

日本国債入札におけるウインブルドン化の可能性

宮 崎 浩 一†

密度依存型ジャンプマルコフプロセスを、国債入札における今後の落札シェアを予測するために用いた事例報告である。国債入札参加者を大きく、日系証券会社、外資系証券会社、その他金融会社の3つに分けた場合、外資系証券会社の落札シェアが日系証券会社の落札シェアを総合的に上回る（ウインブルドン現象と呼ぶ）の確率がおよそどの程度であるかを数理モデルに基づいて分析することを目的とする。分析方法は、まず、3社間のシェア競争のモデル化を確率的でない場合に考察し、次に、確率的な場合に拡張する。最終的には、将来の落札シェアの確率分布を求めて、ウインブルドン化の可能性を探る。今後3年間におけるウインブルドン化の可能性は、限定的であるという結果が得られた。

The Probability of the Wimbledon Phenomenon Occurring in the Japanese Government Bond Auction

KOICHI MIYAZAKI†

This article provides an example how the density dependent jump Markov process is applied to the analysis of the probability of the Wimbledon phenomenon, which the foreign dealers' share exceeds that of domestic dealers in the Japanese Government bond auction. The analysis involves three steps. First, a set of linear differential equations is constructed to model share competition among the three groups in the deterministic case. Second, the deterministic model is transformed to the stochastic one. The last step derives the probability of the Wimbledon phenomenon occurring from the future share distribution. The model indicates that the probability of the Wimbledon phenomenon within three years is quite limited

1. はじめに

国債発行が年間100兆円に迫る状況のなかで、財務省は、国債市場状況の把握のため、市場参加者と適宜懇談会を開く方針を打ち出した。数多くある金融会社の中から懇談会メンバとして12社が選ばれ、2001年4月現在この懇談会メンバは、表1に示すように、日系証券会社が6社、外資系証券会社が3社、日興ソロモンズミスパニーのような日系と外資系の合併の証券会社が1社、日系銀行（以下に述べる分類では、その他金融会社に分類される）が2社となっている。財務省によると、懇談会メンバは、国債入札において落札額が上位に位置する金融会社を選択しているとのことである。懇談会メンバであるという事実は、発行・流通両市場で取引を行う金融機関にとって一種のステータスであり、取引上のメリットも享受できる。

国債入札において、90年代を通して日系証券会社のプレゼンスが低下するなか、外資系証券会社の活躍

が目覚ましいが、今後、外資系証券会社の落札シェアが日系証券会社の落札シェアを総合的に上回る（これをウインブルドン現象と呼ぶことにする）ようになる可能性はおよそどの程度であろうか？ 国債懇談会メンバを、日系証券会社、外資系証券会社、その他金融会社（以下、記法の簡略化のため、これら3つに分類したものを3社と呼ぶ）に分類したときに、外資系証券会社のメンバ数が過半数となる可能性がどの程度あるかを、過去の国債入札におけるシェアの推移から考察することを目的とする。

本論文の構成は、以下のとおり。次章では、日本国債入札におけるウインブルドン化の可能性を探るためのモデルを提案する。3章では、モデルのパラメータ推定法を示す。4章では、実証分析結果を報告し、5章では、まとめと結語を与える。

2. ウインブルドン化計量モデル

主な国債の種類は、現在、5年債、10年債、20年債、30年債等である。ウインブルドン化計量モデルは、(1) 各年限の国債に関する落札シェアのモデル化と、(2) 各年限の今後の国債落札シェアを加重平均し

† 電気通信大学

The University of Electro-Communications, Department of Systems Engineering

表 1 国債入札懇談会メンバ

Table 1 Members of the Japanese government bond market meeting.

株式会社 三和銀行
株式会社 富士銀行
ゴールドマン・サックス証券会社
三和証券株式会社
新光証券株式会社
大和証券エスエムビーシー株式会社
ドイツ証券会社
東京三菱証券株式会社
日興ソロモン・スミス・バーニー証券会社
野村証券株式会社
みずほ証券株式会社
モルガン・スタンレー・ディーン・ウィッター証券会社

た総合的な落札シェアに基づく懇談会メンバの決定に関するモデル化、からなる。(1)においては、まず、確率的な要素を考慮しない微分方程式によるモデル化を考える。次に、密度依存型ジャンプマルコフプロセスへ変換することによって確率的な挙動も表現可能なモデルへと拡張する。

2.1 国債落札シェアモデル(確率的でない場合)

1992年以降の日本国債入札では、(1)日系証券会社と外資系証券会社がシェアを取りあう、(2)銀行や生命保険会社等のその他金融会社は、入札における価格変動リスクの回避や入札に関する情報不足等の理由から、国債入札への参加を差し控えるようになり入札における落札シェアを日系証券会社または外資系証券会社に渡す、という構図になっている。このような状況をふまえて、ここでは、確率的でない場合に関して国債落札シェアモデルを Lanchester モデルに依拠して考える。Lanchester モデルは、競争的な 2 社間のマーケットシェア M の推移を $\dot{M} = \beta_1 A_1 (1 - M) - \beta_2 A_2 M$ のような線形微分方程式によってモデル化するものである。これは、自社および他社の営業宣伝努力がそれぞれ $\beta_1 A_1$, $\beta_2 A_2$ であるときに、自社シェア M の増減が、他社のシェア $1 - M$ を自社の営業宣伝努力 $\beta_1 A_1$ 分だけ奪い、同様に自社のシェア M を他社の営業宣伝努力 $\beta_2 A_2$ 分だけ奪われる、ことから生じるとする 2 社間シェア取り競争を表現するマーケティングの基本モデルである。シェア取り競争を表現するモデルとしては、Matsuyama⁷⁾のように、シェアに関する非線形項を微分方程式に組み込んでモデルを精緻化する研究もみられる。国債入札におけるシェアは、各入札時点の流通市場における需給等の要因のため、各回の入札においては、確率的でないモデルが予想する潜在的な実力である落札額から実力以上または以下に必然的にずれる。よって、ここでは、確率的でないモデルの

