最適所得課税理論と日本の申告所得税

市田浩三

京都産業大学経済学部

1. はじめに

Mirrlees の先駆的な研究以後、線形および非線形モデルを扱った最適所得課税に関する多くの論文等が発表されてきた [1-4]。ここでは Lagrange の未定乗数法を利用して、この問題を連立常微分方程式で表現した。そして、その結果を平成 16 年度の申告所得金額階級別表と比較した。

2. モデルの定式化

Mirrlees による最適所得課税モデルは次のとおりである [1]。個人(家計)は同一の効用関数 $u(x, y)$ をもつ。 x は消費 ($x > 0$) で y は労働供給 ($0 \leq y < 1$) である。 u は $x > 0, 0 \leq y < 1$ において連続微分可能であり、一般に $\partial u / \partial x > 0, \partial u / \partial y < 0$ であると仮定される。個人の稼得能力を表すパラメータ n は $f(n)$ で表される連続な密度関数を持ち、区間 $n_0 \leq n \leq n_N$ において $f(n) \geq 0$ であるとする ($n_0 > 0, n_N < \infty$)。課税前所得 $z = ny$ に対する非線形所得税関数を $T(z) = T(ny)$ とすると

$$x = z - T(z) = ny - T(ny) \quad (1)$$

であり、個人は効用関数を最大にするように y を定めるので

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} u(ny - T(ny), y) \\ &= u_1(n - nT'(ny)) + u_2 = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

より

$$1 - T'(ny) = -\frac{u_2}{u_1 n} \quad (3)$$

となる。ここで、 u_1 と u_2 はそれぞれ u の x と y に関する偏微分を示し、 T' は T の z に関する微分を表す。(2)(3)を利用すると

$$\frac{du}{dn} = \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial n} = u_1(y - yT'(ny))$$

$$= u_1 y (1 - T'(ny)) = u_1 y \left(-\frac{u_2}{u_1 n}\right) = -\frac{y u_2}{n} \quad (4)$$

となる。個々の効用 u が社会的厚生に与える影響を社会的厚生関数 $G(u)$ で表すと、最適所得課税は積分

$$W = \int_{n_0}^{n_N} G(u) f(n) dn \quad (5)$$

を最大にする課税政策である。社会の総生産額に対する政府の税収が一定値 $1 - r$ ($0 < r < 1$) であるとする

$$1 - r = \frac{\int_{n_0}^{n_N} (z - x) f(n) dn}{\int_{n_0}^{n_N} z f(n) dn} = \frac{\int_{n_0}^{n_N} T(ny) f(n) dn}{\int_{n_0}^{n_N} ny f(n) dn} \quad (6)$$

と表され、これより

$$\begin{aligned} \int_{n_0}^{n_N} (x - rz) f(n) dn \\ = \int_{n_0}^{n_N} (ny - rny - T(ny)) f(n) dn = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

となる。(4)(7)を制約条件として(5)を最大にするために、Lagrange 関数

$$L = \int_{n_0}^{n_N} [(G(u) + \theta(x - rz)) f(n) + \lambda \left(\frac{du}{dn} - g\right)] dn \quad (8)$$

を導入する。ただし

$$g = g(u, y) = -\frac{y u_2}{n} \quad (9)$$

である。(8)を部分積分すると

$$\begin{aligned} L = \int_{n_0}^{n_N} [(G(u) + \theta(x - rz)) f(n) - u \frac{d\lambda}{dn} - \lambda g] dn \\ + \lambda(n_N) u(n_N) - \lambda(n_0) u(n_0) \end{aligned} \quad (10)$$

となる。 L を u および y で微分して 0 とおくと

$$\left(\frac{\partial G}{\partial u} + \theta \frac{\partial x}{\partial u}\right) f(n) - \frac{d\lambda}{dn} - \lambda \frac{\partial g}{\partial u} = 0 \quad (11)$$

「Optimal Income Tax Theory and Individual Income Tax in Japan」

† 「Kozo Ichida, Faculty of Economics, Kyoto Sangyo University」

$$\left[\frac{\partial G}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \theta \left(\frac{\partial x}{\partial y} - r \frac{\partial z}{\partial y} \right) \right] f(n) - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{d\lambda}{dn} - \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad (12)$$

