathcal{L}_2$ 距離での問合せ半径 ε' に変換する．

手順 2 $\mathcal{L}_2$ 距離で構築した索引構造に対して，問合せ半径 ε' による近傍検索を実行し，検索対象の絞り込みを行う．

手順 3 手順 2 で絞り込まれた点集合に対し，$\mathcal{L}_p$ 距離で距離計算を行い，ε 近傍に含まれているかどうかを判定する．

3. 任意の $\mathcal{L}_p$ 距離による検索を可能とする距離変換規則

我々は，ある $\mathcal{L}_v$ 距離（$v = 1, 2, \ldots, \infty$）で構築された索引構造に対して，任意の $\mathcal{L}_p$ 距離による ε 近傍検索を可能とする距離変換規則（$\mathcal{L}_v$ 距離変換規則）を提案する．$\mathcal{L}_v$ 距離変換規則を用いることにより，検索漏れをおこさない最小の問合せ半径の拡大で任意の $\mathcal{L}_p$ 距離での検索が可能となる．

次に示す補題 1 は，$\mathcal{L}_v$ 距離変換規則を表す．

補題 1 任意の正整数 p，v，問合せ点 $\boldsymbol{q}$，問合せ半径 ε，次元数 d に対して，$dist_p(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}) \leq \varepsilon$ ならば，

$$\begin{cases} dist_v(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}) \leq \varepsilon & (1 \leq p \leq v) \quad (5) \\ dist_v(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}) \leq d^{\frac{1}{v}-\frac{1}{p}} \cdot \varepsilon & (v \leq p \leq \infty) \quad (6) \end{cases}$$

が成り立つ．

証明 $\boldsymbol{z}$ を以下で定義する．

$$\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_d),$$
$$z_i = \mid q_i - x_i \mid \quad (i = 1, \ldots, d)$$

このように $\boldsymbol{z}$ を定義すると，$z_i \geq 0$ となる．

(I) $1 \leq p \leq v$ の場合

$$\begin{aligned} &\frac{dist_v(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x})}{dist_p(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x})} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{d} \mid q_i - x_i \mid^v \right)^{\frac{1}{v}} \Bigg/ \left(\sum_{i=1}^{d} \mid q_i - x_i \mid^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{(z_1^v + \ldots + z_d^v)^{\frac{1}{v}}}{(z_1^p + \ldots + z_d^p)^{\frac{1}{p}}} \\ &= \left\{ \frac{z_1^v + \ldots + z_d^v}{(z_1^p + \ldots + z_d^p)^{\frac{v}{p}}} \right\}^{\frac{1}{v}} \\ &= \left\{ \frac{z_1^v}{(z_1^p + \ldots + z_d^p)^{\frac{v}{p}}} + \ldots + \frac{z_d^v}{(z_1^p + \ldots + z_d^p)^{\frac{v}{p}}} \right\}^{\frac{1}{v}} \\ &= \left\{ \left(\frac{z_1^p}{z_1^p + \ldots + z_d^p} \right)^{\frac{v}{p}} + \ldots + \left(\frac{z_d^p}{z_1^p + \ldots + z_d^p} \right)^{\frac{v}{p}} \right\}^{\frac{1}{v}} \\ &\leq \left\{ \frac{z_1^p}{z_1^p + \ldots + z_d^p} + \ldots + \frac{z_d^p}{z_1^p + \ldots + z_d^p} \right\}^{\frac{1}{v}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

よって，$dist_v(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}) \leq dist_p(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}) \leq \varepsilon$ が成り立ち，式 (5) が示せる．

(II) $v \leq p \leq \infty$ の場合

(i) $dist_p(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}) = \varepsilon$ の場合

関数 $g(\boldsymbol{z})$ を次で定義する．

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{z}) &= (dist_p(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}))^p - \varepsilon^p \\ &= \mid q_1 - x_1 \mid^p + \ldots + \mid q_d - x_d \mid^p - \varepsilon^p \\ &= z_1^p + \ldots + z_d^p - \varepsilon^p \end{aligned}$$

また，関数 $f(\boldsymbol{z})$ を次で定義する．

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{z}) &= (dist_v(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}))^v \\ &= \mid q_1 - x_1 \mid^v + \ldots + \mid q_d - x_d \mid^v \\ &= z_1^v + \ldots + z_d^v \end{aligned}$$

ここで，$\boldsymbol{z}$ が $g(\boldsymbol{z}) = z_1^p + \ldots + z_d^p - \varepsilon^p = 0$ を満たす場合の，関数 $f(\boldsymbol{z}) = z_1^v + \ldots + z_d^v$ の最大値を考える．この問題を解くために，λ を未定乗数とする次の関数を考える．

$$f(\boldsymbol{z}) - \lambda g(\boldsymbol{z}) = z_1^v + \ldots + z_d^v - \lambda(z_1^p + \ldots + z_d^p - \varepsilon^p)$$

ラグランジュの未定乗数法を用いると以下の連立方程式を得る．

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial z_1}(f(\boldsymbol{z}) - \lambda g(\boldsymbol{z})) = v z_1^{v-1} - \lambda p z_1^{p-1} = 0 \quad (7) \\ &\qquad \vdots \\ &\frac{\partial}{\partial z_d}(f(\boldsymbol{z}) - \lambda g(\boldsymbol{z})) = v z_d^{v-1} - \lambda p z_d^{p-1} = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial \lambda}(f(\boldsymbol{z}) - \lambda g(\boldsymbol{z})) = -(z_1^p + \ldots + z_d^p - \varepsilon^p) = 0 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (8) \end{aligned}$$

式 (7) より，$z_1^{p-v} = \dfrac{v}{\lambda p}$ を得る．

この両辺を $\dfrac{p}{p-v}$ 乗すると，$z_1^p = \left(\dfrac{v}{\lambda p} \right)^{\frac{p}{p-v}}$ となる．

同様に，以下の式を得る．

$$z_1^p = \ldots = z_d^p = \left(\frac{v}{\lambda p} \right)^{\frac{p}{p-v}} \quad (9)$$

式 (9) を式 (8) に代入し，変形すると式 (10) を得る．

$$\left(\frac{v}{\lambda p} \right)^{\frac{p}{p-v}} = \frac{\varepsilon^p}{d} \quad (10)$$

式 (10) を式 (9) に代入すると，関数 $f(\boldsymbol{z})$ は $z_1 = \ldots = z_d = \left(\frac{\varepsilon^p}{d}\right)^{\frac{1}{p}}$ のとき，最大値 $d\left(\frac{\varepsilon^p}{d}\right)^{\frac{v}{p}} = \left(d^{\frac{1}{v}-\frac{1}{p}} \cdot \varepsilon\right)^v$ をとる．したがって，式 (6) が成り立つ．

(ii) $dist_p(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{x}) = \varepsilon' < \varepsilon$ の場合

(i) の場合と同様に考える．

関数 $f(\boldsymbol{z})$ は $z_1 = \ldots = z_d = \left(\frac{(\varepsilon')^p}{d}\right)^{\frac{1}{p}}$ のとき，最大値 $d\left(\frac{(\varepsilon')^p}{d}\right)^{\frac{v}{p}} = \left(d^{\frac{1}{v}-\frac{1}{p}} \cdot \varepsilon'\right)^v$ をとる．

この値は，$\left(d^{\frac{1}{v}-\frac{1}{p}} \cdot \varepsilon\right)^v$ よりも小さいので，関数 $f(\boldsymbol{z})$ の最大値としては $\left(d^{\frac{1}{v}-\frac{1}{p}} \cdot \varepsilon\right)^v$ となる．

□

補題 1 の式 (5) の証明は文献 6) を参考にした．補題 1 により変換された問合せ半径（式 (5)，式 (6) の右辺）を ε' とすると，この補題 1 により $\mathcal{L}_p$ 距離において問合せ点 $\boldsymbol{q}$ から半径 ε 以内に入っている点は，$\mathcal{L}_v$ 距離において問合せ点 $\boldsymbol{q}$ から半径 ε' 以内にあることが保証される．$\mathcal{L}_v$ 距離変換規則は，$\mathcal{L}_v$ 距離に関する変換規則として問合せ半径の拡大を最小にする変換規則である．

