可変慣性モーメントによる外乱無干渉化制御

小 澤 悟† 古 谷 寛†

本論文では，可変慣性システムを定義し，このシステムに対する外乱無干渉化コントローラを導出する．これにより，慣性モーメントが可変で制御に利用することが可能な回転をともなうシステムに対して，制御トルクなどを用いずに外乱抑制を行うことができる制御手法が得られる．また，可変慣性システムは線形システムや双線形システムとは異なる性質を持つため，このシステムの制御手法として非線形制御手法の 1 つである外乱無干渉化制御を用いることを提案し，コントローラを次のようにして導出した．まず，システムの性質を調べ，可変慣性システムを定義する．次に，可変慣性システムの既知外乱無干渉化条件および外乱オブザーバを導出し，無干渉化条件を満たすためのサーボコントローラを設計する．これらを合わせることで，外乱無干渉化コントローラが得られる．さらに，数値例を用いて詳細なコントローラの設計手順を示し，数値シミュレーションによりその制御効果を確認する．

Noninteracting Control by Variable Moment of Inertia

Satoru Ozawa† and Hiroshi Furuya†

Variable inertia systems, which include variable moment of inertia and can be controlled by changing the moment of inertia, are formulated and their noninteracting controllers are derived for the systems to suppress disturbances. The formula of variable inertia systems consists of two subsystems related to rotation and variable inertia. The rotational subsystem contains an ordinary differential equation and the subsystem of the variable inertia is independent. Because of these system properties, it is proposed that the noninteracting controllers are employed for the systems, and derived from a noninteracting condition for the rotational subsystems to known disturbances, a disturbance estimator, and a servo controller for the subsystem associated with the variable inertia. Then the resulting closed loop system is noninteractive to disturbances. For a demonstration and a confirmation of the control effectiveness, a detailed application of the procedure of the noninteracting controller design and results of numerical simulations for an example are illustrated.

1. はじめに

航空宇宙工学やロボット工学の分野では，軌道上の大型宇宙構造物あるいは人工衛星，宇宙機，複数リンク機構を持つロボットアームなどの，回転運動をともなうシステムが扱われる．このようなシステムの制振制御の際，主に回転軸まわりのトルクが制御入力として用いられている．

一方，システムの慣性モーメントを変化させることでシステム自身の制振制御を行うという概念が提案されている．たとえば，適応構造システムの 1 つとして，ジンバル軸まわりの慣性モーメントが可変な適応型ジャイロダンパが提案されている[1)]．さらに文献 2) では，可変慣性モーメントを準静的に変化させることで複数モードの制振が可能であること，ならびに能動的に変化させることでダンパを持たない場合でも制振が可能であることが示されている．ここでは，このように可変慣性モーメントを含み，それによりシステム自身の動特性を変えることができるシステムを可変慣性システムと呼ぶ．この可変慣性システムの制御問題は従来の研究で扱われていないため，制御設計の自由度が広がるという意味でその制御手法を確立する意義は大きい．したがって，本研究の目的を，可変慣性システムを定義し，このシステムに適当な制御手法を導くこととする．

ここに，可変慣性システムに応用が可能であると考えられる制御のカテゴリを 2 つあげることができる．1 つは可変粘性システムや可変剛性システムなどに代表される可変構造システムの制御に用いられている，Bilinear control[3)]および双線形 H_∞ 制御[4)]，スライディングモードコントロール[5)]などである．これらの

† 東京工業大学大学院総合理工学研究科
Department of Built Environment, Tokyo Institute of Technology

制御手法は，双線形システム，すなわち状態方程式が基本的には線形であるが，制御入力が状態変数と互いに双線形であるシステムの制御設計を可能にする．可変粘性システムや可変剛性システムは，可変構造パラメータが双線形項を構成しているため双線形システムであり，これらの制御手法が利用できる．一方，可変慣性システムも可変慣性モーメントによる可変慣性項が変位の加速度と互いに双線形であるため双線形システムと類似しているが，このシステムは可変慣性項を制御に用いるため双線形システムには属さず，したがってこれらの制御手法は利用できない．もう1つは，制御トルクを持ち慣性が可変なシステムの制御に用いられている，ゲインスケジューリング制御[6)]，および無干渉化制御や変数変換による入出力線形化手法[7)~9)]である．ゲインスケジューリング制御は，線形可変パラメータ（LPV）システムの制御手法として用いられており，システムパラメータが既知の範囲内で可変である線形システムの制御に用いることができる．しかしながら，双線形システムの場合と同様に，可変慣性システムは線形可変パラメータシステムには属さない．一方，入出力線形化手法に用いられている無干渉化制御および変数変換は，制御対象を，一般的な非線形システムである非線形アフィンシステムとしている．したがって，理論的には，無干渉化制御および変数変換を可変慣性システムに適用することが可能であると考えられる．

無干渉化および変数変換による入出力線形化手法は，非線形アフィンシステムに対してその出力を順次微分していくことにより制御入力を出現させるという手法である．このとき，入出力が線形化されたシステムに直接現れない，ゼロダイナミクスというサブシステムの安定性を考慮しなくてはならない．可変慣性システムを非線形アフィンシステムとして表した場合，可変慣性項を分母として持つ分数項が現れるためゼロダイナミクスは非常に複雑となり，安定解析が困難となる．そのため，入出力線形化手法を直接適用するのは難しい．一方，無干渉化制御は，制御対象を双線形システムに限定した場合，微積分項を含まないシンプルな代数方程式を解くことによりコントローラが導けることが示されている[10),11)]．そこで，双線形システムと可変慣性システムは類似していること，および双線形システムの無干渉化コントローラが代数方程式により導出できることから，無干渉化制御を応用することにより可変慣性システムの制御設計を行うことを考える．

以下，2章では，単純な可変慣性システムを例にその特徴を調べ，その結果を用いて可変慣性システムを定義する．3章では，非線形アフィンシステムに対する既知外乱を無干渉化するコントローラならびに可変慣性システムの外乱オブザーバを求め，可変慣性システムに対する外乱無干渉化コントローラを導出する．4章では，単純な数値例に対してコントローラを設計することにより具体的な設計手順を示すとともに，数値シミュレーションを行い，本手法による制御効果について検討する．最後に，5章において，本研究の結論を述べる．

2. 運動方程式と状態方程式

序論でも述べたように，適応構造システムの1つとして提案されている適応型ジャイロシステムなど，可変慣性システムの制御手法が必要とされている．本章では，可変慣性システムとしての特徴を持つ**図1**のシステムを用いてシステムの特徴を調べ，その結果を用いて可変慣性システムのクラスを定義する．

ここでは，まず，図1に示される2自由度の可変慣性モーメントを持つ回転システムの，運動方程式および状態方程式を導出する．このシステムは，中心をピン結合された剛体棒と回転バネ，付加質量，伸縮アクチュエータから構成される．システムが平衡状態にあるとき，剛体棒は横軸に平行であり，回転バネによる復元力は回転角に比例する．また，図1において，m は付加質量，$l = l_0 + \Delta l$ は中心から付加質量までの距離，k は回転バネの回転剛性，θ は横軸からの回転角，τ は中心まわりの外部トルク，$I_\theta = I_{\theta 0} + \Delta I_\theta$ は慣性モーメントを表す．2つの付加質量はアクチュエータにより対称的に制御され，中心から付加質量までの距離はつねに等しいとする．

