

Stribeck 効果を伴う動摩擦力を考慮した擦弦の精密シミュレーション

中山 晴貴[†] 橋本 周司[†][†] 早稲田大学理工学部応用物理学科

1 はじめに

近年、楽音の生成過程の物理モデルによる音響生成はシンセサイザーの基本手法のひとつとなっている[1]。

ばね・質点系をベースにした楽器の力学的モデルの研究も行われているが、擦弦動作を含めてすべてをモデル化した例は少ない[2]。本稿では擦弦楽器の1次元物理モデルにおいて、弦と弓の運動をシミュレートした擦弦振動の再現を試みる。

擦弦のような動摩擦を伴う摩擦は弓と弦の接触点において Stribeck 効果を伴う動摩擦力を受けることが知られている。この効果は運動物体の相対速度の増大に従い摩擦力が減少する性質を持つ。

この摩擦力は非線形であるため、この力を含む運動方程式を解析的に解くことは困難であるが、本稿では数値解析の手法により弦と弓の相互作用による振動のシミュレートを試みる。

2 弦のモデル化

弦を微小な質点とばねの集合としてみなして、運動方程式を解くことにより各質点の変位を求める。本稿では質点の動きを弦と直交する1方向に制限して考えた。そのため弦と平行な方向の力はどの質点においても常に0である。図1に1質点の時の系と摩擦の方向の概念図を示す。i番目の質点に働く力は

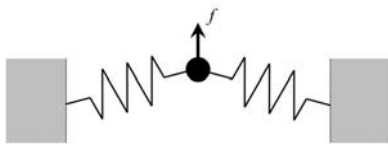


図 1: バネ質点系のモデルと擦弦の方向

- F_{visc} : 弦の空気抵抗 (粘性抵抗)
- $F_{rest,i}$: ばねによる隣の質点との復元力
- F_{fric} : 弦と弓の間に発生する摩擦力

などがあげられる。この3つの力を用いて質点*i*の運動方程式は次のようにあらわせる。

$$m\ddot{x}_i = F_{fric} + F_{rest,i} + F_{visc}$$

ただし擦弦点以外では $F_{fric} \equiv 0$

2.1 粘性抵抗

一般的に物体に働く粘性抵抗は速度 v に比例する。すなわち粘性抵抗 D とすると、

$$D = -k\dot{x}$$

となる。

2.2 復元力

弦の垂直方向に関して、質点 $i-1 \sim i$ 間の間隔を d 、弦の傾きの角を δ_{i-1} 、 δ_i 、変位をそれぞれ y_{i-1} 、 y_i 、弦の張力を T とすると、

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -T(\tan \delta_{i-1} - \tan \delta_i) \\ &= -\frac{T}{d}(2x_i - x_{i+1} - x_{i-1}) \end{aligned}$$

とあらわせる。よって垂直方向の力 $F_{rest,i}$ は

$$F_{rest,i} = -\frac{T}{d}(2x_i - x_{i+1} - x_{i-1})$$

となる。

2.3 摩擦力

本稿では弦と弓の擦弦ポイントにおける相互作用を表すのに[3]で提案されている「正則化された不連続摩擦モデル」を用いた。以下にそのモデルを示す。

$$\begin{aligned} \bar{v} &= v_{k-1} + Th_k/M \\ s_k &= \begin{cases} \text{STICK} & \text{if } |\bar{v}| \leq T|\hat{\phi}(\pm 0)|/M \\ \text{SLIP} & \text{if } |\bar{v}| > TF_s/M \\ s_{k-1} & \text{otherwise} \end{cases} \\ f_k &= \begin{cases} -M\bar{v}/T & \text{if } s_k = \text{STICK} \\ \hat{\phi}(\bar{v}) & \text{if } s_k = \text{SLIP} \end{cases} \end{aligned}$$

ここで h は外力の和、 $\bar{v}$ は外力のみによる速度の変化を仮定した擬似的な速度であり、 T がサンプリング周期、 k が離散時間、 M が慣性質量、 F_s が最大静止摩擦力、 $\hat{\phi}(\bar{v})$ が動摩擦力の関数となっている。実際の F_{fric} には f_k として計算されたものを代入して使用する。

Precise simulation of bow-string action considering active friction with Stribeck effect

[†] Haruki NAKAYAMA (haruki@shalab.phys.waseda.ac.jp)

[†] Shuji HASHIMOTO (shuji@waseda.jp)

Department of Applied Physics, School of Science and Engineering, Waseda University ([†])