$\mathcal{L}_2$ 距離変換規則は，Yi らの提案した距離変換規則を任意の $\mathcal{L}_p$ 距離に対して扱えるように拡張を行ったものとなっている．また，Yi らの変換規則では係数が $\sqrt{d} = d^{\frac{1}{2}}$ であるのに対し，$\mathcal{L}_2$ 距離変換規則の係数は $\mathcal{L}_2$ 距離に関する変換規則として最小の値 $d^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$ で抑えられている．

4. 検索対象となる空間についての考察

4.1 検索対象となる空間の増加

$\mathcal{L}_v$ 距離変換規則の係数 $d^{\frac{1}{v}-\frac{1}{p}}$ は p，v および次元数 d の値に依存する．そこで，$\mathcal{L}_v$ 距離変換規則を用いて，$\mathcal{L}_p$ 距離による ε 近傍検索を行う場合，検索対象となる空間の体積がどの程度増加するのかを検討する．たとえば，$\mathcal{L}_1$ 距離で ε 近傍検索を行う場合，距離変換規則による検索対象となる空間の増加は，**図 1** の網掛けの部分となる．左側の図は $\mathcal{L}_1$ 距離変換規則を用いた場合の検索対象となる空間を示し，中央の図は $\mathcal{L}_2$ 距離変換規則を用いた場合，右側の図は $\mathcal{L}_\infty$ 距離変換規則を用いた場合の検索対象となる空間を示す．同様に $\mathcal{L}_2$ 距離，$\mathcal{L}_\infty$ 距離における検索対象となる空間は，**図 2**，**図 3** で表すことができる．ここで，$\mathcal{L}_p$ 距離で問合せ半径 ε の検索を行うとき，検索対象となる空間の体積を $V(p, \varepsilon)$ とすると，以下の式で表現できる．ただし，$\Gamma(\cdot)$ は Γ 関数とする．

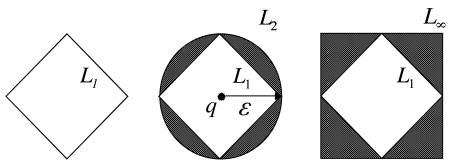


図 1 $\mathcal{L}_1$ 距離による ε 近傍検索
Fig. 1 ε-neighbor search by $\mathcal{L}_1$ distance.

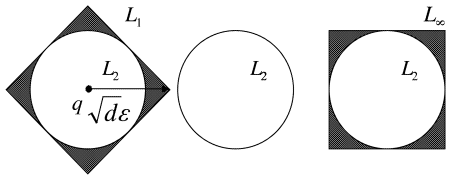


図 2 $\mathcal{L}_2$ 距離による ε 近傍検索
Fig. 2 ε-neighbor search by $\mathcal{L}_2$ distance.

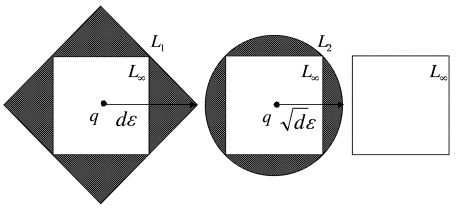


図 3 $\mathcal{L}_\infty$ 距離による ε 近傍検索
Fig. 3 ε-neighbor search by $\mathcal{L}_\infty$ distance.

$$V(p, \varepsilon) = \frac{2^d[\Gamma(1/p)]^d}{p^{d-1}d\Gamma(d/p)} \cdot \varepsilon^d \qquad (11)$$

式 (11) は文献 15) の 1,376 頁を参考にして導出した．

式 (11) から体積 $V(p, \varepsilon)$ は p に関して単調増加となる．また，$\mathcal{L}_v$ 距離変換規則を用いて $\mathcal{L}_p$ 距離で検索を行うときに検索対象となる空間の体積と本来検索対象となる空間の体積との比 $R(v, p)$ を次で定義する．

$$R(v,p) = \begin{cases} \frac{V(v,\varepsilon)}{V(p,\varepsilon)} & (1 \le p \le v) \\ \\ \frac{V(v, d^{\frac{1}{v}-\frac{1}{p}} \cdot \varepsilon)}{V(p,\varepsilon)} & (v < p \le \infty). \end{cases}$$

体積比 $R(v, p)$ はつねに 1 以上である．データ集合が一様かつ密な分布を持つ場合を考える．この場合，体積比 $R(v, p)$ は，$\mathcal{L}_v$ 距離で構築した索引構造と $\mathcal{L}_v$ 距離変換規則を用いて $\mathcal{L}_p$ 距離で検索を行う場合に検索対象となる空間に含まれる点の個数が，$\mathcal{L}_p$ 距離で構築した索引構造に対して $\mathcal{L}_p$ 距離で検索を行う場合に検索対象となる空間に含まれる点の個数の何倍になるかの見積りを与える．すなわち，体積比 $R(v, p)$ は $\mathcal{L}_v$ 距離変換規則を用いたとき，検索時に必要な距離計算回数がどれだけ増加するかの見積りを与える．

以下では，p，v および次元数 d をそれぞれ変化さ

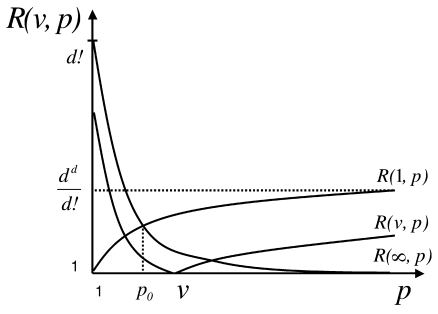


図 4 $\mathcal{L}_v$ 距離変換規則を用いたときの体積比
Fig. 4 Volume ratio for $\mathcal{L}_v$ distance conversion rule.

せて，$\mathcal{L}_v$ 距離変換規則を用いて検索を行う場合に，検索対象となる空間について，体積比 $R(v,p)$ を用いて考察する．

4.2 検索に使用する距離関数を変えたときの検索対象となる空間について

$\mathcal{L}_v$ 距離を用いて構築された索引構造に対して，$\mathcal{L}_v$ 距離変換規則を適用し，$\mathcal{L}_p$ 距離での問合せ半径 ε で検索を行う場合の体積比を解析する．すなわち，次元数 d および v の値を固定し，p の値を変化させたときの体積比 $R(v,p)$ を解析する．体積比 $R(v,p)$ に関して次の補題 2 が成り立つ．

補題 2 任意の正実数 p，p' $(p<p')$，v，体積比 $R(v,p)$ に関して，

$$\begin{cases} R(v,p) > R(v,p') & (1 \le p < p' \le v) \\ R(v,p) < R(v,p') & (v < p < p' \le \infty) \end{cases}$$

が成り立つ．

補題 2 の証明は付録 A.1.2 に示す．補題 2 より，$1 \le p < v$ で $R(v,p)$ は，p に関して単調減少となる．そして，$p = v$ のとき，$R(v,p) = 1$ となり，$v < p \le \infty$ で p に関して単調増加となる（**図 4**）．したがって，$\mathcal{L}_\infty$ 距離変換規則を用いたとき，体積比 $R(\infty,p)$ は p に関して単調減少となり $p = \infty$ で最小値 1 となる．また，$\mathcal{L}_1$ 距離変換規則を用いたとき，体積比 $R(1,p)$ は $p = 1$ で最小値 1 をとり，p に関して単調増加となる（図 4）．

4.3 使用する距離変換規則を変えたときの検索対象となる空間について

ここでは，使用する距離変換規則を変えたときの体積比の違いについて解析を行う．すなわち，次元数 d および p の値を固定し，v の値を変化させた場合の体積比 $R(v,p)$ を解析する．体積比 $R(v,p)$ に関して次の補題 3 が成り立つ．

補題 3 任意の正実数 p，v，v' $(v<v')$，体積比 $R(v,p)$ に関して，

$$\begin{cases} R(v,p) > R(v',p) & (1 \le v < v' \le p) \\ R(v,p) < R(v',p) & (p < v < v' \le \infty) \end{cases}$$