アクチュエータによる付加質量への制御効果は

$$m\Delta\ddot{l} = u_l \tag{1}$$

で表される．だたし，u_l はアクチュエータによる制御力である．ここで，角速度は小さく，したがって遠心

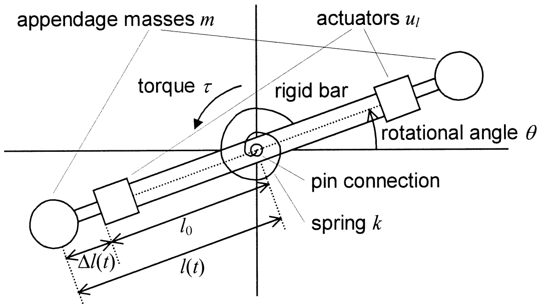

図1 2自由度の可変慣性モーメントを持つ回転システム
Fig. 1 2-DOFs rotational system with variable mass distribution.

力は無視できると仮定する．慣性モーメント，付加質量，付加質量の変位の関係は

$$I_\theta = 2ml^2 \tag{2}$$

であるから，I_θ の加速度は

$$\Delta\ddot{I}_\theta = 4m\Delta\dot{l}^2 + 4(l_0 + \Delta l)u_l \tag{3}$$

と書ける．この関係式を用いることにより，u_l の代わりに I_θ の加速度を制御入力として用いることができる．I_θ に関する制御入力を u_I と表す．

角運動量の時間微分は外力のモーメントに等しいので，図 1 より，回転に関する運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\left(I_\theta \frac{d}{dt}\theta\right) = -k\theta + \tau \tag{4}$$

となる．これより，システムの運動方程式

$$(I_{\theta 0} + \Delta I_\theta)\ddot{\theta} + \Delta\dot{I}_\theta\dot{\theta} + k\theta = \tau \tag{5}$$

$$\Delta\ddot{I}_\theta = u_I \tag{6}$$

が得られる．この運動方程式は，従来の可変構造システムにおける可変粘性や可変剛性などの可変構造パラメータに相当する可変慣性モーメント ΔI_θ およびその微分 $\Delta\dot{I}_\theta$ を持ち，式 (6) を通してそれらを変化させることでシステムの動特性を変えることができる．したがって，このシステムは可変慣性システムである．さらに，この運動方程式を非線形アフィンシステムに変換することにより状態方程式を導くと，

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \dfrac{-kx_1 - x_2x_4}{I_{\theta 0} + x_3} \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{I_{\theta 0} + x_3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\tau + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u_I \tag{7}$$

が得られる．ただし，$[x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T = [\theta\ \dot{\theta}\ \Delta I_\theta\ \Delta\dot{I}_\theta]^T$ である．式 (7) は，システムの可変構造パラメータである x_3 と x_4 が非線形項を構成しているため，線形システムとして扱うことはできない．さらに，x_4 が制御入力ではなく状態であり，x_3 による分数項が存在するため，従来の可変構造システムのように双線形制御の適用も不可能である．

次に，可変慣性システムの持つ性質を調べる．ここで，形式的に分数表現を避けるため，次のようなディスクリプタ表現

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{\theta 0} + x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k & -x_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\tau + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u_I \tag{8}$$

を用いる．従来の可変構造システムとの大きな違いは，x_2 の微分が x_3 を係数として持つこと，およびすべての可変構造パラメータが制御入力ではなく状態であることである．また，従来のシステムと類似している点は，すべての可変構造パラメータが同じ行に存在しているということである．これは，式 (8) において x_2 をシステムの出力として選択した場合，出力の一回微分にすべての可変構造パラメータが現れるということを意味する．

式 (8) は，

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_{\theta 0} + x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -x_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\tau \tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u_I \tag{10}$$

のように 2 つのサブシステムに分割できる．ここで，式 (9) は回転に関するサブシステム，式 (10) は慣性モーメントに関するサブシステムである．式 (9) のシステム行列は，

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_{\theta 0} + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_{\theta 0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 & 0 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 & 0 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

と書ける．式 (4) より，式 (11) と (12) の右辺第 2 項，および状態ベクトル $[x_1\ x_2]^T$，$[x_3\ x_4]^T$ の関係は，

$$\frac{d}{dt}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 & 0 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 & 0 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{13}$$

で与えられる．

以上の結果をもとに，可変慣性システムのクラスを定義する．システムは，

$$G_1\colon \mathbf{E}_1(\mathbf{x}_2)\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_1(\mathbf{x}_2)\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_{11}\mathbf{w} \tag{14}$$

$$G_2\colon \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_{22}\mathbf{u}_2 \tag{15}$$

で表される．ただし，$\mathbf{x}_1 \in R^{n_1}$ は回転に関する状態ベクトル，$\mathbf{x}_2 \in R^{n_2}$ は可変慣性に関する状態ベクトル，$\mathbf{w} \in R^{m_1}$ は一般化力，$\mathbf{u}_2 \in R^{m_2}$ は制御入力である．また，式 (14) のシステム行列は，

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{x}_2) = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_L\,\mathrm{diag}(\mathbf{x}_2)\mathbf{E}_R \tag{16}$$

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{x}_2) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_L\,\mathrm{diag}(\mathbf{x}_2)\mathbf{A}_R \tag{17}$$

である．これらは式 (11) と (12) に対応する．このとき

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{I}_L\,\mathrm{diag}(\mathbf{x}_1)\mathbf{I}_R\mathbf{x}_2] = \mathbf{E}_L\,\mathrm{diag}(\mathbf{x}_2)\mathbf{E}_R\dot{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{A}_L\,\mathrm{diag}(\mathbf{x}_2)\mathbf{A}_R\mathbf{x}_1 \tag{18}$$

を満たす $\mathbf{I}_L$，$\mathbf{I}_R$ が存在するようなシステムを，可変慣性システムと定義する．

ここで文献 2) の式 (19) より，実際に適応型ジャイロシステムが可変慣性システムのクラスに含まれることが確認できる．また，多間接ロボットアームなども，可変慣性モーメントの制御への利用を意識することにより可変慣性システムとして扱うことができる．

3. 外乱無干渉化制御

可変慣性システムは，従来の可変構造システムと異なり，状態変数による分数項が存在する．これにより制御システムの安定解析が困難になるため，外乱無干渉化制御を直接適用することは難しい．一方，ディスクリプタ表現でシステムを記述した場合，可変構造パラメータが制御入力ではなく状態であるなどの違いがあるが，従来のシステムと類似していることが分かった．これは，可変構造パラメータを直接制御入力として用いることができると仮定すれば，可変慣性システムを従来の可変構造システムのように扱うことができる可能性があることを示唆する．加えて，双線形システムの外乱無干渉化コントローラは，単に代数方程式を解くことで得られることが示されている[10),11)]．したがって，可変構造パラメータを制御入力として用いることができると仮定し，外乱無干渉化条件を求め，その条件を満たすための新たなコントローラを設計することで，外乱無干渉化コントローラの導出を試みる．