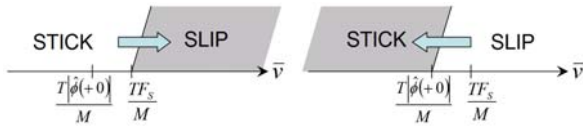


図 2: 擬似速度 $\bar{v}$ と摩擦状態の遷移

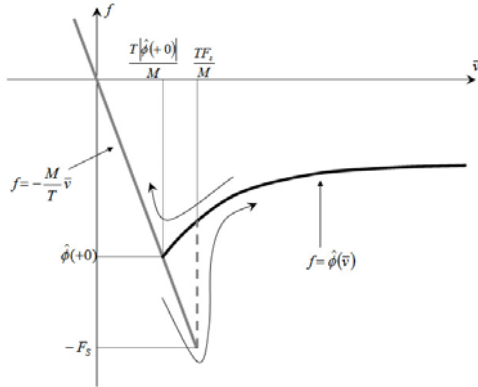


図 3: 擬似速度 $\bar{v}$ と摩擦力の関係

この摩擦モデルは $\bar{v}$ の変化に依存するヒステリシスを有しており、図 2,3 に $\bar{v}$ の増減に伴う状態遷移の様子を示す。

3 実験

3.1 実験条件

実験で生成した音のパラメータは表 1 のとおりである。実験では各質点に対してルンゲ・クッタ法で微小時間ごとの変位を求め、その中の 1 点の変位を生成音として出力した。

3.2 実験結果

弦の運動の様子をアニメーションで観測した結果、擦弦特有の弦振動であるヘルムホルツ運動の様子を観察することができた。また生成された音を聞いた結果、音色の問題点が若干残るものの、有限時間で定常的な音に変化していることが確認でき、現象として擦弦楽器に近い音が生成されているように思われた。

生成された波形と 5kHz まで周波数解析したスペクトル図を図 4、図 5 に示す。図 5 から生成音は基本周波数が約 300Hz で倍音構造を有していることがわかる。しかし胴による共鳴を考慮していないため、高音

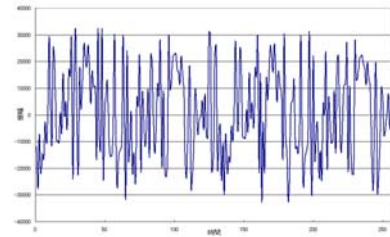


図 4: 生成音の周波数分布

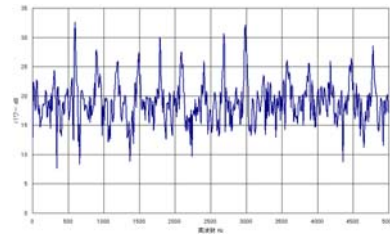


図 5: 生成音の周波数分布

域の周波数のパワーが低音域の周波数のパワーと同程度になっており、実際の楽器音よりも高音が強い事がわかる。

4 まとめ

本稿では擦弦の摩擦をより実際の力学に即したモデルとして与えたときの擦弦運動のシミュレーションを試みた。生成音は倍音構造を有している、有限時間で定常になるなど、擦弦楽器音の基本的な性質を満たしていることが確認できた。しかし問題点として、提案モデルでは音生成の過程も弦のある一点の変位を音として出力しているため、生成音は実際の擦弦楽器の音色とは異なる。質点の運動方向も弦に直行する一方方向に限定している。そのため、よりリアルな音の生成には楽器の弦だけでなく、ネックや共鳴体などまで含めたモデル化や質点の自由度を増やす事などが必要である。

またシミュレーションでは 1 秒の音を生成するのに 3 ~ 40 分ほど計算時間を要しており、計算時間の改善も今後に向けての必須課題である。

参考文献

- [1] 藤森潤一: 楽音と音場のシミュレーション技術, 音楽情報処理の技術的基盤, pp.23-37, 「音楽情報科学に関する総合的研究」調査報告書 (1993).
- [2] C. Cadoz, J. Florens : Modular Modelisation and Simulation of the Instrument, Proceedings of 1990 ICMC, pp.75-78, Glasgow(1990).
- [3] 菊植亮, 武居直行, 佐野明人, 望山洋, 藤本英雄: 有限時間で零速度に収束する不連続摩擦モデル, 第 10 回ロボティクスシンポジア, pp.215-220, (2005).

表 1: 生成音のパラメータ

k	0.08575 N·s/m
T/d	50 N/mm
質点数	750 個
F_s	56 N
$\hat{\phi}(\pm 0)$	40 N