が成り立つ．

補題 3 の証明は付録 A.1.3 に示す．補題 3 より，$1 \le v \le p$ では $R(1,p)$ が最大となる．また，$p < v \le \infty$ では $R(\infty,p)$ が最大となる．補題 2 および補題 3 より，$R(v,p)$ が p に関して単調減少である区間 $1 \le p < v$ においては，$\mathcal{L}_\infty$ 距離で構築した索引構造に対して $\mathcal{L}_\infty$ 距離変換規則を適用して $\mathcal{L}_p$ 距離で検索を実行した場合に最も体積比が大きくなる．また，$R(v,p)$ が p に関して単調増加である区間 $v < p \le \infty$ においては，$\mathcal{L}_1$ 距離で構築した索引構造に対して $\mathcal{L}_1$ 距離変換規則を適用して $\mathcal{L}_p$ 距離で検索を実行した場合に最も体積比が大きくなる．すなわち，$R(\infty,p)$ と $R(1,p)$ から，各 p に対して体積比の上限を得ることができる．体積比の上限が最小となる点は $R(\infty,p)$ と $R(1,p)$ の交点であり，その交点を p_0 とする．$\mathcal{L}_p$ 距離で検索を行う場合，$1 \le p < p_0$ では，どの $\mathcal{L}_v$ 距離変換規則を用いたとしても，体積比 $R(\infty,p)$ 以下で検索を行うことができ，$p_0 < p \le \infty$ では，どの $\mathcal{L}_v$ 距離変換規則を用いたとしても，体積比 $R(1,p)$ 以下で検索を行うことができる．p_0 は，$R(1,p_0) = R(\infty,p_0)$ から，

$$p_0 = \frac{1}{1 - \log_d (d!)^{\frac{1}{d}}}$$

となる．次元数 $d = 4$，8，16，20 について，実際に p_0 の値を求めてみると，$p_0 = 2.34$，2.76，3.24，3.41 となる．

4.4 次元と検索対象となる空間について

次元数 d を変化させたときの検索対象となる空間について調べる．具体的に，次元数 $d = 4$，8，16，20 の場合について，体積比 $R(v,p)$ $(v = 1,2,\infty,\ p = 1,2,\infty)$ を示す（**表 1**）．表 1 を行方向に眺めてみると，$v \neq p$ の場合は，次元数 d が増えるにつれて体積比 $R(v,p)$ が急激に増加することが分かる．

5. 実　　験

本章は，提案する $\mathcal{L}_v$ 距離変換規則がどの程度有効であるかを調べるために，次の 3 つの方法：

(1) $\mathcal{L}_p$ 距離ごとに索引構造を構築し，$\mathcal{L}_p$ 距離で構築した索引構造に対して $\mathcal{L}_p$ 距離での問合せ半径 ε_p で検索する場合（標準手法），

(2) $\mathcal{L}_2$ 距離で索引構造をただ 1 つ構築し，$\mathcal{L}_2$ 距離で構築した索引構造に対して，Yi らの変換規則を適用し，任意の $\mathcal{L}_p$ 距離での問合せ半径

表 1 検索対象となる空間の体積比 $R(v,p)$
Table 1 Volume ratio of retrieval space $R(v,p)$.

距離変換規則	検索距離	体積比 $R(v,p)$	$d=4$	$d=8$	$d=16$	$d=20$
$\mathcal{L}_1$ 距離変換規則	$\mathcal{L}_1$ 距離	$\frac{V(1,\varepsilon)}{V(1,\varepsilon)}=1$	1.0	1.0	1.0	1.0
	$\mathcal{L}_2$ 距離	$\frac{V(1,\sqrt{d}\cdot\varepsilon)}{V(2,\varepsilon)}=\frac{2^d}{\pi^{\frac{d}{2}}}\cdot\frac{d}{2}!\cdot\frac{d^{\frac{d}{2}}}{d!}$	2.2	6.4	57	172
	$\mathcal{L}_\infty$ 距離	$\frac{V(1,d\cdot\varepsilon)}{V(\infty,\varepsilon)}=\frac{d^d}{d!}$	10.7	416	8.8×10^5	4.3×10^7
$\mathcal{L}_2$ 距離変換規則	$\mathcal{L}_1$ 距離	$\frac{V(2,\varepsilon)}{V(1,\varepsilon)}=\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{2^d}\cdot\frac{d!}{\frac{d}{2}!}$	7.4	639	7.5×10^7	6.0×10^{10}
	$\mathcal{L}_2$ 距離	$\frac{V(2,\varepsilon)}{V(2,\varepsilon)}=1$	1.0	1.0	1.0	1.0
	$\mathcal{L}_\infty$ 距離	$\frac{V(2,\sqrt{d}\cdot\varepsilon)}{V(\infty,\varepsilon)}=\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{2^d}\cdot\frac{d^{\frac{d}{2}}}{\frac{d}{2}!}$	4.9	65	1.5×10^4	2.5×10^5
$\mathcal{L}_\infty$ 距離変換規則	$\mathcal{L}_1$ 距離	$\frac{V(\infty,\varepsilon)}{V(1,\varepsilon)}=d!$	24	4.0×10^4	2.1×10^{13}	2.4×10^{18}
	$\mathcal{L}_2$ 距離	$\frac{V(\infty,\varepsilon)}{V(2,\varepsilon)}=\frac{2^d}{\pi^{\frac{d}{2}}}\cdot\frac{d}{2}!$	3.2	63	2.8×10^5	4.1×10^7
	$\mathcal{L}_\infty$ 距離	$\frac{V(\infty,\varepsilon)}{V(\infty,\varepsilon)}=1$	1.0	1.0	1.0	1.0

表 2 実験に用いたデータ集合
Table 2 Data sets.

データの種類	次数	データ点の数（万点）	分布
人工データ	4	10	一様分布
人工データ	8	10	一様分布
人工データ	16	10	一様分布
楽曲データ	20	10	データ依存

ε_p で検索する場合（従来手法），

(3) $\mathcal{L}_v$ 距離で索引構造をただ 1 つ構築し，$\mathcal{L}_v$ 距離で構築した索引構造に対して，$\mathcal{L}_v$ 距離変換規則を適用し，任意の $\mathcal{L}_p$ 距離での問合せ半径 ε_p で検索する場合（提案手法），

を 10 万点からなる人工データ集合と自己相関係数[9),14)]を用いた楽曲データ集合（**表 2**）に対して適用し，索引構築時間と検索時の距離計算回数を調べる．検索の手順は Yi らと同様の方法で実行した．ただし，索引構造としては GNAT[2)] を用いた．GNAT を構築するための分割点はデータ集合から無作為に 1,000 点（データ集合の 1%）を選んだ．

[索引構造の構築時間]

3 つの人工データそれぞれに対して，$\mathcal{L}_v$ 距離（$v=1,\cdots,10,\infty$）による索引構造の構築を行い，構築時間を測定した（**表 3**）．

標準手法は，距離ごとに索引構造を構築するために，索引構築時間は各索引構造の構築時間の総和となる．一方，提案手法で必要な索引構造の構築時間は，$\mathcal{L}_v$ 距離の索引構造を用いて任意の $\mathcal{L}_p$ 距離での問合せを実現することから，$\mathcal{L}_v$ 距離での索引構造の構築時間のみでよい．したがって，提案手法では大幅な索引構築時間の削減が実現できる．

$\mathcal{L}_\infty$ 距離による索引構造の構築時間は，他の索引構造の構築時間よりも約 $2.6(=\frac{206}{79})$〜$4.3(=\frac{827}{191})$ 倍，高速であった（表 3）．$\mathcal{L}_\infty$ 距離の計算は，差分の大小比較

表 3 索引構造の構築にかかる時間（秒）
Table 3 Construction time of index structures (sec).

p	$d=4$	$d=8$	$d=16$
1	206	339	586
2	255	387	636
3	257	390	636
4	288	458	827
5	264	399	673
6	281	440	753
7	271	440	705
8	263	423	716
9	271	435	767
10	282	453	686
∞	79	121	191
total	2,717	4,285	7,176

のみで実行できるのに対して，$\mathcal{L}_v$ 距離（$1\le v<\infty$）の計算は，v 乗と $1/v$ 乗の計算を必要とする．このことが索引構造の構築時間の差の原因である．

[検索実験]