そのため，まず，非線形アフィンシステムに対する無干渉化制御[9)]を応用し，既知外乱を無干渉化するコントローラを求める．次に，可変慣性システムに入力される外乱を観測するための外乱オブザーバを設計する．これらの結果をもとに，可変構造パラメータを制御入力として用いることができると仮定し，外乱無干渉化条件を求める．最後に，この条件を満たすためのサーボコントローラを設計し，可変慣性システムに対する外乱無干渉化コントローラを導出する．

3.1 非線形アフィンシステムの既知外乱無干渉化制御

本節では，非線形アフィンシステムに対する無干渉化制御をもとに，既知外乱を無干渉化するコントローラを導出する．ここで扱う非線形アフィンシステムは

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x})\mathbf{w}_E + \mathbf{g}_2(\mathbf{x})\mathbf{u} \tag{19}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \tag{20}$$

である．ただし，$\mathbf{x} \in R^n$ は状態ベクトル，$\mathbf{w}_E \in R^m$ は既知外乱，$\mathbf{u} \in R^m$ は制御入力，$\mathbf{y} \in R^m$ は $\mathbf{w}_E$ に対して無干渉化する $\mathbf{x}$ の要素のベクトルであるとする．また，$\mathbf{f}(\mathbf{x})\colon R^n \to R^n$，$\mathbf{h}(\mathbf{x})\colon R^n \to R^m$ は解析的なベクトル場，$\mathbf{g}_1(\mathbf{x})\colon R^n \to R^{n\times m}$，$\mathbf{g}_2(\mathbf{x})\colon R^n \to R^{n\times m}$ は m 個のベクトル場 $R^n \to R^n$ のベクトルである．

ここで，式 (19)，(20) に対して，相対次数ベクトル[9)]を定義する．そのため $\mathbf{k}_1 \in N^m$ とし，

$$\mathbf{R}_1(\mathbf{x};\mathbf{k}_1) = \begin{bmatrix} L_{\mathrm{g}_{11}}L_{\mathbf{f}}^{k_1-1}h_1(\mathbf{x}) & \cdots & L_{\mathrm{g}_{1m}}L_{\mathbf{f}}^{k_1-1}h_1(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{\mathrm{g}_{11}}L_{\mathbf{f}}^{k_m-1}h_m(\mathbf{x}) & \cdots & L_{\mathrm{g}_{1m}}L_{\mathbf{f}}^{k_m-1}h_m(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \tag{21}$$

を定義する．$\mathbf{r}_1 \in N^m$ に関して，

i) $\mathbf{R}_1(\mathbf{x};\mathbf{k}_1)=0,\ 1\le k_{1i}<r_{1i},\ i=1,\ldots,m,\ \mathbf{x}$ は $\mathbf{x}_0$ の近傍

ii) $\operatorname{rank}\mathbf{R}_1(\mathbf{x};\mathbf{r}_1)=m,\ \mathbf{x}=\mathbf{x}_0$

であるならば，$\mathbf{x}_0\in R^n$ における $\mathbf{w}_E$ から $\mathbf{y}$ への相対次数ベクトルは $\mathbf{r}_1$ となる．ただし，式 (21) において，$L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})$: $R^n\to R$ は

$$L_{\mathbf{f}}h(\mathbf{x})=\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}^T}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{22}$$

で与えられる関数 $h(\mathbf{x})$ の $\mathbf{f}$ に関する Lie 微分であり，$L_{\mathbf{f}}^r h(\mathbf{x})$ は r 階 Lie 微分を表す．同様に，$\mathbf{u}$ から $\mathbf{y}$ への相対次数ベクトルを $\mathbf{r}_2\in N^m$ とする．

$\mathbf{r}\in N^m$，$\mathbf{r}=\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_2$ を仮定する．いま，

$$\mathbf{y}^{(\mathbf{r})}(\mathbf{x})=\left[\frac{d^{r_1}}{dt^{r_1}}y_1(\mathbf{x})\ \cdots\ \frac{d^{r_m}}{dt^{r_m}}y_m(\mathbf{x})\right]^T \tag{23}$$

とすれば，$\mathbf{u}$ および $\mathbf{w}_E$ から $\mathbf{y}$ への入出力システム

$$\mathbf{y}^{(\mathbf{r})}(\mathbf{x})=\mathbf{a}(\mathbf{x})+\mathbf{B}_1(\mathbf{x})\mathbf{w}_E+\mathbf{B}_2(\mathbf{x})\mathbf{u} \tag{24}$$

が得られる．ただし，

$$\begin{aligned}&\mathbf{a}(\mathbf{x})=L_{\mathbf{f}}^{\mathbf{r}}\mathbf{h}(\mathbf{x}),\ \mathbf{B}_1(\mathbf{x})=L_{\mathbf{g}_1}L_{\mathbf{f}}^{\mathbf{r}-1}\mathbf{h}(\mathbf{x}),\\&\mathbf{B}_2(\mathbf{x})=L_{\mathbf{g}_2}L_{\mathbf{f}}^{\mathbf{r}-1}\mathbf{h}(\mathbf{x})\end{aligned} \tag{25}$$

である．このとき，式 (24) の i 番目のサブシステムは，

$$\begin{aligned}&\dot{\xi}_{1i}=\xi_{2i}\\&\quad\vdots\\&\dot{\xi}_{r_i}=a_i(\mathbf{x})+\mathbf{B}_{1i}(\mathbf{x})\mathbf{w}_E+\mathbf{B}_{2i}(\mathbf{x})\mathbf{u}\end{aligned} \tag{26}$$

$$\mathbf{y}_i=\xi_{1i} \tag{27}$$

と書ける．

ここで，制御入力 $\mathbf{u}$ を

$$\mathbf{u}=-\mathbf{B}_2^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}_1(\mathbf{x})\mathbf{w}_E \tag{28}$$

と選ぶと，式 (28) による閉ループシステムは

$$\mathbf{y}^{(\mathbf{r})}(\mathbf{x})=\mathbf{a}(\mathbf{x}) \tag{29}$$

となり，既知外乱 $\mathbf{w}_E$ に対する無干渉化が達成される．

3.2 可変慣性システムの外乱オブザーバ

式 (14) に入力される外乱 $\mathbf{w}$ の発生器を，

$$\dot{\mathbf{x}}_w=\mathbf{A}_w\mathbf{x}_w \tag{30}$$

$$\mathbf{w}=\mathbf{C}_w\mathbf{x}_w \tag{31}$$

とする．式 (14) と合わせて，

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}_1\\ \dot{\mathbf{x}}_w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{E}_1^{-1}(\mathbf{x}_2)\mathbf{A}_1(\mathbf{x}_2) & \mathbf{E}_1^{-1}(\mathbf{x}_2)\mathbf{B}_{11}\mathbf{C}_w\\ 0 & \mathbf{A}_w\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_w\end{bmatrix} \tag{32}$$

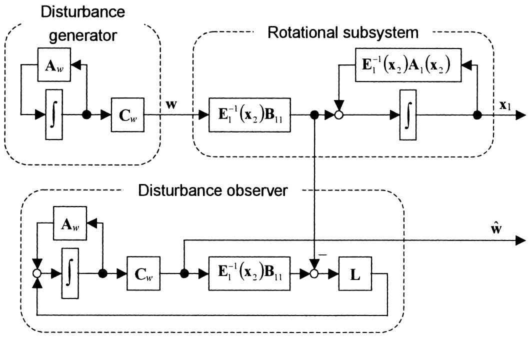

図 2 外乱オブザーバ
Fig. 2 Disturbance observer.