が得られる。

$u(x, y)$, $G(u)$, $f(n)$ としては次の関数形を仮定する [1] .

$$u(x, y) = \log x + \log(1 - y) \quad (13)$$

$$G(u) = -\frac{1}{\beta} e^{-\beta u} \quad (14)$$

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma n}} \exp\left[-\frac{(\log n - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (15)$$

(13)(14)を用いると

$$\frac{d\lambda}{dn} = [e^{-\beta u} + \theta(ny - T)]f(n) \quad (16)$$

$$\lambda = \theta n(1 - y)[(ny - T) - rn(1 - y)]f \quad (17)$$

となる。

3. 方程式の解

解くべき方程式は次の通りである。

$$\frac{du}{dn} = \frac{y}{n(1 - y)} \quad (18)$$

$$\frac{d\lambda}{dn} = [e^{-\beta u} + \theta(ny - T)]f(n) \quad (19)$$

$$\lambda = \theta n(1 - y)[(ny - T) - rn(1 - y)]f \quad (20)$$

$$u = \log(ny - T) + \log(1 - y) \quad (21)$$

$$\int_{n_0}^{n_N} (ny - rny - T)f(n)dn = 0 \quad (22)$$

(18) ~ (21)は常微分方程式2つと関数方程式2つの連立方程式である。βとrはあらかじめ与える定数で、θは未知のパラメータである。nは独立変数で、u、λ、y、Tはすべてnの関数である。(18) ~ (21)は4変数の連立方程式であるが、(20)(21)からyとTをuとλで表すことができれば、uとλの連立常微分方程式になる。(21)から

$$ny - T = \frac{e^u}{1 - y} \quad (23)$$

となるから、(23)を(20)に代入すると

$$\lambda = \theta n f e^u - \theta r n^2 f (1 - y)^2 \quad (24)$$

から

$$1 - y = \sqrt{\frac{\theta n f e^u - \lambda}{\theta r n^2 f}} \quad (25)$$

が得られる。(23)(25)を(18)(19)に代入すると

$$\frac{du}{dn} = \frac{1 - \sqrt{\frac{\theta n f e^u - \lambda}{\theta r n^2 f}}}{n \sqrt{\frac{\theta n f e^u - \lambda}{\theta r n^2 f}}} \quad (26)$$

$$\frac{d\lambda}{dn} = \left(e^{-\beta u} + \frac{\theta e^u}{\sqrt{\frac{\theta n f e^u - \lambda}{\theta r n^2 f}}} - r n \sqrt{\frac{\theta n f e^u - \lambda}{\theta r n^2 f}} \right) f \quad (27)$$

となる。ただし、 $0 \leq y < 1$ であるから(25)より

$$0 < \frac{\theta n f e^u - \lambda}{\theta r n^2 f} \leq 1 \quad (28)$$

である必要がある。

4. おわりに

ここで取り上げたモデルは Mirrlees の論文を未定乗数法を利用し連立常微分方程式として定式化したもので、必ずしも先行研究と対応しているわけではない。数値的に解があるかどうかを中心に調べた。常微分方程式の数値解法には4次のRunge - Kutta法を使用した。

定めるべきパラメータがいくつか存在し、解は変化する。国税庁のホームページから得られた平成16年度の申告所得金額階級別表(平成16年分の申告所得税の納税者について申告所得金額区分とその所得者数が記載された表)とここで得られた結果を比較してみた。

参考文献

- [1] Mirrlees, J.A. (1971) "An exploration in the theory of optimum income taxation," *Review of Economic Studies*, vol.31, pp.175-208.
- [2] Tuomala, M. (1990) *Optimal Income Tax and Redistribution*. Clarendon Press, Oxford.
- [3] Laramie, A.J. and Mair, D. (2000) *A Dynamic Theory of Taxation*. Edward Elgar, Cheltenham.
- [4] 田近栄治・古谷泉生 (2000) 「日本の所得税 現状と理論」『フィナンシャル・レビュー』, 4月号, pp.129-161.