枠組みでの精緻化よりは、次節で述べる確率的な場合への拡張を容易に行えるように、シェア取り競争の基本モデルである Lanchester モデルで $A_1 = A_2 = 1$ としたものをベースにした。時刻 t 時点での国債入札における 3 社の落札シェアを $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ で表すことにする。Lanchester モデルでは、2 社間の競争であったため自社および他社の営業宣伝努力として 2 つのパラメータ β_1, β_2 でよかったが、本モデルでは、これに対応するパラメータとして a, b, c, d, e, f の 6 つが必要になる。(1), (2) に基づけば、日系証券会社のシェアの変動 $\frac{d}{dt}X(t)$ は、 t 時点における自らのシェア $X(t)$ が外資系証券会社によって営業宣伝努力 a 分だけ奪われる部分、外資系証券会社のシェア $Y(t)$ を自社の営業宣伝努力 b 分だけ奪う部分、その他金融会社のシェア $Z(t)$ を自社の営業宣伝努力 e 分だけ奪う部分を合計することによって表される。外資系証券会社のシェアの変動 $\frac{d}{dt}Y(t)$ に関してもまったく同様である。その他金融会社のシェアの変動 $\frac{d}{dt}Z(t)$ は、(2) で述べたように、日系証券会社と外資系証券会社に奪われるだけであるから、 t 時点における自らのシェアが $(e + f)$ 分だけ失われるようにモデル化される。よって、確率的でない場合の国債落札シェアモデルは、次の線形連立微分方程式で表される。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}X(t) &= -aX(t) + bY(t) + eZ(t), \\ \frac{d}{dt}Y(t) &= cX(t) - dY(t) + fZ(t), \\ \frac{d}{dt}Z(t) &= -(e + f)Z(t).\end{aligned}\quad (1)$$

ここで、 a, b, c, d, e, f は正の定数である。以下、記法を簡便にするため、

$$P = \begin{pmatrix} -a & b & e \\ c & -d & f \\ 0 & 0 & -(e + f) \end{pmatrix}$$

とおくことにする。

国債落札シェアモデル (1) の解は、行列 P の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ とすると、

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = (P_1 e^{\lambda_1 t} + P_2 e^{\lambda_2 t} + P_3 e^{\lambda_3 t}) \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

ここで,

$$\begin{aligned} P_1 &= (P - \lambda_2 I)(P - \lambda_3 I)/(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3), \\ P_2 &= (P - \lambda_1 I)(P - \lambda_3 I)/(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3), \\ P_3 &= (P - \lambda_1 I)(P - \lambda_2 I)/(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2), \\ \exp(Pt) &= P_1 e^{\lambda_1 t} + P_2 e^{\lambda_2 t} + P_3 e^{\lambda_3 t}. \end{aligned}$$

である(詳しくは, 笠原⁹⁾を参照).

2.2 国債落札シェアモデル(確率的な場合)

前節で述べたように, 国債落札シェアをモデル化するためには確率的な表現が必要になる.

今, $X_n(t)$, $Y_n(t)$, $Z_n(t)$ をそれぞれ, 3社の時刻 t での国債入札における実際の落札額とする. ここで, サフィックスの n は, 時刻 t の国債入札における国債発行総額を表す. これらを次の3次元ベクトル $A_n(t)$ を用い, まとめて表す.

$$A_n(t) = \left\{ \begin{pmatrix} X_n(t) \\ Y_n(t) \\ Z_n(t) \end{pmatrix}; t \geq 0 \right\}.$$

3社の時刻 t の国債入札における落札額は, $A_n(t)$ を用いて3次元空間内の点として表現される. 時間の経過にともなう $A_n(t)$ の x 軸方向, y 軸方向, z 軸方向の変動が, それぞれ3社の落札額の推移を意味する. 時刻 t の入札の次に入札行われる時刻を $t+h$ とする(10年国債入札は1カ月ごとに行われ, この場合 h は1カ月となるが, 将来の数年間といった時間に対しては微小であると見なしている).

時刻 t 時点における国債落札額 $A_n(t)$ が分かっている場合に, 時刻 $t+h$ 時点の国債落札額 $A_n(t+h)$ を確定的に与えるモデルが2.1節で与えた連立線形微分方程式であった. 落札シェアを用いて表現された式(1)は, 落札額 $A_n(t)$ を用いて記述すると式(3)となる.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A_n(t+h) - A_n(t)}{h} = P A_n(t). \quad (3)$$

国債落札額 $A_n(t)$ を確率的でないものから確率的なものに拡張するのであるが, その際に平均値では, 確率的でない場合と同じになるような拡張が望ましい. このように拡張しておけば, 3社の時刻 $t+h$ 時点での

落札額 $A_n(t+h)$ は, 式(3)の解に $t+h$ を代入した確定値を平均に持つ何らかの分布としてモデル化される. 確率的なモデルに拡張するために, 落札額 $A_n(t)$ から落札額 $A_n(t+h)$ への推移を密度依存型ジャンプマルコフプロセスで表す. ここで, 密度依存型とは, ジャンプ率が一定ではなく何らかの状態に依存することを意味し, マルコフ性は, ジャンプ率が時刻 t における情報にのみ依存し, それ以前の情報には価値がない性質である. モデル化においては落札額のジャンプ率を, $q_{k,k+l}^{(n)} = n\beta_l(n^{-1}u)$, $k, l \in R^3$ とする. これは, 時刻 t 時点での落札シェア $n^{-1}u$ に依存して l 方向の関数 $\beta_l(\cdot)$ の値が決まり, これに時刻 $t+h$ 時点での入札総額を掛けたものである. このジャンプ率を適切に与えることにより, 平均値ベースでは, 確率的でない場合と同じになるようにモデル化すればよい. 厳密に落札額 $A_n(t)$ から落札額 $A_n(t+h)$ への推移を密度依存型ジャンプマルコフプロセスで表現してよいかどうかを厳密に議論することは困難であるが, これは, 2.1節で述べた確率的でない場合におけるシェア取り競争を表現する基本モデルの確率的な場合への自然な拡張になっている.

このような微分方程式の確率過程への変換に関しては, 確率エピソードモデルの分野で古くから行われており, 主な研究として Bailey²⁾, Kurtz^{5),6)}, Gutierrez ら⁴⁾等があげられ, 最近では, このような微分方程式の拡散近似手法は, Andersson ら¹⁾に紹介されている.