が得られる．このシステムに対して，外乱を観測するための最小次元オブザーバを設計する．$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$ は直接観測可能であると仮定すると，式 (32) は

$$\dot{\mathbf{x}}_w=\mathbf{A}_w\mathbf{x}_w \tag{33}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_1-\mathbf{E}_1^{-1}(\mathbf{x}_2)\mathbf{A}_1(\mathbf{x}_2)\mathbf{x}_1=\mathbf{E}_1^{-1}(\mathbf{x}_2)\mathbf{B}_{11}\mathbf{C}_w\mathbf{x}_w \tag{34}$$

と書き換えられる．ただし，式 (34) は式 (33) の出力方程式である．このシステムに対する同一次元オブザーバは，$\mathbf{L}$ をオブザーバゲインとして，

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}}_w=&\ \mathbf{A}_w\hat{\mathbf{x}}_w\\&+\mathbf{L}\Big[\mathbf{E}_1^{-1}(\mathbf{x}_2)\mathbf{B}_{11}\mathbf{C}_w\hat{\mathbf{x}}_w\\&-\big\{\dot{\mathbf{x}}_1-\mathbf{E}_1^{-1}(\mathbf{x}_2)\mathbf{A}_1(\mathbf{x}_2)\mathbf{x}_1\big\}\Big]\end{aligned} \tag{35}$$

となる．$\dot{\mathbf{x}}_1$ を消去するため，変換 $\mathbf{z}=\hat{\mathbf{x}}_w+\mathbf{L}\mathbf{x}_1$ を行うと，外乱オブザーバ

$$\begin{aligned}K_{\hat{w}}\colon \dot{\mathbf{z}}=&\ \big[\mathbf{A}_w+\mathbf{L}\mathbf{E}_1^{-1}(\mathbf{x}_2)\mathbf{B}_{11}\mathbf{C}_w\big]\mathbf{z}\\&-\big[\mathbf{A}_w\mathbf{L}+\mathbf{L}\mathbf{E}_1^{-1}(\mathbf{x}_2)\mathbf{B}_{11}\mathbf{C}_w\mathbf{L}\\&-\mathbf{L}\mathbf{E}_1^{-1}(\mathbf{x}_2)\mathbf{A}_1(\mathbf{x}_2)\big]\mathbf{x}_1\end{aligned} \tag{36}$$

$$\hat{\mathbf{w}}=\mathbf{C}_w\mathbf{z}-\mathbf{C}_w\mathbf{L}\mathbf{x}_1 \tag{37}$$

が得られる．この外乱オブザーバを**図 2** に示す．このとき，$\mathbf{e}=\hat{\mathbf{x}}_w-\mathbf{x}_w$ とすると，

$$\dot{\mathbf{e}}=[\mathbf{A}_w+\mathbf{L}\mathbf{E}_1^{-1}(\mathbf{x}_2)\mathbf{B}_{11}\mathbf{C}_w]\mathbf{e} \tag{38}$$

であるため，$\mathbf{A}_w+\mathbf{L}\mathbf{E}_1^{-1}(\mathbf{x}_2)\mathbf{B}_{11}\mathbf{C}_w$ は安定である必要がある．式 (38) を安定化するオブザーバゲイン $\mathbf{L}$ は，たとえば $\mathbf{E}_1^{-1}(\mathbf{x}_2)$ が有界であれば，2 次安定化制御[12]などを用いて求めることができる．

3.3 可変慣性システムの外乱無干渉化制御

2 章で定式化された可変慣性システムに対する外乱無干渉化コントローラを，非線形アフィンシステムに対する既知外乱無干渉化コントローラと外乱オブザーバを用いて導く．2 章において，可変慣性システムは，

$$G_1\colon \mathbf{E}_1(\mathbf{x}_2)\dot{\mathbf{x}}_1=\mathbf{A}_1(\mathbf{x}_2)\mathbf{x}_1+\mathbf{B}_{11}\mathbf{w} \tag{39}$$

$$G_2\colon \dot{\mathbf{x}}_2=\mathbf{A}_2\mathbf{x}_2+\mathbf{B}_{22}\mathbf{u}_2 \tag{40}$$

と定義された．ただし式 (39) のシステム行列は

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{x}_2) = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_L \operatorname{diag}(\mathbf{x}_2)\mathbf{E}_R \tag{41}$$

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{x}_2) = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_L \operatorname{diag}(\mathbf{x}_2)\mathbf{A}_R \tag{42}$$

であり，

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}[\mathbf{I}_L \operatorname{diag}(\mathbf{x}_1)\mathbf{I}_R\mathbf{x}_2]\\ &\quad = \mathbf{E}_L \operatorname{diag}(\mathbf{x}_2)\mathbf{E}_R\dot{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{A}_L \operatorname{diag}(\mathbf{x}_2)\mathbf{A}_R\mathbf{x}_1\end{aligned} \tag{43}$$

を満たす $\mathbf{I}_L$，$\mathbf{I}_R$ が存在する．

ここで，外乱無干渉化が可能であるためには，外乱入力に対応する信号が可変慣性項により発生可能でなくてはならない．そのため，すべての ξ_1，ξ_2 に対して

$$\mathbf{I}_L \operatorname{diag}(\xi_1)\mathbf{I}_R\xi_2 = \mathbf{B}_{11}\boldsymbol{v} \tag{44}$$

を満たす $\boldsymbol{v}$ が存在している必要がある．これは，マッチング条件である．さらに，$(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_{22})$ が可制御である必要がある．これは制御入力 $\mathbf{u}_2$ に対して，状態ベクトル $\mathbf{x}_2$ が可制御であるための条件である．

まず，$\mathbf{x}_2$ を式 (39) の制御入力と見なし，外乱を無干渉化するための条件を求める．式 (39) は，

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{E}_0^{-1}\mathbf{A}_0\mathbf{x}_1 - \mathbf{E}_0^{-1}\mathbf{E}_L \operatorname{diag}(\mathbf{x}_2)\mathbf{E}_R\dot{\mathbf{x}}_1\\ &\quad + \mathbf{E}_0^{-1}\mathbf{A}_L \operatorname{diag}(\mathbf{x}_2)\mathbf{A}_R\mathbf{x}_1 + \mathbf{E}_0^{-1}\mathbf{B}_{11}\mathbf{w}\end{aligned} \tag{45}$$