次に，標準手法，従来手法および提案手法を用いた検索の効率を調べるため，問合せ半径 ε_p を少しずつ変化させ，選択度 s と距離計算回数 c を求める．ただし，選択度 s は，問合せ点 $\boldsymbol{q}$ から問合せ半径 ε_p 以内に含まれる点の数 C（正解数）とデータベース中の総点数との比である．距離計算回数 c は，問合せ点 $\boldsymbol{q}$ から半径 ε_p 以内に含まれるすべての点を出力するまでに要した距離計算の回数である．

実際に，データベース内の点から無作為に 1,000 点を抽出し，問合せ点 $\boldsymbol{q}_n$（$n=1,\ldots,1000$）とする．問合せ点 $\boldsymbol{q}_n$ を用いて，ε_p 近傍検索を実行し，正解数 C_{n,ε_p} と距離計算回数 c_{n,ε_p} を求める．問合せ半径 ε_p での 1,000 回の問合せにおける，平均正解数 $C_{\varepsilon_p}=\sum_{n=1}^{1000}C_{n,\varepsilon_p}/1000$ を計算し，平均正解数 C_{ε_p} とデータベースの総点数の比 $s_{\varepsilon_p}=C_{\varepsilon_p}/100000$ を計算し，s_{ε_p} を平均選択度と呼ぶ（以下では単に選択度

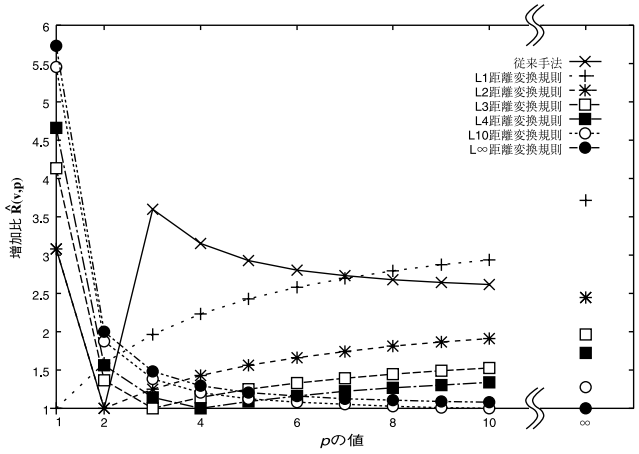


図 5 p の値と増加比の関係（4 次元人工データ）
Fig. 5 Increase ratio vs. p.

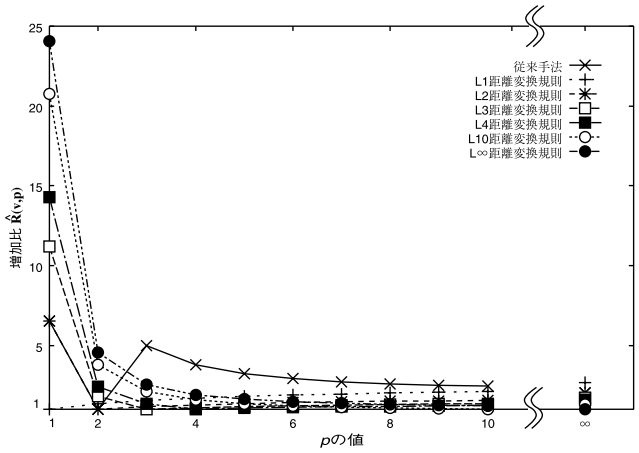


図 6 p の値と増加比の関係（20 次元楽曲データ）
Fig. 6 Increase ratio vs. p.

と呼ぶ）．さらに問合せ半径 ε_p における平均距離計算回数 $c_{\varepsilon_p} = \sum_{n=1}^{1000} c_{n,\varepsilon_p}/1000$ を計算する．4 次元人工データおよび楽曲データに対する選択度 s_{ε_p} と平均距離計算回数 c_{ε_p} の関係を付録 A.2.1，付録 A.2.2 に示す．

ここで，標準手法は $\mathcal{L}_p$ 距離ごとに索引構造を構築し，$\mathcal{L}_p$ 距離で構築した索引構造に対して $\mathcal{L}_p$ 距離での問合せ半径 ε_p で検索を実行しているので，問合せ半径 ε_p における平均距離計算回数 c_{ε_p} は提案手法のそれよりも少ない．しがって，標準手法の平均距離計算回数と提案手法の平均距離計算回数との比 $r(v,p,s_{\varepsilon_p})$ を算出することにより，提案手法の実データに対する振舞いを調べる．選択度が 0 から 0.05 の範囲内で比 $r(v,p,s_{\varepsilon_p})$ の値が最も大きかったものを増加比 $\hat{R}(v,p)(= \max_{s_{\varepsilon_p}=0}^{0.05} r(v,p,s_{\varepsilon_p}))$ と呼ぶ．これにより，$\mathcal{L}_v$ 距離で構築されたそれぞれの索引構造に対して，提案手法を用いて $\mathcal{L}_p$ 距離で検索を行ったときの増加比 $\hat{R}(v,p)$ を調べる．同様にして，従来手法を用いたときの p の値と増加比の関係を求める．4 次元人工データ，楽曲データに対して，p の値と増加比 $\hat{R}(v,p)$ の関係を求めたものが，それぞれ**図 5**，**図 6** である．図 5，図 6 に従来手法と $\mathcal{L}_1$，$\mathcal{L}_2$，$\mathcal{L}_3$，$\mathcal{L}_4$，$\mathcal{L}_{10}$，$\mathcal{L}_\infty$ 距離変換規則を用いた検索の結果を示す．8 次元および 16 次元人工データでの選択度に対する距離計算回数の振舞いは，4 次元の場合と同様の振舞いを示したが，選択度がより小さい値で全件検索となった．以下，本稿では 4 次元人工データと楽曲データを用いて議論を行う．

6. 議　　論

本章では，従来手法と提案手法の比較（6.1 節）と，提案手法の一様分布データに対する検索実験の結果を

用いて，4 章で行った検索対象となる空間の拡大に関する解析を検証する（6.2 節）．また，データ分布がデータ集合に依存する場合の振舞いを，楽曲データによる実験の結果を用いて 6.3 節で確認する．

6.1 従来手法との比較

従来手法は索引構造が $\mathcal{L}_2$ 距離で構築されているときにのみ適用できるのに対して，提案手法は索引構造が $\mathcal{L}_2$ 距離以外の $\mathcal{L}_v$ 距離で構築されているときにも任意の $\mathcal{L}_p$ 距離による検索ができる．実験でも，索引構造が $\mathcal{L}_v$ 距離（$v = 1, 2, \ldots, 10, \infty$）で構築されているとき，$\mathcal{L}_v$ 距離変換規則を用いて，$\mathcal{L}_p$ 距離による問合せ半径 ε_p で検索を行った結果得られる正解点は，すべての場合において標準手法と同じであることが確かめられた．すなわち，任意の $\mathcal{L}_p$ 距離を $\mathcal{L}_v$ 距離に変換する $\mathcal{L}_v$ 距離変換規則を用いることにより，1 つの索引構造だけで任意の $\mathcal{L}_p$ 距離による検索が可能であることが実験でも確かめられた．

次に，従来手法と提案手法の距離計算回数を比較する．従来手法は索引構造が $\mathcal{L}_2$ 距離で構築されているときにのみ適用できるので，$\mathcal{L}_2$ 距離変換規則を適用して検索を行った場合と従来手法との比較を行う．4 次元人工データに対する実験結果である図 5 から，$3 \leq p < \infty$ において，$\mathcal{L}_2$ 距離変換規則を用いた方が，より少ない距離計算回数で検索ができていることが分かる．特に $p = 3$ で検索を行うとき，従来手法の増加比が 3.6 であるのに対し，提案手法の増加比は 1.2 で，約 1/3 となっている．このとき，両者の距離計算回数の差は最も大きくなり，従来手法に対する提案手法の優位性は最も高い．以降，p の値が大きくなるにつれ，距離計算回数の差は小さくなり，$p = \infty$ において両者の性能は等しくなる．また，図 6 から楽曲データに対しても，4 次元人工データと傾向が類似していることが分かる．このように人工データと楽曲データの両方において，提案手法は従来手法よりも少ない距離計算回数で任意の $\mathcal{L}_p$ 距離（$3 \leq p < \infty$）による検索が実現できていることを実験で確認することができた．これ以外の $\mathcal{L}_1$，$\mathcal{L}_2$ および $\mathcal{L}_\infty$ 距離での検索では距離計算回数は同じとなった．