ここで, 具体的に落札額のジャンプ率, $q_{k,k+l}^{(n)} = n\beta_l(n^{-1}u)$, $k, l \in R^3$ を落札額の平均が式(3)の解となるように定める. ジャンプによる落札額の変化幅 l として $\theta = (1, 0, 0)$, $\phi = (0, 1, 0)$, $\psi = (0, 0, 1)$ にとり, ジャンプ率を次のようにとればよいことが分かる.

$$\begin{aligned} q_{k,k+\theta} &= bk_2 + ek_3 \text{ 日系証券の落札額の増加,} \\ q_{k,k-\theta} &= ak_1 \text{ 日系証券の落札額の減少,} \\ q_{k,k+\phi} &= ck_1 + fk_3 \text{ 外資系証券の落札額の増加,} \\ q_{k,k-\phi} &= dk_2 \text{ 外資系証券の落札額の減少,} \\ q_{k,k+\psi} &= 0 \text{ その他金融機関の落札額の増加,} \\ q_{k,k-\psi} &= (e+f)k_3 \text{ その他金融機関の落札額の減少.} \end{aligned}$$

ここで定めたジャンプ率に推移時間 h を乗じて得られる推移確率を用いることによって, 落札額 $A_n(t)$ から落札額 $A_n(t+h)$ への推移確率が, 次のように与えられる.

$$\begin{aligned}
 & Prob(A_n(t+h) = u+l | A_n(t) = u) \\
 & = hn\beta_l(n^{-1}u) + o(h), \\
 & Prob(A_n(t+h) = u | A_n(t) = u) \\
 & = 1 - hn \sum_l \beta_l(n^{-1}u) + o(h).
 \end{aligned}$$

この確率過程は、推移可能な各 l に対して定義される独立な標準ポアソン過程 $B_l = \{B_l(t); t \geq 0\}$ を用いて

$$\begin{aligned}
 (A_n(t)) &= (A_n(0)) \\
 &+ \sum_l l B_l \left(n \int_0^t \beta_l(n^{-1}(A_n(s))) ds \right) \quad (4)
 \end{aligned}$$

と表現される。式 (4) における右辺第 2 項は、落札額の確率的な変動の経路を表現しているが、これを確定的な変動部分とその回りに分布する確率的な変動部分に分解する。また、式 (4) の両辺を n で除して落札シェアを表現する。

$$\bar{A}_n = \begin{pmatrix} \bar{X}_n \\ \bar{Y}_n \\ \bar{Z}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{X_n}{n} \\ \frac{Y_n}{n} \\ \frac{Z_n}{n} \end{pmatrix},$$

を落札シェアベクトル、 $\hat{B}_l = B_l(t) - t$ を中心ポアソンプロセス、ドリフト関数を $F(x) = \sum_l l \beta_l, x \in R^3$ で定義すると、落札額を記述する式 (4) は、シェアを記述する次式に変換できる。

$$\begin{aligned}
 (\bar{A}_n(t)) &= (\bar{A}_n(0)) \\
 &+ n^{-1} \sum_l l \cdot \hat{B}_l \left(n \int_0^t \beta_l(\bar{A}_n(s)) ds \right) \quad (5) \\
 &+ \int_0^t F(\bar{A}_n(s)) ds.
 \end{aligned}$$

ここで、右辺第 3 項が確定的な変動部分であり、第 2 項がその回りに分布する確率的な変動部分である。

以下に述べる主張は本質的に、Andersson ら¹⁾に基づく。国債落札シェアモデルに適用する際には、主張の成立条件をチェックする必要があるが、ここでは煩雑さを避けるために省略し、主に主張の意味を述べる。

主張 1

$(x(t), y(t), z(t))^T$ を線形連立微分方程式 (1) の解 (2) であるとする、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \leq t} \left| \begin{pmatrix} \bar{X}_n(s), \bar{Y}_n(s), \bar{Z}_n(s) \end{pmatrix}^T - (x(s), y(s), z(s))^T \right| = 0$$

がほとんどいたるところで成り立ち、 n が十分大きいならば、密度依存型ジャンプマルコフプロセスとして導かれる確率的な落札シェア (5) は、確定的な落札シェア (2) に原理的に近づく。次に、 $(\bar{X}_n(t), \bar{Y}_n(t), \bar{Z}_n(t))^T$ と $(x(t), y(t), z(t))^T$ との乖

離がどのように変動するかを考える。Andersson ら¹⁾によれば、

$$\begin{aligned}
 W_l^{(n)}(t) &= \sqrt{n} (n^{-1} B_l(nt) - t) \\
 &= n^{-\frac{1}{2}} \hat{B}_l(nt)
 \end{aligned}$$

と定義したときに $W_l^{(n)}$ が標準ブラウン運動 W_l に収束する事実を用いて、 $(\bar{X}_n(t), \bar{Y}_n(t), \bar{Z}_n(t))^T$ と $(x(t), y(t), z(t))^T$ との乖離を $\sqrt{n}$ 倍した式 (6) で表されるベクトルプロセス V_n が、式 (7) で定義される $V(t)$ に収束する。

$$\begin{aligned}
 V_n(t) &= \sqrt{n} \begin{pmatrix} \bar{X}_n(t) - x(t) \\ \bar{Y}_n(t) - y(t) \\ \bar{Z}_n(t) - z(t) \end{pmatrix} \\
 &= v_n(0) \\
 &+ \sum_l l W_l^{(n)} \left(\int_0^t \beta_l \begin{pmatrix} \bar{X}_n(s) \\ \bar{Y}_n(s) \\ \bar{Z}_n(s) \end{pmatrix} ds \right) \\
 &+ \int_0^t \sqrt{n} \left(F \begin{pmatrix} \bar{X}_n(s) \\ \bar{Y}_n(s) \\ \bar{Z}_n(s) \end{pmatrix} - F \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} \right) ds.
 \end{aligned} \quad (6)$$

式 (6) において、

$$\begin{aligned}
 v_n(0) &= \sqrt{n} \begin{pmatrix} \bar{X}_n(0) - x(0) \\ \bar{Y}_n(0) - y(0) \\ \bar{Z}_n(0) - z(0) \end{pmatrix}. \\
 V(t) &= v_0 + \sum_l^{l W_l} \left(\int_0^t B_l(u(s)) ds \right) \\
 &+ \int_0^t \partial F(u(s)) V(s) ds. \quad (7)
 \end{aligned}$$