と書き換えることができる．ここで $\mathbf{w}$ を $\hat{\mathbf{w}}$ に置き換えた式 (45) を制御対象とし，既知外乱を

$$\mathbf{w}_E = -\mathbf{E}_0^{-1}\mathbf{E}_L \operatorname{diag}(\mathbf{x}_2)\mathbf{E}_R\dot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{E}_0^{-1}\mathbf{B}_{11}\hat{\mathbf{w}} \tag{46}$$

と置く．式 (45) および (46) と式 (19) を比較すると，

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{E}_0^{-1}\mathbf{A}_0\mathbf{x}_1 \tag{47}$$

$$\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1) = \mathbf{I} \tag{48}$$

$$\mathbf{g}_2(\mathbf{x}_1)\mathbf{x}_2 = \mathbf{E}_0^{-1}\mathbf{A}_L \operatorname{diag}(\mathbf{x}_2)\mathbf{A}_R\mathbf{x}_1 \tag{49}$$

が得られる．いま，$\mathbf{w}_E$ の非ゼロ要素および $\mathbf{x}_2$ から $\mathbf{y}$ への相対次数ベクトルの要素がすべて 1 となるように，

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}_1 \tag{50}$$

を決定する．このとき，式 (25)，(47)，(48)，(50) より，

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}_1) = L_{\mathbf{f}}\mathbf{h}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{C}\mathbf{E}_0^{-1}\mathbf{A}_0\mathbf{x}_1 \tag{51}$$

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{x}_1) = L_{\mathbf{g}_1}\mathbf{h}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{C} \tag{52}$$

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{x}_1) = L_{\mathbf{g}_2}\mathbf{h}(\mathbf{x}_1) = \mathbf{C}\mathbf{g}_2(\mathbf{x}_1) \tag{53}$$

が得られる．これより，式 (28) を用いて，$\mathbf{w}_E$ に対する $\mathbf{x}_2$ の無干渉化条件

$$\mathbf{x}_2 = -[\mathbf{C}\mathbf{g}_2(\mathbf{x}_1)]^{-1}\mathbf{C}\mathbf{w}_E \tag{54}$$

が得られる．式 (46) および (49) より，式 (54) は

$$\begin{aligned}&\mathbf{C}\mathbf{E}_0^{-1}\mathbf{A}_L \operatorname{diag}(\mathbf{x}_2)\mathbf{A}_R\mathbf{x}_1\\ &\quad = \mathbf{C}\mathbf{E}_0^{-1}\mathbf{E}_L \operatorname{diag}(\mathbf{x}_2)\mathbf{E}_R\dot{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{C}\mathbf{E}_0^{-1}\mathbf{B}_{11}\hat{\mathbf{w}}\end{aligned} \tag{55}$$

と書き換えることができる．この条件は，

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_L \operatorname{diag}(\mathbf{x}_2)\mathbf{E}_R\dot{\mathbf{x}}_1\\ &\quad = \mathbf{A}_L \operatorname{diag}(\mathbf{x}_2)\mathbf{A}_R\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_{11}\hat{\mathbf{w}}\end{aligned} \tag{56}$$

よりゼロ要素を取り除いた条件と等しい．さらに式 (43)，(56) より，

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{I}_L \operatorname{diag}(\mathbf{x}_1)\mathbf{I}_R\mathbf{x}_2] = \mathbf{B}_{11}\hat{\mathbf{w}} \tag{57}$$

となる．式 (57) において，$\mathbf{x}_1$，$\mathbf{x}_2$ は分離しているため，$\mathbf{x}_2$ について解くことができる．その解を

$$\mathbf{x}_2 = \boldsymbol{\Phi}\left(\mathbf{x}_1, \dot{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{w}}, \int \hat{\mathbf{w}}dt\right) \tag{58}$$

と置く．

$\mathbf{x}_2$ を制御入力として用いることができると仮定した場合，式 (58) を式 (39) のコントローラとして用いることで**図 3** のようになり，外乱無干渉化が達成される．しかし，実際には $\mathbf{x}_2$ は式 (40) の状態変数であり，直接，制御入力として用いることはできない．したがって，$\mathbf{x}_2$ を $\boldsymbol{\Phi}$ に追従させるため，サーボコントローラを用いることを考える．

ここでは，$\mathbf{x}_2 \to \boldsymbol{\Phi}$ とするためのサーボコントローラとして

$$\dot{\mathbf{x}}_T = \mathbf{A}_T\mathbf{x}_T + \mathbf{B}_T(\boldsymbol{\Phi} - \mathbf{x}_2) \tag{59}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{C}_T\mathbf{x}_T \tag{60}$$

を用いる．このとき，$\boldsymbol{\Phi}$ から $\mathbf{x}_2$ までの閉ループシステムは

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{x}}_2\\ \dot{\mathbf{x}}_T\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_{22}\mathbf{C}_T\\ -\mathbf{B}_T & \mathbf{A}_T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_2\\ \mathbf{x}_T\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{B}_T\end{bmatrix}\boldsymbol{\Phi} \tag{61}$$

となる．このサーボシステムを**図 4** に示す．これにより $\mathbf{x}_2$ が $\boldsymbol{\Phi}$ に追従するようになり，式 (61) が定常状態のとき，式 (56) が満たされる．このとき，システムは

$$\mathbf{E}_0\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_0\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_{11}(\mathbf{w} - \hat{\mathbf{w}}) \tag{62}$$

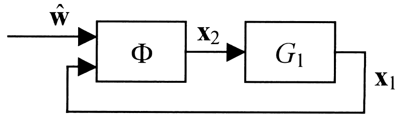

図 3　$\mathbf{x}_2$ を制御入力として用いた場合の外乱無干渉化制御
Fig. 3　Noninteracting controlled system with $\mathbf{x}_2$ as control input.

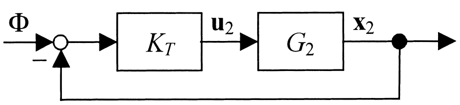

図 4　K_T と G_2 のサーボシステム
Fig. 4　Servo system with G_2 and controller K_T.

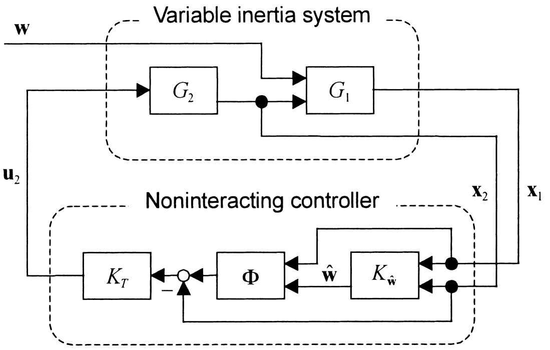

図 5 外乱無干渉化制御システム
Fig. 5 Noninteracting controlled system.