6.2 人工データに対する議論

4 章で示した検索対象となる空間の体積比 $R(v,p)$ は，一様分布のデータに対する検索時の距離計算回数の増加比 $\hat{R}(v,p)$ の見積りを与える．したがって，増加比 $\hat{R}(v,p)$ の振舞いは，補題 2，補題 3 で示した体積比 $R(v,p)$ の振舞いと同様であると考えられる．そこで，一様分布である人工データに対して検索を行い，増加比 $\hat{R}(v,p)$ の振舞いが体積比 $R(v,p)$ の振舞いと同様であるかどうかを確認する．図 5 から，$\mathcal{L}_v$ 距離で構築した索引構造に対して，距離関数（p の値）を変えて検索を行ったときの増加比 $\hat{R}(v,p)$ について，v と p の関係に着目する．$\mathcal{L}_v$ 距離で構築した索引構造に対して，

(1) $1 \leq p \leq v$ のとき，$p = 1$ で増加比が最も大きく，$p = v$ で増加比が 1 になるような単調減少を示す，

(2) $v < p \leq \infty$ のとき，$p = \infty$ で増加比が最も大きくなるような単調増加を示す，

ということが観察できる．このことは増加比 $\hat{R}(v,p)$ の振舞いが補題 2，すなわち，$1 \leq p \leq v$ で体積比 $R(v,p)$ は p に関して単調減少，$v < p \leq \infty$ で体積比 $R(v,p)$ は p に関して単調増加となるという体積比 $R(v,p)$ の振舞いと同様であることが確認できた．

さらに，使用する索引構造と距離変換規則（v の値）を変えて $\mathcal{L}_p$ 距離で検索を行ったときの増加比 $\hat{R}(v,p)$ について，v と p の関係に着目すると，$\mathcal{L}_p$ 距離で検索を行った場合に対して，

(3) $1 \leq v \leq p$ のとき，$v = 1$ で増加比が最も大きく，$v = p$ で増加比が 1 になるような単調減少を示す，

(4) $p < v \leq \infty$ のとき，$v = \infty$ で増加比が最も大きくなるような単調増加を示す，

ということが観察できる．このことは増加比 $\hat{R}(v,p)$ の振舞いが，補題 3，すなわち，$1 \leq v \leq p$ で体積比 $R(v,p)$ は v に関して単調減少，$p < v \leq \infty$ で体積比 $R(v,p)$ は v に関して単調増加となるという体積比 $R(v,p)$ の振舞いと同様であることが確認できた．

また，4 章と同様に，$\hat{R}(1,p)$ と $\hat{R}(\infty,p)$ が等しくなる p を図 5 より求めると，$p = 2$ と $p = 3$ の間にあり，4 章で求めた $p_0 = 2.34$ に近いことも確認できる．$p = 1$，2 に対しては，$\mathcal{L}_\infty$ 距離変換規則を用いると，増加比は最大となり，$p \geq 3$ では，$\mathcal{L}_1$ 距離変換規則を用いると，増加比は最大となることも確認できる．

以上から，$\mathcal{L}_v$ 距離変換規則を用いて検索を行ったときの増加比 $\hat{R}(v,p)$ の振舞いは，4 章で考察した体積比 $R(v,p)$ の振舞いと同様であることが確かめられた．

増加比が最大となったのは $p = 1$，$v = \infty$ のときで，その値は 5.7 であった（図 5）．すなわち，任意の (p,v) の組合せでも，たかだか 5.7 倍の距離計算を行うだけで，任意の $\mathcal{L}_p$ 距離による検索が実現できた．ここで，検索で実際によく使用される $p = 1, 2, \infty$ の場合を考える．$p = 1, 2, \infty$，$v = 1, 2, \infty$ で検索を行ったときの増加比を**表 4** に示す．表 4 の傾向は，表 1 の傾向

表 4 $\mathcal{L}_v$ 距離変換規則を用いて $\mathcal{L}_p$ 距離（$v, p = 1, 2, \infty$）で検索するときの増加比
Table 4 Increase ratio by $\mathcal{L}_v$ distance conversion rule.

距離変換規則	検索距離	4 次元人工	20 次元楽曲
$\mathcal{L}_1$ 距離変換規則	$\mathcal{L}_1$ 距離	1.0	1.0
	$\mathcal{L}_2$ 距離	1.6	1.4
	$\mathcal{L}_\infty$ 距離	3.7	2.7
$\mathcal{L}_2$ 距離変換規則	$\mathcal{L}_1$ 距離	3.1	6.5
	$\mathcal{L}_2$ 距離	1.0	1.0
	$\mathcal{L}_\infty$ 距離	2.5	2.0
$\mathcal{L}_\infty$ 距離変換規則	$\mathcal{L}_1$ 距離	5.7	24.0
	$\mathcal{L}_2$ 距離	2.0	4.5
	$\mathcal{L}_\infty$ 距離	1.0	1.0

と非常に類似してることが分かる．$p = 1$ での検索は $v = \infty$ で増加比が最大値（5.7）をとり，表 1 の体積比の最大値も，$v = \infty$ でとっている．また，$p = \infty$ での検索では，$v = 1$ のとき増加比が最大値（3.7）をとっており，表 1 の体積比の最大値も，$v = 1$ でとっている．さらに，$p = 2$ での検索は $v = \infty$ で増加比が最大値（2.0）をとり，表 1 の体積比の最大値も，$v = \infty$ でとっている．ただし，増加比の値は体積比に比べて小さくなっている．その理由としては，データ空間の体積に対してデータ数が非常に少ないために，密なデータ分布となっていないことが考えられる．

6.3 楽曲データに対する議論

楽曲データの場合も人工データの場合と同様に，図 6 から，$\mathcal{L}_v$ 距離で構築した索引構造を用いて $\mathcal{L}_p$ 距離で検索したときの増加比を v と p の関係に着目すると，体積比に関する補題 2，補題 3 と同様の関係が増加比でも成立していることが分かる．また，楽曲データに対する増加比の振舞いは，4 次元人工データの場合と類似していることが観察される．表 1 の 20 次元における検索対象となる空間の体積比は膨大な値となるが，実際には表 4 の増加比以内で検索することができた．

7. ま と め

本稿では，1 つの索引構造で任意の $\mathcal{L}_p$ 距離による検索を実現するための距離の変換規則である $\mathcal{L}_v$ 距離変換規則を提案した．従来手法は $\mathcal{L}_2$ 距離で構築された索引構造に対して，任意の $\mathcal{L}_p$ 距離による検索を実現する手法であるのに対し，提案した $\mathcal{L}_v$ 距離変換規則は $\mathcal{L}_v$ 距離で構築された索引構造に対して，任意の $\mathcal{L}_p$ 距離による検索を実現する手法である．また，$\mathcal{L}_v$ 距離変換規則は最小の問合せ半径の拡大であるので，この変換規則を用いた $\mathcal{L}_p$ 距離での検索は最小の検索領域を与えることになる．さらに，$\mathcal{L}_v$ 距離変換規則を適用することによって生じる検索対象となる空間の体積の増加について考察を行い，体積比 $R(v, p)$ の性質を示した．実際に人工データと楽曲データに対して $\mathcal{L}_v$ 距離（$v = 1, \cdots, 10, \infty$）で索引構造を構築し，$\mathcal{L}_p$ 距離での問合せに $\mathcal{L}_v$ 距離変換規則を適用し，検索実験を行った．実験結果から，$\mathcal{L}_v$ 距離変換規則を適用することにより，$\mathcal{L}_v$ 距離による索引構造で任意の $\mathcal{L}_p$ 距離による検索ができることが確認された．すなわち，我々は，$\mathcal{L}_v$ 距離変換規則により，1 つの索引構造で任意の $\mathcal{L}_p$ 距離による検索を可能とする索引構造を実現した．また，索引構造が $\mathcal{L}_2$ 距離で構築されている場合，$\mathcal{L}_2$ 距離変換規則を適用することにより，従来手法よりも少ない距離計算回数で検索が可能であることも確認した．さらに，一様分布に従う人工データ，楽曲データでの実験により検索対象となる空間の体積比に関する考察を距離計算回数の増加比によって確認することができた．