この事実を用いたうえで確率微分方程式を解くことにより、次の主張が得られる。

主張 2

線形連立微分方程式 (1) の解 (2) と密度依存型ジャンプマルコフプロセスとして導かれる確率的な落札シェア (5) との乖離を表現する $V_n(t)$ は、次の式 (8) $V(t)$ に収束し、 $V(t)$ の確率微分方程式表示は式 (9) となる。さらに式 (9) の解は、式 (10) で与えられる。

$$V(t) = \begin{pmatrix} V^{(1)}(t) \\ V^{(2)}(t) \\ V^{(3)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0^{(1)} \\ v_0^{(2)} \\ v_0^{(3)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_{(1,0,0)}(T_+^1(t)) - W_{(-1,0,0)}(T_-^1(t)) \\ W_{(0,1,0)}(T_+^2(t)) - W_{(0,-1,0)}(T_-^2(t)) \\ W_{(0,0,1)}(T_+^3(t)) - W_{(0,0,-1)}(T_-^3(t)) \end{pmatrix} + \int_0^t PV(s)ds. \quad (8)$$

ここで,

$$\begin{aligned} T_+^1(t) &= \int_0^t by(s) + ez(s) ds, \\ T_-^1(t) &= \int_0^t ax(s) ds, \\ T_+^2(t) &= \int_0^t cx(s) + fz(s) ds, \\ T_-^2(t) &= \int_0^t dy(s) ds, \\ T_+^3(t) &= \int_0^t 0 ds, \\ T_-^3(t) &= \int_0^t (e+f)z(s) ds. \end{aligned}$$

式 (8) の確率微分方程式表示は,

$$dV(t) = PV(t)dt + MdW(t). \quad (9)$$

確率微分方程式 (9) の解は,

$$V(t) = \exp(tP)v(0) + \int_0^t \exp\{(t-s)P\}MdW(s). \quad (10)$$

で与えられる. ここで, $\exp(Pt)$ は, 式 (2) で与えたものに等しく,

$$v(0) = \begin{pmatrix} v_0^{(1)} \\ v_0^{(2)} \\ v_0^{(3)} \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{pmatrix},$$

$$m_{11} = \sqrt{by(s) + ez(s) + ax(s)},$$

$$m_{22} = \sqrt{cx(s) + fz(s) + dy(s)},$$

$$m_{33} = \sqrt{(e+f)z(s)},$$

である.

式 (9) は, Ornstein-Uhlenbeck 確率過程 (OU プロセス) といわれているものであり, 線形連立微分方程式 (1) の解 (2) と密度依存型ジャンプマルコフプロセスとして導かれる確率的な落札シェア (5) との乖離の変動は, 0 (平均) に回帰するような平均回帰過程である. ここでの 0 は乖離がないことであるから, 将来の時点における確定的な落札シェアを表すものであ

り, この表現により, 密度依存型ジャンプマルコフプロセスとして導かれる確率的な落札シェア (5) が各時点において線形連立微分方程式 (1) の解 (2) の周りでの確率的な変動を表現していることが分かる. このような乖離プロセス (10) は, 次の主張で示されるような平均と分散を持つ正規分布に従う.

主張 3

$\{V(t), t \geq 0\}$ の各成分 $\{V^{(i)}(t), t \geq 0\}$ は, 3×3 行列 $\exp(Pt)$ の成分を $(a_{ij}(t))$ とおくと, 次の正規分布に従う.

平均:

$$Avg(V^{(i)}(t)) = a_{i1}(t)v_0^{(1)} + a_{i2}(t)v_0^{(2)} + a_{i3}(t)v_0^{(3)}.$$

分散:

$$\begin{aligned} Var(V^{(i)}(t)) &= \int_0^t a_{i1}(t-s)^2 by(s) + ez(s) \\ &\quad + ax(s) + a_{i2}(t-s)^2 cx(s) + fz(s) \\ &\quad + dy(s) + a_{i3}(t-s)^2 (e+f)z(s) ds. \end{aligned}$$

密度依存型ジャンプマルコフプロセスとして導かれる確率的な落札シェア (5) の初期値が線形連立微分方程式 (1) の解 (2) に一致している場合には, 平均はつねに 0 となる.

2.3 懇談会メンバ決定に関する確率モデル

これまでの分析では, 各年限に関する国債落札シェアの推移をモデル化したが, 最終的な懇談会メンバを決定するには, 5 年債, 10 年債, 20 年債, 30 年債といった主な年限に関するシェアを総合的に判断する必要がある. ここで, 5 年債, 30 年債に関しては過去のデータが乏しいため, 前者に関してはその性質に近い非上場 4 年債と非上場 6 年債のシェアを 50% ずつ合わせたもので代用し, 後者に関しては, 20 年債のシェアで代用した.

そこで 3 社に関する時刻 t^* の入札における, 5 年債 ($i = 1$), 10 年債 ($i = 2$), 20 年債+30 年債 ($i = 3$) の入札シェアをそれぞれ確率変数 $\tilde{X}_i(t^*)$, $\tilde{Y}_i(t^*)$, $\tilde{Z}_i(t^*)$ で表すことにすると (ここで, i は 1 ~ 3 をとる), これらの分布は, 主張 3 における平均と分散を用いると次のような正規分布に従う.

日証証券会社の t^* 時点における i 年債のシェア分布

$$N\left(x_i(t^*) + Avg(V_i^{(1)}(t^*)), Var(V_i^{(1)}(t^*))\right).$$

外資系証券会社の t^* 時点における i 年債のシェア分布

$$N\left(y_i(t^*) + Avg(V_i^{(2)}(t^*)), Var(V_i^{(2)}(t^*))\right).$$

その他金融会社の t^* 時点における i 年債のシェア

分布

$$N\left(z_i(t^*) + \text{Avg}\left(V_i^{(3)}(t^*)\right), \text{Var}\left(V_i^{(3)}(t^*)\right)\right).$$

i 年限の国債発行額の国債発行額全体に占める割合を、 W_i とし、 $V_i^{(1)}$ と $V_i^{(2)}$ との共分散を $\text{Cov}\left(V_i^{(1)}, V_i^{(2)}\right)$ 等で表現することになると、日系証券会社、外資系証券会社、その他金融会社に関する時刻 t^* の入札におけるトータルシェアを表す確率変数 $(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z})$ とその分布は、正規分布の和が正規分布に従うことから、以下のように表現できる。

