

3次元ベクトル位相場の可視化

李偉[†] 蔡 東生[†]

[†]筑波大学

近年における計算機の高速化は著しく、その進歩と共に物理学研究の手法としての計算機シミュレーションは劇的な進歩を遂げて来た。しかし、現在の計算能力は不十分であり、すべての領域の個々の流れをそのままシミュレーションすることはできない。また、より現実的な3次元形状のもとでの大規模なシミュレーション計算を実行するには、計算技法とは別の新たな技術的課題が明らかになってきた。

3次元ベクトル場を可視化する際に、ベクトル場の流れを分類する手法として位相に着目することにより、ベクトル場の解析を視覚的に行うこととした。そして、3次元ベクトル場の位相の可視化を、地球磁気圏の粒子シミュレーションに適用します。

Visualization of Three-dimensional Field Topology and Bifurcation

Wei Li[†] D.S Cai[†]

[†]筑波大学

As for the speed-up of the computer in recent years, the computer simulation as the technique of the physics research remarkably provided dramatic advancement with the advancement. However, a present calculation ability is insufficient, and cannot simulate an individual flow of all the areas as it is. Moreover, to execute a large-scale simulation calculation by original of more realistic three dimension shape, a new, technical problem besides the calculation technique is clarified.

When three dimension vector place was made visible, it was assumed that the vector field was analyzed in the sight by paying attention to the phase as a technique for classifying the flow of the vector field. And, it adjusts to the particle simulation of the earth magnetosphere making of the phase of three dimension vector place visible.

1. はじめに

スーパーコンピュータ等の発達により大量のデータを高速で処理することが出来るようになり、複雑かつ、大規模な数値シミュレーションが可能となった。しかし、得られた大容量のデータだけから、人間がその現象を的確に理解することは困難である。そこで、複雑な現象や実験結果など各種の情報(データ)を、CGを用いて人間に理解しやすいように視覚化し、画像や映像として表現する技術、可視化が必要となって来た。現在、可視化は宇宙物理学、気象学、構造力学、医学・生物学などの自然科学(Scientific visualization)、工学(Engineering visualization)、ビジネス界のあらゆる分野に適用されている。

本研究では、並列 TRISTAN code という並列完全3次元電磁 PIC コードを用い、太陽風と地球磁気圏の干渉問題の数値シミュレーションを行っている。このシミュレーションによって得られる磁場ベクトルデータはやはり膨大なものであり、可視化を行いその解析を行う必要がある。

本研究では3次元ベクトル場位相の可視化手法を用い地球磁気圏の可視化を行いその構造について解析を行ってきた。

2. ベクトル場位相の可視化

J.Helman, L.Hesslink[2]らはベクトル場位相を利用し、ベクトル場の特徴を抽出し可視化する方法を提案した。[2]は2次元のベクトル場が対象であったが、

本研究では3次元に拡張し、より複雑な3次元ベクトル場位相の可視化を行う。

3. ベクトル場の位相

3.1 ベクトル場の特異点と位相

ベクトル場における特異点とは、その速度成分が0、つまり $v(u, v, w) = 0$ となる点のことである。

ベクトル場における位相(トポロジー)とは、その流れの特徴をあらわすものであり、以下の定理[3]に従い特異点の性質により分類することが出来る。

<ハートマン・グローブマンの定理>

特異点近傍のヤコビアン固有値の縮退がなくかつハイパボリックなときその近傍での解の暫定的な振る舞いは線形化により一意に決定することが出来る。

この定理を使い、特異点近傍でベクトル場の線形化を行い位相の分類を行う。

3.2 特異点近傍でのベクトル場の線形化

特異点近傍でのヤコビアンを求めるために

ベクトル場 $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix}$ を特異点 (x_0, y_0, z_0) の近傍でテーラー展開する。

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u(x_0, y_0, z_0) \\ v(x_0, y_0, z_0) \\ w(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} + \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} + O(2) \quad (1)$$

ここで、

$$\mathbf{J} = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix}$$

とし、
特異点の定義より

$$\begin{pmatrix} u(x_0, y_0, z_0) \\ v(x_0, y_0, z_0) \\ w(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので2次以上の項を無視し

1次の線形化を行うと(1)は $\mathbf{v} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{x}$ となる。

3.3 特異点近傍の流れの分類

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \Big|_{x_0, y_0, z_0} \rightarrow$$

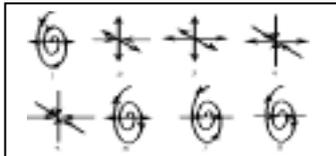


図1：特異点近傍の流れの分類

特異点近傍の流れは、ヤコビアン \mathbf{J} の固有値の性質により決定され(実部の符号により流れの向き、虚部の有無により渦を巻くかどうか)図1のように分類することが出来る。

ここで、本研究で扱うのは磁場であるため、マクスウェルの方程式におけるソレノイダル条件 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

により、ヤコビアンの固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は条件 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ を満たすものに限られる。この条件により、特異点近傍での流れのパターンは図2の4つになる。

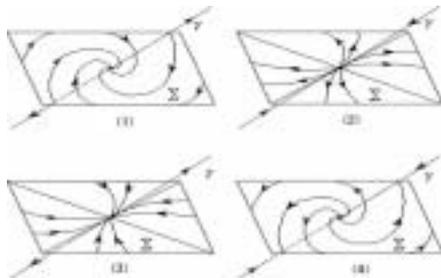


図2：磁場における特異点近傍の流れ

3.4 3次元ベクトル場の位相

式(1)におけるヤコビアンは 3×3 行列であるため3つの固有値が得られる。このうち実部が同符号である2つの固有値の固有ベクトルによりスパンされる平面を面、1つだけ異符号の固有値の固有ベクトルでスパンされる曲線を線と呼ぶ。面と線の伸張性はハートマン・グローブマンの定理で保証されている。3次元ベクトル場の位相は面と線により構成され、図3のように、1D(線) + 2D(面) = 3Dとなる。

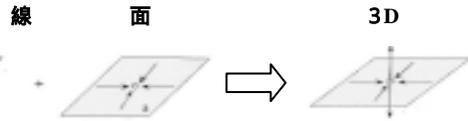


図3：3次元ベクトル場の位相

4. 可視化結果

今回は面が面を構成するような比較的単純な4つの特異点について結合の様子を調べた。特異点1(type A)と3(type Bs)、2(type Bs)と4(type As)さらに3と4が結合していると判定されそれぞれを繋ぐ結合線を可視化できた。

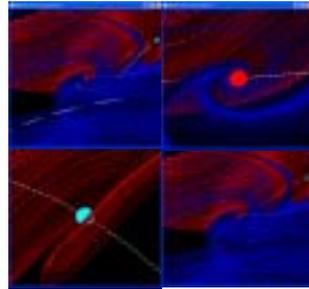


図4：特異点結合の様子

5. おわりに

特異点同士の結合(特異点結合)の様子を可視化する手法について述べた。これにより時間経過に伴う地球磁気圏の可視化を行う際、特異点結合を調べることで磁力線の繋ぎ変え現象(リコネクション)を観察するとき有効となる。

<参考文献>

- [1] 藤代 一成, 中嶋 正之 “コンピュータビジョン” 共立出版株式会社
- [2] J.L.Helman, L.Hesselink “Visualizing Vector Field Topology in Fluid Flows” IEEE Computer Graphics & Applications, May, 1991
- [5] 嶋田 尚恭 “3次元ベクトル場における可視化に関する研究” 筑波大学大学院理工学研究科, 修士論文, 2000

著者紹介



李 偉

筑波大学 システム情報工学
研究科