

直感的な理解のための4次元空間提示システム

酒井 幸仁[†] 橋本 周司[‡]早稲田大学大学院理工学研究科物理学及応用物理学専攻[†]早稲田大学理工学部応用物理学科[‡]

1. はじめに

文化や科学は、形を表現することから育まれたということもできる。特に、3次元立体は、科学から芸術まで多くの分野で関心を集めてきた。もし、人間が3次元以上の高次元空間を理解できるようになったら、思考の幅が広がり、文化や科学をさらなる発展に導くかもしれない。

我々は、3次元立体の研究の拡張として、4次元立体を対象とし、4次元空間を直感的に理解するためのシステムを開発している。ここでいう4次元空間とは、4次元ユークリッド空間を意味し、4軸は互いに直交している。我々の目的は、人間が4次元空間を経験し理解するためのインタラクティブな環境を提供することである。

2. 4次元空間提示システム

人間には、4次元空間の体験がないので、4次元立体を直感的に理解することは難しい。例えば、4次元立方体（超立方体とも呼ぶ）は、3次元空間では立方体の中に立方体があるように表現されるが、4次元空間の回転操作により、3次元空間ではみられない旋回を行う。

人間は、3次元空間の体験に基づき、様々な視点から3次元立体の2次元透視図を描くことができる。また、2次元透視図から3次元立体を想像することもできる。このアナロジーから我々は、3次元空間で4次元立体の3次元透視図を観察できれば、4次元空間の情報を獲得できるのではないかと考え、4次元空間を直感的に理解するためのシステムを開発してきた[1]。

現在のシステムは、可搬性、および、操作性を重視し、PC、裸眼立体ディスプレイ、3次元触覚提示インタフェース等を用いた構成となっている。

3. 4次元空間表示プロセスの検討

これまでに報告されている多くの表示プロセスは、視点を固定し、4次元立体に対して透視投影する手法であった[2]。また、視点変更を考慮した表示プロセスも報告されているが、視線変更に関する制限が強い[1][3]。我々は、様々な視点から任意方向をみて、4次元空間内を自由に移動することを目指している。本稿では、視点（視線の始点）と注視点（視線の終点）による表示プロセスについて論じる。これにより、任意視

点、および、任意視線による4次元立体の可視化が可能となる。

4. 4次元空間表示プロセス

4次元空間の表示プロセスは、視野変換、透視変換で構成される。視野変換とは、ワールド座標系で定義された4次元立体を、視点を原点とする視点座標系のデータに変換するものである。透視変換とは、視線方向に位置する4次元立体を、3次元スクリーンに投影するものである。

4.1 視野変換

4次元ワールド座標系 $x_w y_w z_w w_w$ において、視点 $p_f = (x_f, y_f, z_f, w_f)$ と注視点 $p_a = (x_a, y_a, z_a, w_a)$ を指定する。視点座標系 $x_e y_e z_e w_e$ の原点は、視点 p_f であり、 w_e 軸は、注視点 p_a から視点 p_f 方向が正である。また、 y_w 軸の単位ベクトルは、 $y_e w_e$ 平面上とする(図1)。

まず、ワールド座標系の原点を視点 p_f に平行移動する。次に、平行移動後の w_1 軸を w_e 軸に合わせるように回転変換を施していく。これらの変換は、式(1)のように表され、これにより、ワールド座標系のデータ (x_w, y_w, z_w, w_w) を視点座標系のデータ (x_e, y_e, z_e, w_e) に変換することができる。行列 T_v を視野変換行列と呼ぶ。

$$[x_w \ y_w \ z_w \ w_w \ 1] T_v = [x_e \ y_e \ z_e \ w_e \ 1],$$

$$T_v = T_1 T_2 T_3 T_4. \quad (1)$$

式(1)の T_1, T_2, T_3, T_4 を式(2)と式(3)に示す。

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_f & -y_f & -z_f & -w_f & 1 \end{bmatrix}, T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & 0 & \sin \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & 0 & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, T_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \gamma & 0 & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