$\mathcal{L}_v$ 距離変換規則は索引構造に依存しないため，他の索引構造，たとえば R-tree，SS-tree，SR-tree などへの実装が可能であり，それに関しては稿を改めて報告したい．

参 考 文 献

1) Böhm, C., Berchtold, S. and Keim, D.A.: Searching in High-Dimensional Spaces-Index Structures for Improving the Performance of Multimedia Databases, *ACM Computing Surveys*, Vol.33, No.3, pp.322–373 (2001).
2) Brin, S.: Near Neighbor Search in Large Metric Spaces, *Proc. 21st International Conference on VLDB*, pp.574–584 (1995).
3) Chávez, E., Navarro, G., Baeza-Yates, R. and Marroquin, J.L.: Searching in Metric Spaces, *ACM Computing Surveys*, Vol.33, No.3, pp.273–321 (2001).
4) Ciaccia, P., Patella, M. and Zezula, P.: M-Tree: An Efficient Access Method for Similarity Search in Metric Spaces, *Proc. 23rd International Conference on VLDB*, pp.426–435 (1997).
5) Guttman, A.: R-Trees: A Dynamic Index Structure for Spatial Searching, *Proc. ACM SIGMOD*, pp.47–57 (1984).
6) Hardy, G., Littlewood, J.E. and Polya, G.: *Inequalities*, Cambridge University Press (1952).
7) Katayama, N. and Satoh, S.: The SR-tree: An Index Structure for High-Dimensional Nearest Neighbor Queries, *Proc. ACM SIGMOD*, pp.369–380 (1997).
8) Lee, S., Kwon, D. and Lee, S.: Minimum Distance Queries for Time Series Data, *Journal of*

Systems and Software, Vol.69, No.1–2, pp.105–113 (2004).
9) Onishi, K., Kobayakawa, M., Hoshi, M. and Ohmori, T.: A Feature independent of bit rate for TwinVQ Audio Retrieval, *Proc. 2001 IEEE International Conference on Multimedia and Expo* (*ICME 2001*), pp.409–412 (2001).
10) Weber, R., Schek, H.-J. and Blott, S.: A Quantitative Analysis and Performance Study for Similarity-Search Methods in High-Dimensional Spaces, *Proc. 24th International Conference on VLDB*, pp.194–205 (1998).
11) White, D.A. and Jain, R.: Similarity Indexing with the SS-tree, *Proc. 12th ICDE*, pp.516–523 (1996).
12) Yi, B.-K. and Faloutsos, C.: Fast Time Sequence Indexing for Arbitrary $\mathcal{L}_p$ Norms, *Proc. 26th International Conference on VLDB*, pp.385–394 (2000).
13) Yianilos, P.N.: Data Structures and Algorithms for Nearest Neighbor Search in General Metric Spaces, *Proc. 5th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms* (*SODA*), pp.311–321 (1993).
14) 墳崎英明，小早川倫広，大西建輔，星　守，大森匡：ビットレートの異なる TwinVQ オーディオデータの類似曲検索のための特徴量，情報処理学会第 59 回全国大会，pp.53–54 (3) (1999).
15) 日本数学会（編）：岩波数学辞典 第 3 版，岩波書店 (1985).
16) 森口繁一，宇田川銈久，一松　信：岩波数学公式 III 特殊関数，岩波書店 (1960).

付　　録

A.1 体積比 $R(v,p)$ の振舞い

本節では，p および v を変化させたときの体積比 $R(v,p)$ の振舞いを考察する．

A.1.1 準　　備

まず，体積 $V(p,\varepsilon)$ を表す以下の式，

$$V(p,\varepsilon)=\frac{2^d[\Gamma(1/p)]^d}{p^{d-1}d\Gamma(d/p)}\cdot\varepsilon^d$$

に対し，Γ 関数に関する次の公式，

$$\Gamma(nz)=\frac{n^{nz}}{(2\pi)^{(n-1)/2}\sqrt{n}}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{n})\cdots\Gamma(z+\frac{n-1}{n})$$

を適用する．ただし，z は正の実数，n は正の整数である．適用した体積を整理すると，

$$V(p,\varepsilon)=\frac{2^d(2\pi)^{(d-1)/2}\varepsilon^d}{p^{d-1}d^{d/p+1/2}}\prod_{i=1}^{d-1}\frac{\Gamma(1/p)}{\Gamma(1/p+i/d)}\quad(12)$$

となる．一方，体積比 $R(v,p)$ は，

$$\begin{cases}\dfrac{V(v,\varepsilon)}{V(p,\varepsilon)} & (1\le p\le v)\quad(13)\\[2ex] \dfrac{V(v,d^{\frac{1}{v}-\frac{1}{p}}\cdot\varepsilon)}{V(p,\varepsilon)} & (v<p\le\infty)\quad(14)\end{cases}$$

であるから，式 (14) に式 (12) を代入し，変形を行うと次のようになる．

$$\begin{aligned}&\frac{V(v,d^{1/v-1/p}\varepsilon)}{V(p,\varepsilon)}\\ &=\frac{\frac{2^d(2\pi)^{(d-1)/2}(d^{1/v-1/p}\varepsilon)^d}{v^{d-1}d^{d/v+1/2}}\prod_{i=1}^{d-1}\frac{\Gamma(1/v)}{\Gamma(1/v+i/d)}}{\frac{2^d(2\pi)^{(d-1)/2}\varepsilon^d}{p^{d-1}d^{d/p+1/2}}\prod_{i=1}^{d-1}\frac{\Gamma(1/p)}{\Gamma(1/p+i/d)}}\\ &=\left(\frac{p}{v}\right)^{d-1}\left(\frac{d^{1/p}}{d^{1/v}}\right)^d\left(d^{1/v-1/p}\right)^d\frac{\prod_{i=1}^{d-1}\frac{\Gamma(1/v)}{\Gamma(1/v+i/d)}}{\prod_{i=1}^{d-1}\frac{\Gamma(1/p)}{\Gamma(1/p+i/d)}}\\ &=\left(\frac{p}{v}\right)^{d-1}\prod_{i=1}^{d-1}\frac{\frac{1}{\Gamma(i/d)}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{(\frac{i}{d}-1)(\frac{i}{d}-2)\cdots(\frac{i}{d}-j)}{j!(\frac{1}{v}+j)}}{\frac{1}{\Gamma(i/d)}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{(\frac{i}{d}-1)(\frac{i}{d}-2)\cdots(\frac{i}{d}-j)}{j!(\frac{1}{p}+j)}}\\ &=\prod_{i=1}^{d-1}\frac{\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{(\frac{i}{d}-1)(\frac{i}{d}-2)\cdots(\frac{i}{d}-j)}{j!(\frac{1}{v}+j)}\cdot\frac{1}{v}}{\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{(\frac{i}{d}-1)(\frac{i}{d}-2)\cdots(\frac{i}{d}-j)}{j!(\frac{1}{p}+j)}\cdot\frac{1}{p}}\\ &=\prod_{i=1}^{d-1}\frac{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(1-\frac{i}{d})(2-\frac{i}{d})\cdots(j-\frac{i}{d})}{j!(1+jv)}}{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(1-\frac{i}{d})(2-\frac{i}{d})\cdots(j-\frac{i}{d})}{j!(1+jp)}}.\end{aligned}\quad(15)$$

ただし，3 行目から 4 行目の変形には次の公式を用いた．

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)}=\frac{1}{\Gamma(a)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(a-1)(a-2)\cdots(a-n)}{n!(x+n)}\qquad[x,\ a>0].$$