トータルシェアを表す確率変数

$$(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}) = \left(\sum_{i=1}^3 w_i \tilde{X}_i, \sum_{i=1}^3 w_i \tilde{Y}_i, \sum_{i=1}^3 w_i \tilde{Z}_i \right).$$

トータルシェアを表す確率変数の従う分布は、次の平均、分散・共分散を持つ正規分布に従う。

平均：

$$\left(\sum_{i=1}^3 w_i \left(x_i(t^*) + \text{Avg}\left(V_i^{(1)}(t^*)\right) \right), \sum_{i=1}^3 w_i \left(y_i(t^*) + \text{Avg}\left(V_i^{(2)}(t^*)\right) \right), \sum_{i=1}^3 w_i \left(z_i(t^*) + \text{Avg}\left(V_i^{(3)}(t^*)\right) \right) \right).$$

分散・共分散：

$$\text{COV} = (\text{Cov}_{jk}).$$

ただし、

$$\text{Cov}_{jk} = \sum_{i=1}^3 w_i \text{Cov}\left(V_i^{(j)}, V_i^{(k)}\right), \\ j, k = 1, 2, 3.$$

国債入札におけるウインブルドン現象の確率は、外資系証券会社の懇談会メンバー数が日系証券会社の懇談会メンバー数を上回る確率であるから、 $\text{Prob}(\tilde{X} - \tilde{Y} < 0)$ を求めればよく、上記の正規分布が既知となれば、この確率を求めるのは容易である。

3. モデルのパラメータ推定法

微分方程式によって表現されるモデルのパラメータ推定は、通常、Matsuyama⁷⁾にあるように微分方程式の解曲線をデータに最小二乗法でフィットさせる手法がとられる。ここでは、モデルの確率的挙動も考慮したパラメータ推定が重要になるため、1次のモーメントだけでなく、2次のモーメントもフィットさせるようなモデルのパラメータ推定法が必要となる。そこで、確率微分方程式をパラメータ推定の対象モデルとしてとりあげ、Chan ら³⁾、Miyazaki ら⁸⁾で用いられてい

るような金利プロセスモデルのパラメータ推定を行う際に広く利用されるモーメント法を適用する。

式 (9) の離散化

$$\begin{aligned} V^{(1)}(t) &= \sqrt{n}(\bar{X}_n(t) - x(t)), \\ V^{(2)}(t) &= \sqrt{n}(\bar{Y}_n(t) - y(t)), \\ V^{(3)}(t) &= \sqrt{n}(\bar{Z}_n(t) - z(t)), \\ V^{(1)}(t+1) - V^{(1)}(t) &= -aV^{(1)}(t) + bV^{(2)}(t) + eV^{(3)}(t) + \varepsilon_{t+1}^{(1)}, \\ V^{(2)}(t+1) - V^{(2)}(t) &= cV^{(1)}(t) - dV^{(2)}(t) + fV^{(3)}(t) + \varepsilon_{t+1}^{(2)}, \\ V^{(3)}(t+1) - V^{(3)}(t) &= -(e+f)V^{(3)}(t) + \varepsilon_{t+1}^{(3)}. \end{aligned}$$

これらの3式は、線形連立微分方程式 (1) の解 (2) と密度依存型ジャンプマルコフプロセスとして導かれる確率的な落札シェア (5) との乖離の変動を表す確率微分方程式 (9) 式を一次の項まで離散化したものであるから、誤差項 $\varepsilon_{t+1}^{(i)}$ のサンプル平均が0であり、サンプル分散が式 (9) の拡散項に一致することが望ましいため、次ように推定方程式が与えられる。

$$E\left[\varepsilon_{t+1}^{(1)}\right] = 0, E\left[\varepsilon_{t+1}^{(2)}\right] = 0, E\left[\varepsilon_{t+1}^{(3)}\right] = 0,$$

$$E\left[\varepsilon_{t+1}^{(1)2}\right] = by(t) + ez(t) + ax(t),$$

$$E\left[\varepsilon_{t+1}^{(2)2}\right] = cx(t) + fz(t) + dy(t),$$

$$E\left[\varepsilon_{t+1}^{(3)2}\right] = (e+f)z(t).$$

ここで、 t は、各回の国債入札時点を表す。モデルのパラメータが6個であり、推定方程式が6本あるからパラメータ推定は可能である。

4. 実証分析

4.1 データ

日本国債入札における3社のシェアに関するデータは、非上場4年債：1993年11月10日～、非上場6年債：1994年2月15日～、10年債：1992年1月9日～、20年債：1992年7月2日～、2001年5月末までに行われた国債入札における個社別の落札額のデータから構成した。また、実証分析においては、各回の各種国債入札は億円単位で行われるが、各回の国債発行額、5,000億円～15,000億円程度であることから、 n が十分に大きいと見なせるものとした。

パラメータ推定値

上記データセットに基づく線形連立微分方程式のパラメータ推定値を表2に示した。表2によれば、次の2

表2 パラメータ値
Table 2 Parameter values.

パラメータ年	a	b	c	d	e	f
4 年	0.120	0.331	0.115	0.282	0.027	0.000
6 年	0.217	0.972	0.014	0.000	0.088	0.000
10 年	0.151	0.379	0.105	0.288	0.140	0.000
20 年	0.250	0.362	0.210	0.393	0.231	0.000

点が興味深い。(1) パラメータ f の値はいずれの年限でも 0 に近く、その他金融会社のシェアの減少分はほとんどが直接的には日系証券会社のシェアを増加させる方向に寄与することになる。(2) 非上場 6 年債を除いては、パラメータ a, c の値はそれぞれ、パラメータ b, d の値より小さい。これは、初期値を与える 1992 年近くでは、日系証券会社のシェアが外資系証券会社のシェアよりも圧倒的に大きかったため、モデルのパラメータにこのような大小関係があっても、シェアの微分値は、日系証券会社で減少傾向、外資系証券会社で増加傾向をもたらすことになる。