$$\cos \alpha = \frac{w_f - w_a}{\sqrt{(z_f - z_a)^2 + (w_f - w_a)^2}},$$

$$\sin \alpha = \frac{z_a - z_f}{\sqrt{(z_f - z_a)^2 + (w_f - w_a)^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{(z_f - z_a)^2 + (w_f - w_a)^2}}{\sqrt{(x_f - x_a)^2 + (z_f - z_a)^2 + (w_f - w_a)^2}},$$

$$\sin \beta = \frac{x_f - x_a}{\sqrt{(x_f - x_a)^2 + (z_f - z_a)^2 + (w_f - w_a)^2}}$$

[†]"Visualization System for Intuitive Understanding of 4-D Object and Space" by Yukihito Sakai, (Major in Pure and Applied Physics, Graduate School of Science and Engineering, Waseda University), Shuji Hashimoto, (Department of Applied Physics, School of Science and Engineering, Waseda University).

$$\left. \begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{\sqrt{(x_f - x_a)^2 + (z_f - z_a)^2 + (w_f - w_a)^2}}{\sqrt{(x_f - x_a)^2 + (y_f - y_a)^2 + (z_f - z_a)^2 + (w_f - w_a)^2}} \\ \sin \gamma &= \frac{y_a - y_f}{\sqrt{(x_f - x_a)^2 + (y_f - y_a)^2 + (z_f - z_a)^2 + (w_f - w_a)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

4.2 透視変換

視点座標系において、視点 p_f は原点である。視点 p_f から注視点 p_a 方向の距離 h の位置に 3 次元スクリーン座標系 $x_s y_s z_s$ を定義し、 $x_s y_s z_s$ 空間に 3 次元スクリーン $2k \times 2k \times 2k$ をおく(図 2)。式(4)より、視点座標系のデータを 3 次元スクリーン上に投影することができる。行列 T_s を透視変換行列と呼ぶ。

$$\begin{aligned} [x_e \ y_e \ z_e \ w_e \ 1] T_s &= [X_s \ Y_s \ Z_s \ W_s \ v_s], \\ T_s &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k/h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k & 0 \end{bmatrix}, \begin{cases} x_s = X_s/v_s = -hx_e/kw_e \\ y_s = Y_s/v_s = -hy_e/kw_e \\ z_s = Z_s/v_s = -hz_e/kw_e \\ w_s = W_s/v_s = -h/w_e \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

式(1)と式(4)を連結することにより、ワールド座標系のデータ(x_w, y_w, z_w, w_w)を、3 次元スクリーン座標系のデータ(x_s, y_s, z_s, w_s)に変換することができる。これにより、任意の視点からみた 4 次元立体の 3 次元透視図(x_s, y_s, z_s)を 3 次元スクリーン上に表示することができる。

5. 4 次元立体の可視化

図 3 に、異なる視点からみた 4 次元立体を示す。様々な視点からみた 3 次元立体が、様々な 2 次元透視図をなすように、4 次元立体も 3 次元スクリーンに様々な 3 次元透視図となって現れる。

図 4 に、視線方向の変化による 4 次元立体を示す。4 次元立体は、視線方向が変わると形状が変化するとともに 3 次元スクリーンの位置が変わる。本システムは、クリッピング処理を実装しているため、3 次元スクリーンを視野とする範囲のみを表示することができる。

図 5 は、4 次元立体に視点を近づけたとき、3 次元スクリーンによって切り取られた、4 次元立体の断面を示している。この表現によって、4 次元立体が 3 次元立体の各々の面を共有し合っ構成されていることがよく分かる。

本システムは、4 次元立体に限らず、複素関数等、4 次元情報の観察も可能であり、数学教育システムとしての活用も期待できる。

6. おわりに

4 次元空間の視点と注視点の変更、および、4 次元立体の操作(拡大縮小、回転、平行移動)が可能な 4 次元空間提示システムについて述べた。本システムは、如何なる 4 次元情報の提示も可能なため、認知科学、情報可視化、数理造形といった分野での活用が期待できる。今後は、視点移動の方向を考慮した表示プロセス、提示コンテンツの検討を行い、4 次元空間の直感的な理解の向上を図っていく。