なお，式変形の際に用いた Γ 関数に関する 2 つの公式は文献 16) の 2 頁および 4 頁に記載されている．

A.1.2 補題 2 の証明

次元数 d および v の値を固定し，p の値を変化させたときの体積比 $R(v,p)$ を考える．

(i) $1\le p\le v$ のとき

式 (13) の分子は p に関して定数であり，体積 $V(p,\varepsilon)$ は p に関して単調に増加するので，分母は単調に増加する．したがって，$R(v,p)$ は p に関して単調減少となり，$p=v$ で $R(v,p)=1$ となる．よって，

$$R(v,p)>R(v,p')\quad(1\le p<p'\le v)$$

が成り立つ．

(ii) $v<p<p'\le\infty$ のとき，

式 (15) において p が大きくなる場合を考える．ま

た，分子は p を含まないため，定数であると見なせる．$i/d < 1 \quad (i = 1, \cdots, d-1)$ であることから，分母の各項はすべて正の値を持ち，その和はつねに正の値をとる．したがって，p が大きくなると，分母は小さくなり，$R(v,p)$ は p に関して単調増加となる．よって，

$$R(v,p) < R(v,p') \quad (v < p < p' \leq \infty)$$

が成り立つ．

以上 (i)，(ii) より，補題 2 が示された．

A.1.3 補題 3 の証明

次元数 d および p の値を固定し，v の値を変化させたときの体積比 $R(v,p)$ を考える．

(i) $1 \leq v \leq p$ のとき，

式 (15) において v が大きくなる場合を考える．また，分母は v を含まないため，定数であると見なせる．$i/d < 1 \quad (i = 1, \cdots, d-1)$ であることから，分子の各項はすべて正の値を持ち，その和はつねに正の値をとる．したがって，v が大きくなると，分子は小さくなり，$R(v,p)$ は v に関して単調に減少し，$v = p$ で $R(v,p) = 1$ となる．よって，

$$R(v,p) > R(v',p) \quad (1 \leq v < v' \leq p)$$

が成り立つ．

(ii) $p < v \leq \infty$ のとき，

式 (13) の分母は v に関して定数であり，体積 $V(v,\varepsilon)$ は v に関して単調に増加するので，分子は単調に増加する．したがって，$R(v,p)$ は v に関して単調増加となる．よって，

$$R(v,p) < R(v',p) \quad (p < v < v' \leq \infty)$$

が成り立つ．

以上 (i)，(ii) より，補題 3 が示された．

A.2 実験結果

A.2.1 人工データを用いた実験の結果

付録 A.2.1 では，人工データ集合を用いた検索実験の結果を示す．$\mathcal{L}_v$ 距離（$v = 1, \cdots, 10, \infty$）を用いて構築した索引構造に対して，標準手法，従来手法および提案手法を用いて $\mathcal{L}_p$ 距離（$p = 1, \cdots, 10, \infty$）で検索を行い，選択度と平均距離計算回数を求めた．本稿では $p = 1$，2，3，4，10，∞ で標準手法，従来手法，$\mathcal{L}_1$，$\mathcal{L}_2$，$\mathcal{L}_3$，$\mathcal{L}_4$，$\mathcal{L}_{10}$，$\mathcal{L}_\infty$ 距離変換規則を用いて検索を行った結果を**図 7**，**図 8**，**図 9**，**図 10**，**図 11**，**図 12** に示す．

A.2.2 楽曲データを用いた実験の結果

付録 A.2.2 では，楽曲データ集合を用いた検索実験の結果を示す．$\mathcal{L}_v$ 距離（$v = 1, \cdots, 10, \infty$）を用いて構築した索引構造に対して，標準手法，従来手法および提案手法を用いて $\mathcal{L}_p$ 距離（$p = 1, \cdots, 10, \infty$）で検索を行い，選択度と平均距離計算回数を求めた．本稿では $p = 1$，2，5，6，7，∞ で標準手法，従来手法，$\mathcal{L}_1$，$\mathcal{L}_2$，$\mathcal{L}_3$，$\mathcal{L}_4$，$\mathcal{L}_{10}$，$\mathcal{L}_\infty$ 距離変換規則を用いて検索を行った結果を**図 13**，**図 14**，**図 15**，**図 16**，**図 17**，**図 18** に示す．

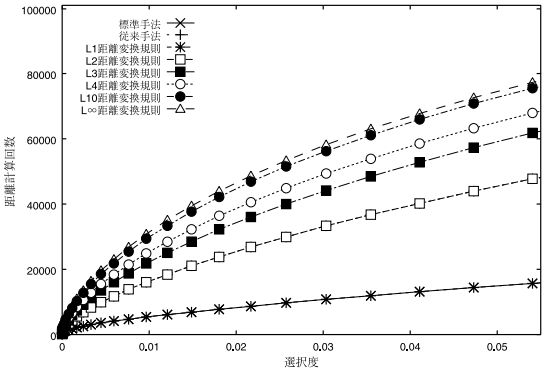


図 7 $\mathcal{L}_1$ 距離での選択度と距離計算回数の関係（4 次元人工）
Fig. 7 Number of distance calculation vs. selectivity.

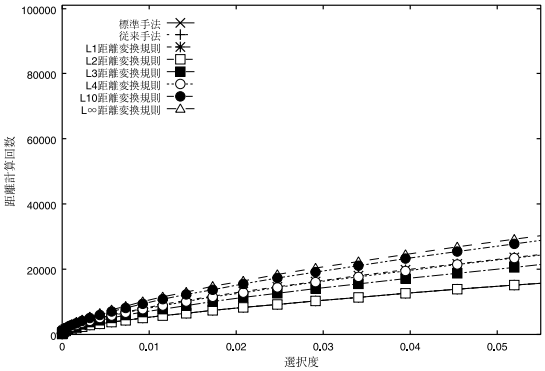


図 8 $\mathcal{L}_2$ 距離での選択度と距離計算回数の関係（4 次元人工）
Fig. 8 Number of distance calculation vs. selectivity.

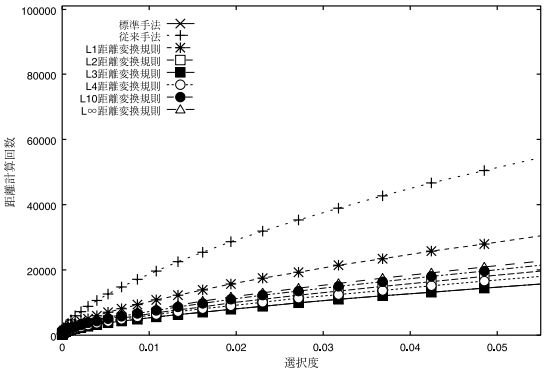


図 9 $\mathcal{L}_3$ 距離での選択度と距離計算回数の関係（4 次元人工）
Fig. 9 Number of distance calculation vs. selectivity.

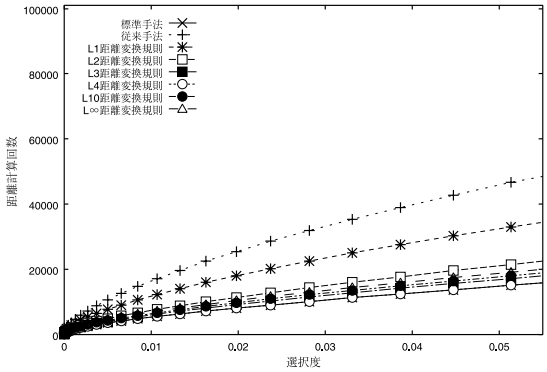


図 10 $\mathcal{L}_4$ 距離での選択度と距離計算回数の関係（4 次元人工）
Fig. 10 Number of distance calculation vs. selectivity.

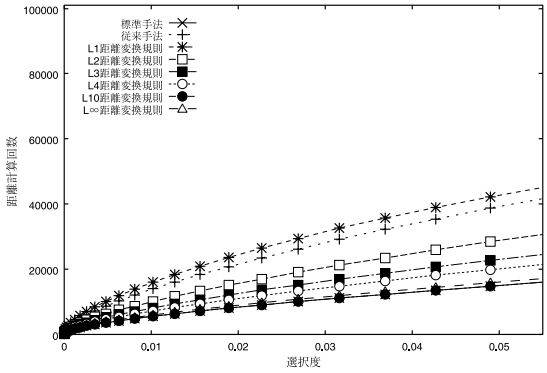


図 11 $\mathcal{L}_{10}$ 距離での選択度と距離計算回数の関係（4 次元人工）
Fig. 11 Number of distance calculation vs. selectivity.