実際のシェアの推移と推定された解曲線

非上場 4 年債、非上場 6 年債、10 年債、20 年債に関して、実際のシェアの推移と線形連立微分方程式の解曲線とをそれぞれ、図 1, 2, 3, 4 に示した。非上場 4 年債、非上場 6 年債、10 年債に関しては、解曲線式 (2) から日系証券会社、その他金融会社のシェアが減少し、外資系証券会社のシェアが増加していることが見てとれる。20 年債に関してみると、連立微分方程式の解曲線は、その他金融会社のシェアに関しては明らかな低下傾向を示しているものの、日系証券会社と外資系証券会社のシェアに関してはおおむね横ばいを示唆している。これは、1990 年代の前半から外資系証券会社は、日本国債の入札において 20 年債に重点を置いていたため、その頃から他の年限の国債との比較において外資系証券会社の比較的シェアが高かったことが要因としてあげられる。解曲線から総合的に判断すると、国債入札におけるウインブルドン化の兆しは 1990 年前半から後半にかけてでてきたが、21 世紀に入ってからはその傾向がきわめて緩やかになっていると判断できる。

4.2 国債懇談会メンバー数の逆転可能性は？

線形連立微分方程式の解曲線からは、緩やかにウインブルドン化が進行しているのであるが、現在、日系証券会社 6.5 席、外資系証券会社 3.5 席(国債懇談会メンバーに日興ソロモンスミスパーニー証券が入っているため、日系証券会社と外資系証券会社にそれぞれ 0.5 席ずつ割り振った)となっている国債懇談会メンバー数

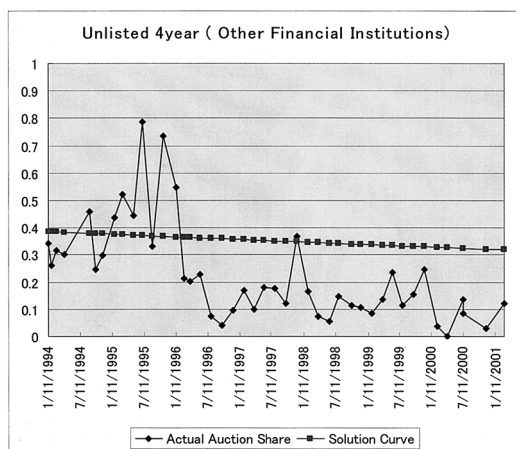
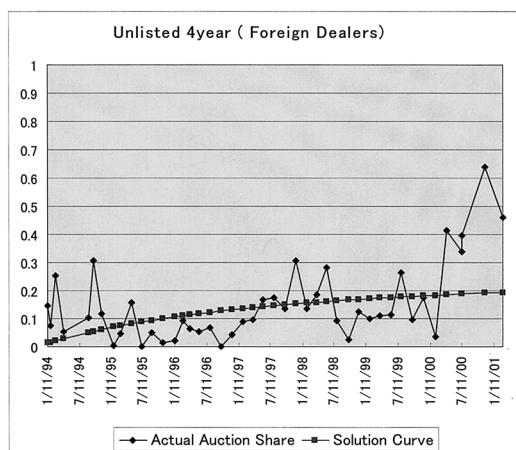
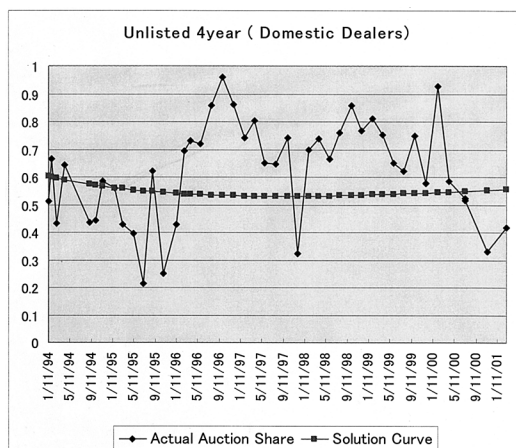


図1 非上場4年債入札；実際のシェアと推定シェア（微分方程式の解曲線）

Fig. 1 Unlisted 4 year bond auction; actual share and estimated share (solution curve of D.E).

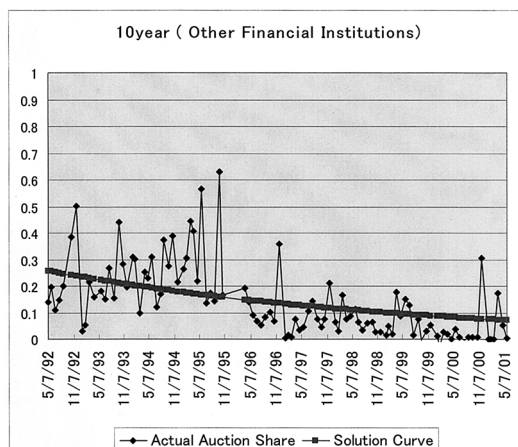
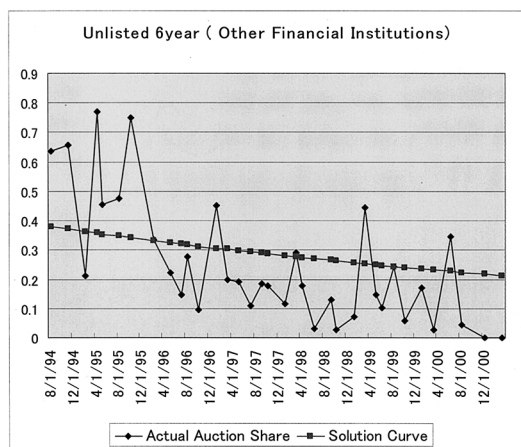
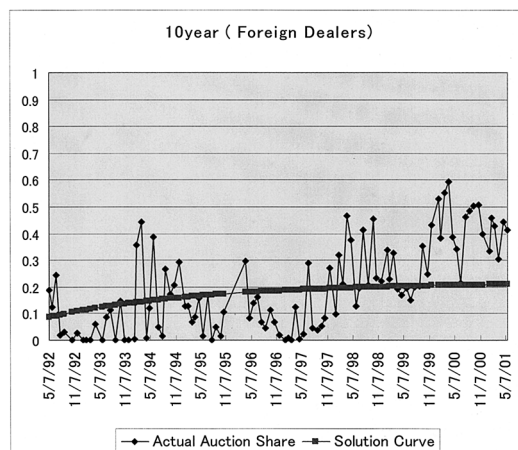
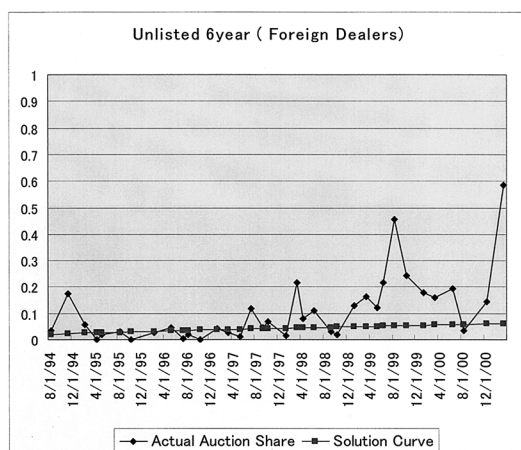
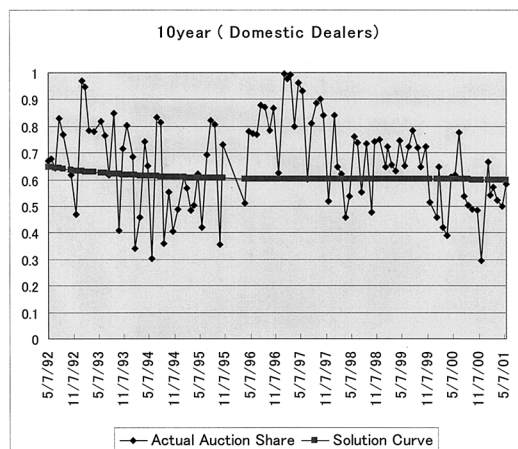
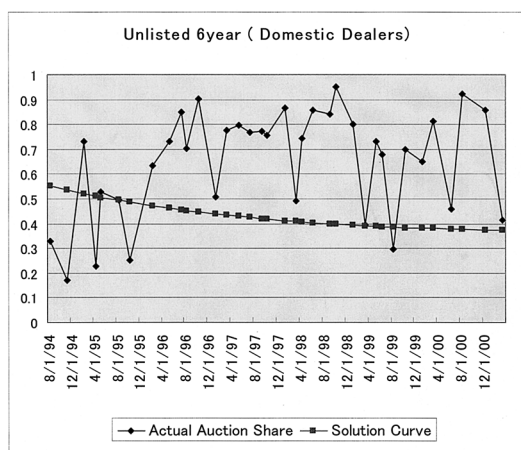