と等価になり，さらに外乱オブザーバにより $\hat{\mathbf{w}} \to \mathbf{w}$ となるため，外乱無干渉化が達成できる．最後に，既知外乱無干渉化条件と外乱オブザーバ，サーボコントローラを合わせることにより可変慣性システムの外乱無干渉化コントローラが構築できる．以上により得られた外乱無干渉化コントローラ，ならびに外乱に対して無干渉化された可変慣性システムを**図 5** に示す．

ここで，式 (36) または (61) が過渡状態のとき，および $\mathbf{x}_2$ の値域に制約がある場合などには $\mathbf{x}_2$ は正確に式 (56) を満たすことはできない．また式 (57) より，無干渉化できる外乱の範囲は $\mathbf{x}_2$ の制約に大きく依存していることが分かる．その具体的な程度は，次章で数値例を用いて議論する．一方，式 (61) がローパスフィルタとして働くために，制御スピルオーバを防ぐことができるシステムとなっていることも分かる．

4. 数 値 例

3 章において，2 章で定式化された可変慣性システムの外乱無干渉化制御が，無干渉化制御および外乱オブザーバ，サーボ制御により達成できることが示された．一方，実際のシステムでは，外乱オブザーバおよびサーボシステムが定常状態に至ることは少なく，さらに物理的制約により $\mathbf{x}_2$ の変動範囲が制限されている場合が多い．したがって，システムを外乱に対して完全に無干渉化するのは非常に困難であると考えられ，本手法によりどの程度の外乱抑制が可能であるかを検証する必要がある．

以上をふまえて本章では，数値例として，2 章で用いた 2 自由度の可変慣性システムを再び扱う．いくつかの式が重複するが，このシステムに対する制御設計の手順を詳細に示す．また，制御性能を検証するために数値シミュレーションを行う．

ここでの設計対象は，図 1 に示されるシステムである．$l_0 = 0.5$ および $0 \le \Delta l \le 0.5$，$m = 2$，$k = 1$ とし，$I_{\theta 0} = 2$，$-1 \le \Delta I_\theta \le 2$ となる．このとき，システムは

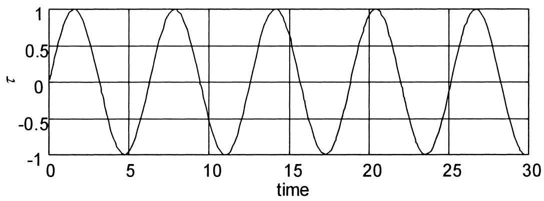

図 6 システムに入力されるトルク外乱
Fig. 6 External torque to input to system.

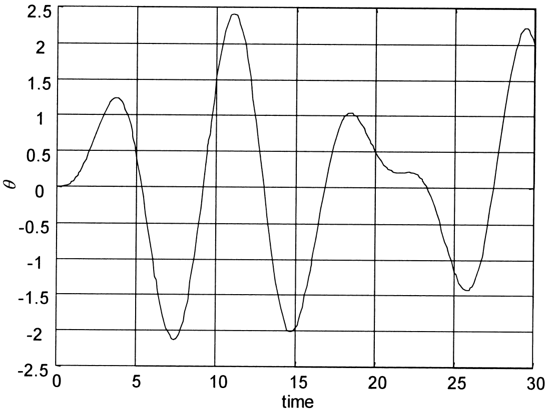

図 7 外乱に対する制御前の可変慣性システムの応答
Fig. 7 Response of variable inertia system to disturbance without control.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x_3+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tau \quad (63)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_I \quad (64)$$

のように表される，ダンパ項のない回転振動システムとなる．$\Delta l \equiv 0$ あるいは $[x_3\ x_4]^T \equiv 0$ であるときの，定常外乱（**図 6**）に対するこのシステムの応答を**図 7** に示す．

このシステムが可変慣性システムのクラスに属すかを検証するために，システム行列を検証する．式 (63) のシステム行列は，

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x_3+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 & 0 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{65}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 & 0 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{66}$$

と書ける．ここで，式 (63) の状態ベクトルと，式 (65) および (66) の可変項は

$$\frac{d}{dt}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 & 0 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 & 0 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \tag{67}$$

という関係があることが分かる．したがって，式 (63), (64) で表されるシステムは可変慣性システムである．さらに，$\upsilon = \xi_2\xi_3$ であるとき，

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_3 \\ \xi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\upsilon \tag{68}$$

を満たすので，このシステムは外乱無干渉化が可能である．

まずは，外乱無干渉化条件を求める．式 (65)，(66) ならびに (63) における外乱の係数を式 (56) に代入すると，

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 & 0 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 & 0 \\ 0 & x_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\hat{\tau} \tag{69}$$

が得られる．式 (67) より，式 (69) は

$$\frac{d}{dt}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\hat{\tau} \tag{70}$$

と書き換えられる．これを $[x_3\ x_4]^T$ について解けば，

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{x_2}\displaystyle\int_{t_0}^{t}\hat{\tau}dt \\ -\dfrac{\dot{x}_2}{x_2^2}\displaystyle\int_{t_0}^{t}\hat{\tau}dt + \dfrac{\hat{\tau}}{x_2} \end{bmatrix} \tag{71}$$

が得られる．

次に，外乱オブザーバを設計する．外乱発生器を

$$\dot{\mathbf{x}}_w = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}_w, \quad \tau = [1\ 0]\mathbf{x}_w \tag{72}$$

と仮定する．この外乱に対して外乱オブザーバを設計した場合，C^2 級の外乱を定常誤差なく観測できる外乱オブザーバが設計できる．式 (63) および (72) より，式 (38) のシステム行列は

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/(\Delta I_\theta + 2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{73}$$

となる．ここで，式 (73) のオブザーバゲインとして

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & -23.664 \\ 0 & -20 \end{bmatrix} \tag{74}$$

を用いる．このとき，**図 8** に示されるすべての ΔI_θ に対する式 (73) の根軌跡により，式 (74) が式 (73) を安定化するオブザーバゲインであることが確かめられる．これにより，外乱オブザーバ

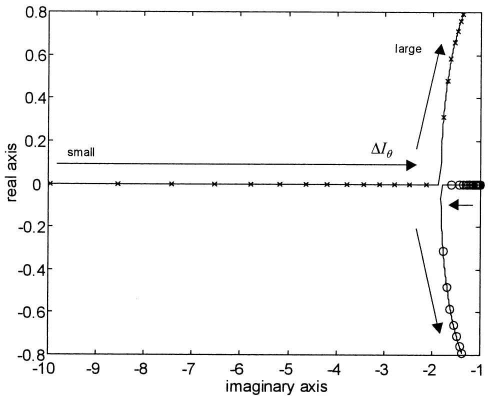

図 8　すべての ΔI_θ に対する外乱オブザーバの根軌跡
Fig. 8　Root locus of disturbance observer for all ΔI_θ.

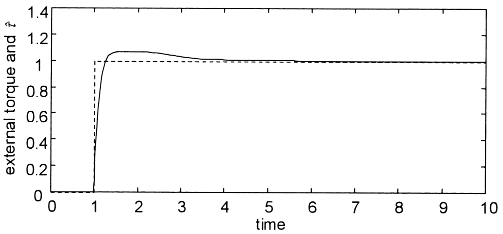

図 9 ステップ外乱に対する外乱オブザーバの出力
Fig. 9 Response of disturbance observer to step disturbance.