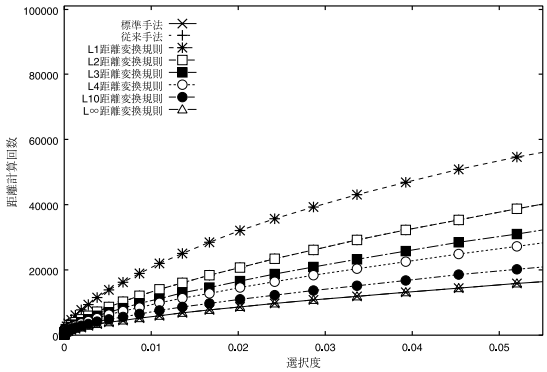


図 12 $\mathcal{L}_\infty$ 距離での選択度と距離計算回数の関係（4 次元人工）
Fig. 12 Number of distance calculation vs. selectivity.

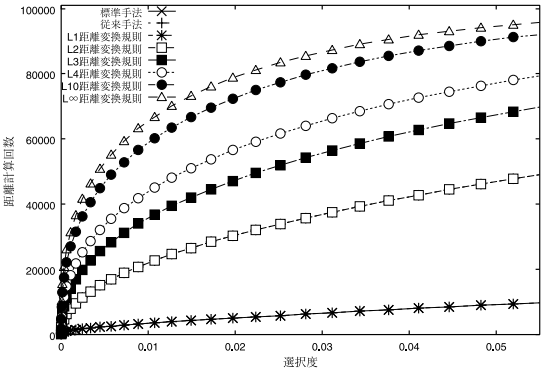


図 13 $\mathcal{L}_1$ 距離での選択度と距離計算回数の関係（20 次元楽曲）
Fig. 13 Number of distance calculation vs. selectivity.

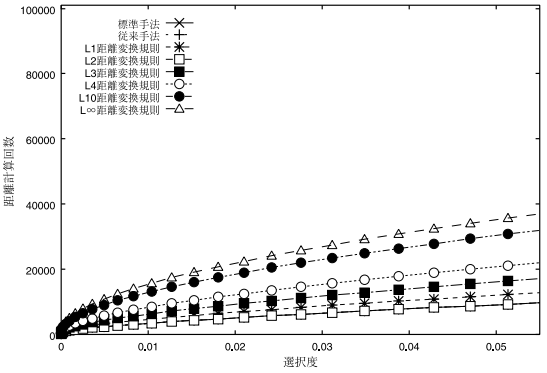


図 14 $\mathcal{L}_2$ 距離での選択度と距離計算回数の関係（20 次元楽曲）
Fig. 14 Number of distance calculation vs. selectivity.

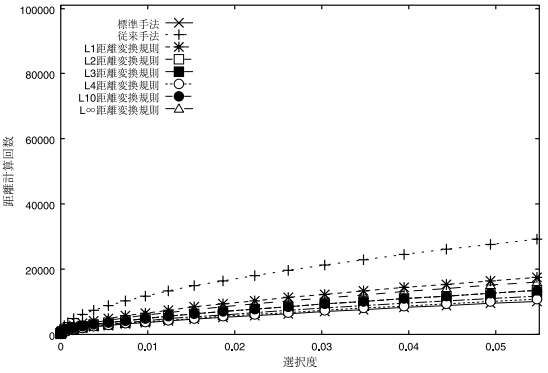


図 15 $\mathcal{L}_5$ 距離での選択度と距離計算回数の関係（20 次元楽曲）
Fig. 15 Number of distance calculation vs. selectivity.

(平成 16 年 12 月 20 日受付)
(平成 17 年 4 月 14 日採録)

(担当編集委員　片山 紀生)

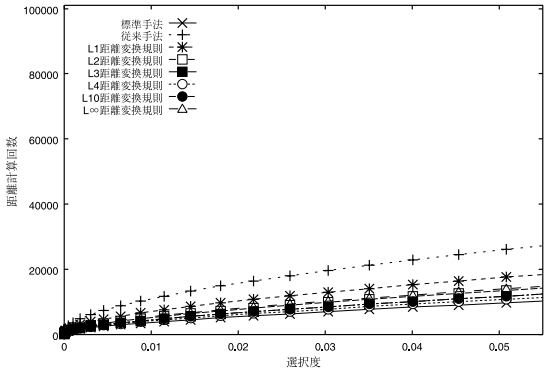


図 16 $\mathcal{L}_6$ 距離での選択度と距離計算回数の関係（20 次元楽曲）
Fig. 16 Number of distance calculation vs. selectivity.

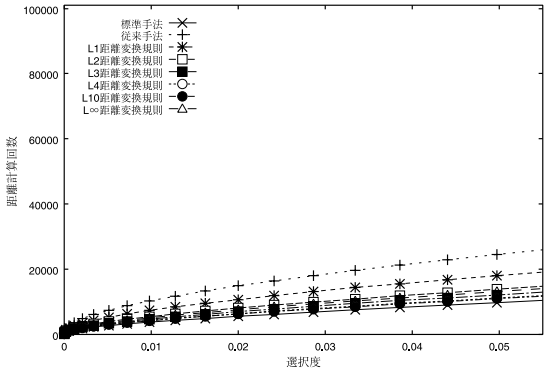


図 17 $\mathcal{L}_7$ 距離での選択度と距離計算回数の関係（20 次元楽曲）
Fig. 17 Number of distance calculation vs. selectivity.

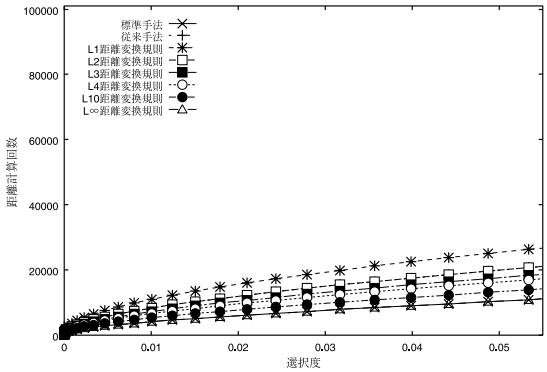


図 18 $\mathcal{L}_\infty$ 距離での選択度と距離計算回数の関係（20 次元楽曲）
Fig. 18 Number of distance calculation vs. selectivity.



木村 彰宏

1996 年 3 月中央大学理工学部情報工学科卒業．2005 年 3 月電気通信大学大学院情報システム学研究科博士前期課程修了．1996 年 4 月から NEC フィールディング（株）に勤務し，社内情報システムの開発に従事．



大西 建輔（正会員）

1998 年 3 月神戸大学大学院自然科学研究科単位取得退学，同年 4 月電気通信大学大学院情報システム学研究科助手着任．2003 年 McGill 大学客員研究員．2004 年 4 月より，東海大学理学部情報数理学科講師．アルゴリズムとデータ構造（特に，計算幾何，探索法），グラフ理論，離散数学に関心を持つ．博士（理学）．ACM 会員．



小早川倫広

2001 年 3 月電気通信大学大学院情報システム学研究科博士後期課程修了，博士（工学）．2001 年 4 月より電気通信大学大学院情報システム学研究科助手．データ工学，特にマルチメディア情報検索に関心を持つ．IEEE Computer Society，ACM，電子情報通信学会各会員．



星 守（正会員）

1970 年 3 月東京大学大学院工学系研究科修士課程修了，同年 4 月電子技術総合研究所入所，その後千葉大学工学部を経て，1992 年 4 月より電気通信大学大学院情報システム学研究科教授，現在に至る．アルゴリズムとデータ構造（特に探索法のための），情報理論，多変量データ解析に関心がある．IEEE Computer Society，IEEE Information Theory Society，ACM，電子情報通信学会，情報理論とその応用学会，日本行動計量学会，日本分類学会各会員．



大森 匡（正会員）

1990 年 3 月東京大学大学院工学系研究科情報工学専攻博士課程修了，工学博士．1994 年 4 月より電気通信大学大学院情報システム学研究科助教授．データベースシステムの高速化・高機能化およびトランザクション処理の研究に従事．ACM，電子情報通信学会各会員．