図2 非上場6年債入札; 実際のシェアと推定シェア(微分方程式の解曲線)

Fig.2 Unlisted 6 year bond auction; actual share and estimated share (solution curve of D.E).

図3 上場10年債入札; 実際のシェアと推定シェア(微分方程式の解曲線)

Fig.3 Listed 10 year bond auction; actual share and estimated share (solution curve of D.E).

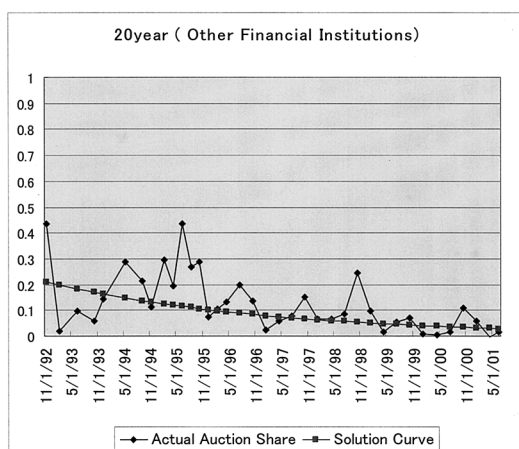
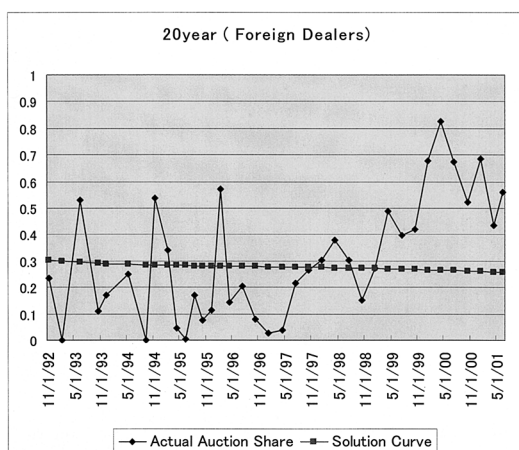
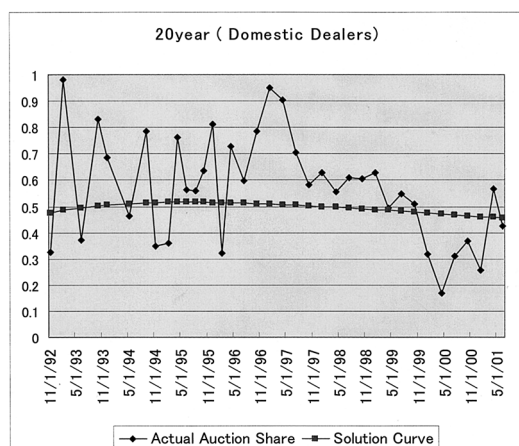


図4 上場20年債入札；実際のシェアと推定シェア（微分方程式の解曲線）

Fig.4 Listed 20 year bond auction; actual share and estimated share (solution curve of D.E).

表3 各年限の国債入札シェアの分布に関する平均と共分散の平方根

Table 3 Mean and variance-covariance of the government bond auction share.