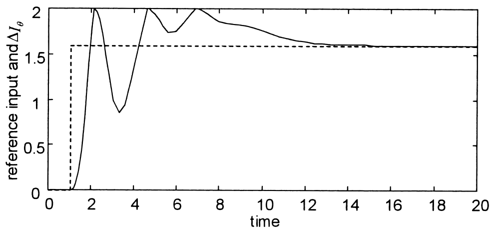

図 10 サーボ制御時の可変慣性モーメントのステップ入力に対する応答
Fig. 10 Response of servo controlled variable moment of inertia to step input.

$$\dot{\mathbf{z}} = \frac{1}{x_3+2}\begin{bmatrix} -23.664 & x_3+2 \\ -20 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{z} + \frac{1}{x_3+2} \times \begin{bmatrix} -23.664 & (559.9849-23.664x_4)-20(x_3+2) \\ -20 & 473.28-20x_4 \end{bmatrix} \times \mathbf{x}_1 \quad (75)$$

$$\hat{\tau} = [1\ 0]\mathbf{z} - [0\ -23.664]\mathbf{x}_1 \quad (76)$$

が得られる．ステップ外乱に対する外乱オブザーバの出力を，**図 9** に示す．

次に，式 (64) に対して，$[x_3\ x_4]^T \to \mathbf{\Phi}$ とするためのサーボコントローラを設計する．追従速度の調整を可能にするため，α をパラメータとし，閉ループシステムの極が $s=-\alpha$ となるようなサーボコントローラの 1 つとして

$$\dot{\mathbf{x}}_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -20\alpha^3 & -15\alpha^2 & -6\alpha \end{bmatrix}\mathbf{x}_T + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}([1\ 0]\mathbf{\Phi} - x_3) \quad (77)$$

$$u_I = [\alpha^6\ 6\alpha^5\ 15\alpha^4\ 0]\mathbf{x}_T \quad (78)$$

を用いる．式 (64) はすでに積分器を 2 つ持つため，式 (77) および (78)，(64) による閉ループシステムは C^3 級の目標値に定常誤差なく追従する．$\alpha=2$ としたときの，閉ループシステムのステップ応答を**図 10** に示す．図 10 において，可変慣性モーメントが $\Delta I_\theta=2$ を境に反射しているように見えるのは，そこが ΔI_θ の最大値であり，$\Delta \dot{I}_\theta = 0$ となるためである．ΔI_θ の最小値である $\Delta I_\theta=-1$ でも同様の現象が起こる．

このサーボコントローラにより $[x_3\ x_4]^T \to \mathbf{\Phi}$ となり，定常状態で式 (69) が満たされる．したがってシステムは，サーボコントローラによる時間遅れと ΔI_θ に関する制限を無視すると，

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}(\tau - \hat{\tau}) \quad (79)$$

となる．さらに $\hat{\tau} \to \tau$ であるため，外乱無干渉化が達成される．また，式 (64) に関する閉ループシステム

$$\frac{15\alpha^4 s^2 + 6\alpha^5 s + \alpha^6}{s^6 + 6\alpha s^5 + 15\alpha^2 s^4 + 20\alpha^3 s^3 + 15\alpha^4 s^2 + 6\alpha^5 s + \alpha^6} \quad (80)$$

がローパスフィルタとして働き，制御スピルオーバを抑えていることが分かる．

外乱無干渉化条件 (71) と外乱オブザーバ (75)，(76)，サーボコントローラ (77)，(78) より，外乱無干渉化コントローラが構築できる．外乱無干渉化コントローラによる，定常外乱に対するシステムの応答を**図 11** に示す．図 7 と比較すると出力が半分から 2/3 に減少しており，外乱を抑制していることが分かる．ここで外乱無干渉化制御を適用したにもかかわらず出力に外乱による影響が現れているのは，文献 10) および 11) より，サーボ制御により外乱無干渉化条件 (69) を満足させようとしていること，および ΔI_θ に関する物理的な制約のためであると推測できる．

ΔI_θ に関する制約と外乱抑制効果の関係を調べるため，$0 \le \Delta I_\theta \le \Delta I_{\theta max}$ とし，サーボコントローラのパラメータ α および $\Delta I_{\theta max}$ に対応する，単位時間あたりのシステムが受ける外乱の制御前と制御後の比を調べると，$\Delta I_{\theta max}$ が増えるとシステムの受ける外乱が抑制されるという傾向があることが分かる（**図 12**）．この図において，$\alpha=2$ のとき，$\Delta I_{\theta max} > 20$ で $\Delta I_{\theta max}$ が増えているにもかかわらずシステムが受ける外乱が大きく増えているのは，式 (77) によるサーボシステムがオーバシュートを起こしているためで

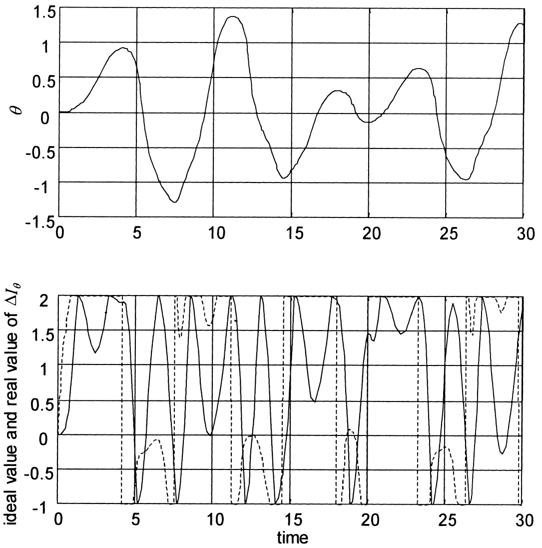

図 11　外乱無干渉化制御時の外乱に対するシステムの応答
Fig. 11　Response of noninteracting controlled system to disturbance.

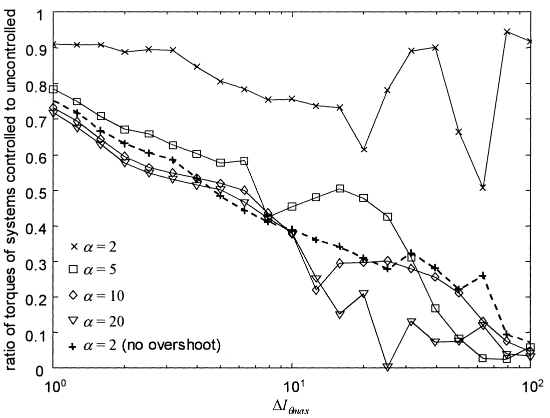

図 12　α および ΔI_θ の変動範囲と制御により抑制されるトルクの比率
Fig. 12　Ratio of torques inputting to systems with control to without control vs. α and range of ΔI_θ.