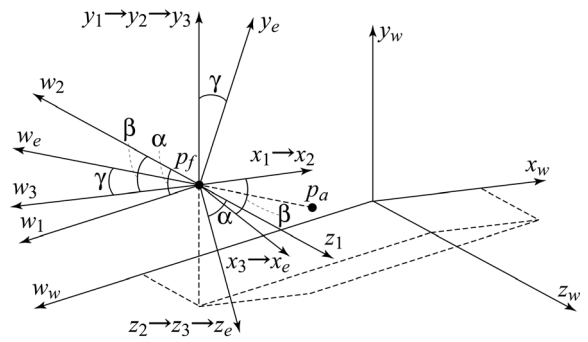


図 1 ワールド座標系と視点座標系の関係

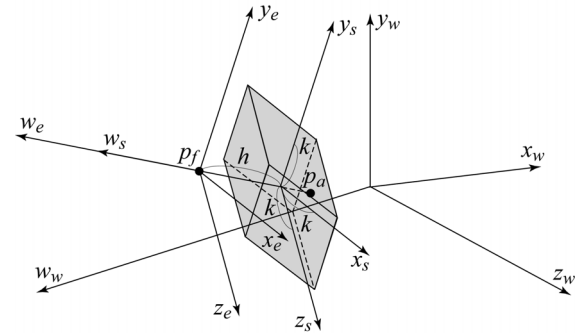


図 2 視点座標系と 3 次元スクリーン座標系の関係

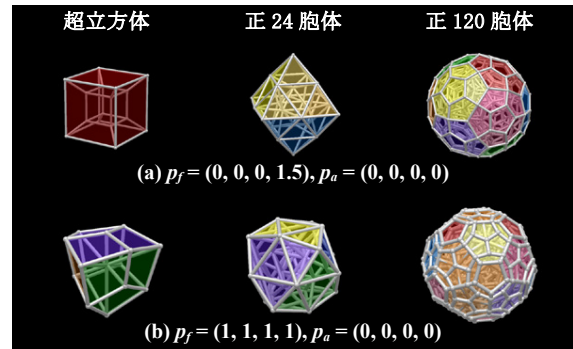


図 3 異なる視点からみた 4 次元立体

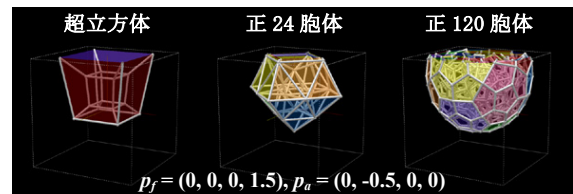


図 4 視線の変化による 4 次元立体

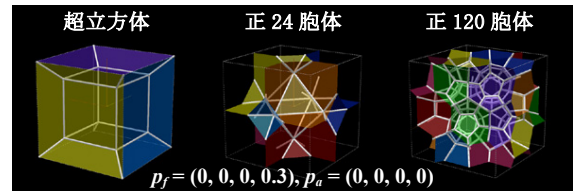


図 5 4 次元立体の断面

参考文献

- [1] Makoto Murata, Shuji Hashimoto, "Interactive Environment for Intuitive Understanding of 4-D Object and Space", Proceedings of International Conference on MultiMedia Modeling, pp.383-401, (2000)
- [2] Barbara Hausmann, Hans-Peter Seidel, "Visualization of Regular Polytopes in Three and Four Dimensions", Proceedings of EUROGRAPHICS'94, Volume 13, Number 3, pp.C305-C316, (1994)
- [3] 宮崎興二, 石原慶一, "4 次元グラフィックス", ISBN 4-254-10075-2, 朝倉書店, (1989)