4年	日系 Ave	外資 Ave	他 Ave	日系 S.D	外資 S.D	他 S.D	日外 Cov	日他 Cov	外他 Cov
02	0.57	0.21	0.31	0.26	0.15	0.06	0.16	0.02	0.01
03	0.59	0.21	0.30	0.28	0.15	0.07	0.17	0.02	0.01
04	0.60	0.22	0.29	0.30	0.16	0.07	0.19	0.02	0.01

5年	日系 Ave	外資 Ave	他 Ave	日系 S.D	外資 S.D	他 S.D	日外 Cov	日他 Cov	外他 Cov
02	0.47	0.14	0.25	0.17	0.08	0.05	0.07	0.01	0.00
03	0.48	0.15	0.22	0.19	0.09	0.05	0.08	0.01	0.01
04	0.49	0.15	0.23	0.20	0.09	0.05	0.08	0.01	0.01

6年	日系 Ave	外資 Ave	他 Ave	日系 S.D	外資 S.D	他 S.D	日外 Cov	日他 Cov	外他 Cov
02	0.37	0.07	0.20	0.22	0.06	0.07	0.01	0.00	0.00
03	0.38	0.09	0.14	0.23	0.07	0.07	0.01	0.00	0.00
04	0.38	0.08	0.16	0.25	0.07	0.07	0.01	0.00	0.00

10年	日系 Ave	外資 Ave	他 Ave	日系 S.D	外資 S.D	他 S.D	日外 Cov	日他 Cov	外他 Cov
02	0.60	0.21	0.06	0.42	0.21	0.07	0.25	0.06	0.03
03	0.60	0.21	0.05	0.44	0.21	0.07	0.26	0.06	0.03
04	0.60	0.21	0.05	0.46	0.22	0.07	0.28	0.06	0.03

20年	日系 Ave	外資 Ave	他 Ave	日系 S.D	外資 S.D	他 S.D	日外 Cov	日他 Cov	外他 Cov
02	0.44	0.25	0.02	0.24	0.16	0.03	0.17	0.03	0.02
03	0.43	0.25	0.02	0.24	0.16	0.03	0.17	0.03	0.02
04	0.41	0.24	0.01	0.24	0.16	0.02	0.18	0.03	0.02

総合	日系 Ave	外資 Ave	他 Ave	日系 S.D	外資 S.D	他 S.D	日外 Cov	日他 Cov	外他 Cov
02	0.53	0.18	0.14	0.32	0.16	0.06	0.19	0.04	0.02
03	0.53	0.19	0.13	0.33	0.17	0.06	0.20	0.04	0.02
04	0.53	0.19	0.12	0.35	0.17	0.06	0.20	0.04	0.02

日系 Ave：日系証券会社平均 外資 Ave：外資系証券会社平均

他 Ave：その他金融会社平均

日系 S.D：日系証券会社標準偏差

外資 S.D：外資系証券会社標準偏差

他 S.D：その他金融会社標準偏差

日外 Cov：日系証券会社と外資系証券会社の共分散の平方根

日他 Cov：日系証券会社とその他金融会社の共分散の平方根

外他 Cov：外資系証券会社とその他金融会社の共分散の平方根

が逆転する可能性は今後、どの程度あるのだろうか？これを分析するために、表3には、パラメータ推定に用いた各年限、仮想的5年、および入札発行予定額（5年：18.9兆円，10年：20.4兆円，20年：3兆円，30年：0.6兆円）に基づく加重平均に関して、拡散近似による平均と共分散とを2002年6月30日から2004年6月30日までの1年ごとの時点において示した。

表 4 ウインブルドン化の可能性

Table 4 The probability of the Wimbledon phenomenon.

年月日	可能性
2002/6/30	3.6%
2003/6/30	4.4%
2004/6/30	4.9%

表 3 に示した入札発行予定額で加重平均した入札シェアに関する将来の分布に基づいて、外資系証券会社のメンバ数が日系証券会社のメンバ数を上回る確率を求め、表 4 に示した。メンバ数が逆転する可能性はおよそ 5%程度であり、ウインブルドン化が本格的に起こる可能性はきわめて小さいといえる。

この事例報告では、日本国債入札におけるウインブルドン現象を 1992 年以降 2001 年前半にかけての国債入札における 3 社のシェアに基づいて分析した。分析方法としては、まず、3 社間におけるシェアの取り合いを線形連立微分方程式によってモデル化し、次に、それを確率モデルへ拡張することによって将来時点における 3 社のシェア分布を正規分布によってとらえる。最後に、この正規分布に基づいて国債懇談会における日系証券会社と外資系証券会社のメンバ数が逆転する可能性を導いた。モデルによると、先行き 3 年以内であればメンバ数が逆転する可能性はきわめて低く、急速なウインブルドン化が起きる可能性はまずないといえる。ここでの分析は、過去のデータに基づいており、構造改革等の今後の要因は考慮されていないが、国債入札参加者の間で関心が高いウインブルドン現象をおよそ説明することができたと考えている。

参 考 文 献

- 1) Andersson, H. and Britton, T.: *Stochastic Epidemic Models and Their Statistical Analysis*, Springer-Verlag, New York (2000).
- 2) Bailey, N.T.J.: A simple stochastic epidemic, *Biometrika*, Vol.37, pp.193-202 (1950).
- 3) Chan, K.C., Karolyi, G.A., Longstaff, F.A. and Sanders, A.B.: An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate, *J. of Finance*, Vol.XLVII, No.3, pp.1209-1227 (1992).
- 4) Gutierrez, R. and Rosales, N.J.: Diffusion approximations for Lotka-Volterra type models, *Commun. Statist.*, Vol.14, pp.809-832 (1998).
- 5) Kurtz, T.G.: Solution of ordinary differential equations as limits of pure jump Markov processes, *J. of Appl.Prob.*, Vol.7, pp.49-58 (1970).
- 6) Kurtz, T.G.: Limit theorems for sequences of pure jump Markov processes approximating ordinary differential processes, *J. of Appl. Prob.*, Vol.8, pp.334-356 (1971).
- 7) Matsuyama, K.: The change in demand for beer and sake — the demand growth models of competition, *J. of the Operations Research Society of Japan*, Vol.44, No.1, pp.34-56 (2001).
- 8) Miyazaki, K. and Tsubaki, H.: Comparison of JGB and bank debenture credit spread models, *J. of Fixed Income*, June, pp.63-70 (1999).
- 9) 笠原皓司：微分方程式の基礎，朝倉書店 (1986).

(平成 14 年 4 月 23 日受付)

(平成 14 年 6 月 19 日採録)



宮崎 浩一

昭和 42 年生。平成 12 年筑波大学大学院経営・政策科学研究科博士課程修了。経営学博士。平成 2 年度から平成 12 年度にかけて(株)三菱銀行、パンカース・トラストアジア証券会社、ゴールドマン・サックス証券会社(金融戦略部長)において与信管理、デリバティブリスク管理、債券投資モデルの構築および投資戦略の立案に従事。平成 13 年度から電気通信大学システム工学科専任講師。現在に至る。日本オペレーションズ・リサーチ学会、日本応用統計学会、日本経営工学会各会員。