あると考えられる．実際，式 (77) の代わりにオーバシュートを起こさないコントローラを用いた場合には，$\Delta I_{\theta max}$ が増えるに従い外乱抑制効果が改善されることが示されている．このように，ΔI_θ の範囲が広いほどより理論的な結果に近づくことが分かる．

そこで，図 11 に示されている，図 1 のシステムに対する制御効果を改善するため，$\alpha = 10$ とし，付加質量および付加質量の変位をそれぞれ $m = 5$，$0 \leq \Delta l \leq 1$ としてみる．これは $I_{\theta 0} = 2.5$，$0 \leq \Delta I_\theta \leq 20$ に相当する．このときシステムの応答は**図 13** のようになり，外乱がより抑制されていることが確認できる．

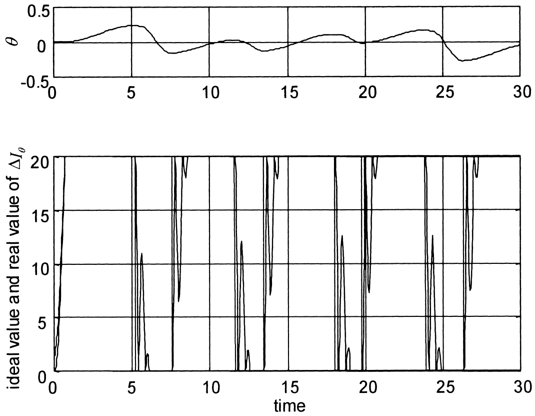

図 13　$\alpha = 10$，$0 \leq \Delta I_\theta \leq 20$ の場合の，外乱無干渉化制御時の外乱に対するシステムの応答
Fig. 13　Response of nointeracting conrolled system to disturbance for $\alpha = 10$, $0 \leq \Delta I_\theta \leq 20$.

これらシミュレーション結果は，理想的な外乱無干渉化という点から見れば必ずしも有意な結果であるといいきることはできない．その一方で，可変慣性の範囲を広げることにより外乱抑制効果が改善されるという結果が得られていることから，本手法を外乱抑制制御として用いることが可能であると考えられる．

以上の結果より，数値例の可変慣性システムに対して，本手法を用いることにより外乱無干渉化コントローラが導出できること，およびそれによる外乱抑制が可能であることが確認された．

5. おわりに

本論文では，可変慣性システムのクラスを定義し，このシステムに対して外乱無干渉化コントローラを導出した．

まず，2 自由度の慣性モーメントが可変である回転システムを調べ，その結果をもとに可変慣性システムを定義した．その可変慣性システムの特徴は，慣性項および粘性項に可変構造パラメータを持ち，それらが可解な微分方程式を構成しているということ，ならびに可変慣性に関する状態方程式が独立しているということである．次に，可変慣性システムと従来の可変構造システムとを比較しながら，既知外乱に対する無干渉化条件ならびに外乱オブザーバ，サーボコントローラを導くことにより，外乱無干渉化制御を実現した．また，外乱オブザーバ，サーボシステムが過渡状態にあるときや，システムの物理的制約により完全な外乱無干渉化は困難であること，およびサーボ制御による閉ループシステムがローパスフィルタとして働き，制御スピルオーバを抑えることができることも示された．

数値例では，2 章で用いた 2 自由度の回転システムに対して外乱無干渉化制御システムを設計し，その過程を詳細に示した．また，外乱オブザーバおよびサーボコントローラの時間応答を用いて，それぞれが外乱および指示信号に追従することを確認し，また，過渡応答について検討した．さらに，外乱無干渉化制御システムの定常外乱に対する時間応答を求め，外乱を完全に無干渉化することはできないが，外乱による影響を抑制することはできるという結果が得られた．

以上の結果により，可変慣性システムの外乱無干渉化コントローラが導出可能であること，およびそれによる外乱抑制制御が可能であることが確認された．

参 考 文 献

1) Furuya, H., Takahashi, T. and Ohmachi, T.: Concept of Adaptive Gyroscopic Damper and Vibration Suppression of Flexible Structures, *8th Int. Conf. Adaptive Structures and Technologies*, Technomic, pp.247–254 (1997).
2) Furuya, H. and Kobori, A.: Suppression of Multiple Modes Vibration of Flexible Structures with Adaptive Gyroscopic Damper System, *10th Int. Conf. Adaptive Structures and Technologies*, Technomic, pp.127–134 (1999).
3) Mohler, R.R.: *Applications to Bilinear Control*, Prentice Hall (1991).
4) 三平満司，久保田健太：非線形 H_∞ 制御の多自由度構造物の振動制御への応用可能性，第 23 回制御理論シンポジウム，pp.301–306 (1994).
5) 野波健蔵，田 宏奇：スライディングモード制御，コロナ社 (1994).
6) Nagashio, T. and Kida, T.: Attitude Control of Spacecraft with Mobile Antenna by a Gain-Scheduled H_∞ Controller, *Trans. JSASS*, Vol.43, No.139, pp.16–22 (2000).
7) Modi, V.J., Karray, F. and Mah, H.: A Composite Control Scheme for Joint Tracking and Active Vibration Suppression of Mobile Flexible Manipulator Systems, *Acta Astronautica*, Vol.36, No.5, pp.261–270 (1995).
8) Karry, F., Grewal, A., Glaum, M. and Modi, V.: Stiffing Control of a Class of Nonlinear Affine Systems, *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, Vol.33, No.2, pp.473–484 (1997).
9) Isidori, A.: *Nonlinear Control Systems*, Springer Verlag (1995).
10) 小澤 悟，古谷 寛：双線形状態方程式に対する外乱無干渉化制御，第 15 回宇宙構造・材料シンポジウム，pp.64–67 (1999).
11) Ozawa, S. and Furuya, H.: Design and Control for Noninteracting Smart Systems with Stability, *10th Int. Conf. Adaptive Structures and Technologies*, Technomic, pp.331–338 (1999).
12) Petersen, I.R.: A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Linear Systems, *Systems & Control Letters*, Vol.8, pp.351–357 (1987).

(平成 12 年 8 月 18 日受付)
(平成 12 年 10 月 10 日再受付)
(平成 12 年 11 月 4 日採録)

小澤 悟

昭和 49 年生．平成 10 年東海大学大学院工学研究科電子工学専攻修了．現在，東京工業大学大学院博士後期課程在学中．

古谷 寛

昭和 32 年生．昭和 55 年東京大学工学部航空工学科卒業．昭和 57 年同大学院工学系研究科航空学専門課程修士課程修了．昭和 61 年同大学院工学系研究科航空学専門課程博士課程修了．工学博士．名古屋大学工学部助手，講師を経て，現在，東京工業大学大学院総合理工学研究科助教授．専門は，複合領域最適化，宇宙構造物工学，宇宙システム工学，形態学，構造動力学．現在，構造・制御・流体の複合領域最適化，知的適応構造システムの制御，インフレータブル展開宇宙構造物の構造解析，マグネシウム合金の構造物への応用，等の研究に従事．日本航空宇宙学会，米国航空宇宙学会（AIAA），日本機械学会，日本応用数理学会，日本計算工学会，日本金属学会，超並列計算研究会，高次元学会各会員．