

# 事業の期待利益を最大化する初期投資額の借入形態

山田 辰徳<sup>†</sup> 宮崎 浩一<sup>†</sup> 野村 哲史<sup>†</sup>

本論文では、事業の期待利益を最大化する借入形態の決定モデルを提案する。本論文では、借入形態を、資金借入れ時に設定される、利率、返済方法の組合せと考え、利率の決定には事業の信用リスクを加味した、社債の利回り評価法を用い、2期の分割返済を想定する。さらに事業の保有資本金、銀行の要求金利についての制約を考慮することで、経営情報により有用なモデルの提案を行う。数値例では、各初期投資金額での事業の期待利益と借入形態を算出し、事業の資本金、銀行の要求金利が事業の期待利益、借入形態に与える影響についても分析を行う。

## What Type of Loan Structure Maximizes the Expected Profit of the Project

TATSUNORI YAMADA,<sup>†</sup> KOICHI MIYAZAKI<sup>†</sup> and SATOSHI NOMURA<sup>†</sup>

This paper provides the model to derive the optimal loan structure that maximizes the expected profit of the project. We define loan structure as the combination of the payment schedule and the loan interest rate. Assuming two time epochs for the payment, we adopt the arbitrage-free pricing of corporate bond yield to evaluate the loan interest rate. With the restriction to initial capital to the project and the use of the appropriate loan interest rate, our model could provide valuable information to managerial decision making. In numerical examples, both optimal expected profit and the optimal loan structure are derived under each initial investment amount. The effect of the initial capital and the bank's requested premium to the optimal expected profit and the optimal loan structure is also analyzed.

### 1. はじめに

本研究では、事業の期待利益を最大化する初期投資金額の借入形態を決定するモデルを提案する。対象事業は倒産が借入形態に依存するコモディティ事業を想定する。コモディティ事業とは、コモディティを生産あるいは採鉱し、市場で決定される価格で取引を行うことにより収益をあげる事業である。また、この事業が扱うコモディティとは大豆やコーヒー豆のような農作物から原油、金、パラジウムなどの原材料までの商品の総称であり、株式や債券と同様に市場で取引される価格が決定される金融商品である。コモディティ事業では単一のコモディティを取り扱うケースが大半であるため、コモディティ事業の収益は、取引量が一定の場合、単一の市場価格に大きく依存し、不安定なものとなる。

そこで、本論文ではコモディティ事業の資金借入れについて着目する。銀行が貸出しを行う際、利率を借

手の信用リスクに応じて決定する点は、借手がコモディティ企業であるか一般の事業法人であるかにかかわらず共通である。相違点は、一般事業法人に対する貸出しの場合、会社の寿命などといった言葉で表現されるように、概して会社設立からの年数に応じて倒産確率も増すことから、貸出満期が長いほど、借り手の信用リスクが高まるため、利率は高く設定されるのに対して、コモディティ事業の場合、利益の不安定さから、返済期日が短い場合、利益が十分累積せずに倒産してしまう可能性が高くなるため、通常の事業とは異なり、返済までの期日が短いほど利率が高くなることである。そこで、このようなコモディティ事業独特の借入形態を表現するために、生産設備購入のために銀行から資金を借り入れ、生産したコモディティを借入期日から借入満期まで日々売却することを考える。そして借入の返済に累積した利益を充てるとすれば、上に述べたようなコモディティ事業の特徴を表現することが可能となる。

コモディティ事業の倒産確率や借入形態に関する研究はいくつかあるが、Klugeら<sup>1)</sup>は借入により設備投資を行ったコモディティ事業が、商品を生産して借

<sup>†</sup> 電気通信大学大学院システム工学専攻  
Department of Systems Engineering, The University of  
Electro-Communications

入満期に市場価格での売却代金を返済に充てるという設定において、借入満期での市場価格から、コモディティ事業の倒産確率を導出している。しかしながら、A) 倒産確率に見合う借入金利の影響が考慮されていない、B) 借入は一括返済のみを取り扱っており、借入形態に関する議論はなされていない、C) A), B) の理由から経営情報として有用な事業収益最大化のための借入形態や自己資本対比での借入額自体に関する議論がなされていない。そこで、本研究では、借入金利の決定方法として、信用リスクを加味した、社債の利回り評価法を用いたうえで、2期の分割返済を想定し、事業の期待利益を最大化する借入形態の決定モデルを提案する。さらに、事業の資本金、銀行の要求金利を考慮に入れ、経営情報としてより有用なモデルの提案を試みる。

本論文の構成は以下のとおり。2章では、コモディティ価格過程、コモディティ事業の倒産を加味したうえで期待利益などのモデル化を行い、3章では、借入形態を定義し、コモディティ事業の期待利益を最大化する借入形態の決定手順を示す。4章では数値を用い、コモディティ事業の期待利益を最大化する借入形態を具体的に求め、最後に、まとめと今後の課題を付す。

## 2. モデル

本章では、まず、モデルの仮定、用語と記法について示し、シミュレーションを実行するための基本モデルである、コモディティ価格過程、コモディティ事業の倒産、コモディティ事業の利益の定式化について記す。

### 2.1 モデルの概要と用語および記法のまとめ

本モデルでは、単純化のため次の3つの仮定を置く。  
 仮定1. 資本金はすべて設備投資に充てるとし、設備投資金額（設備投資金額 > 資本金）に対して、資本金では賸いきれない差額を銀行の借入で賄うとする。  
 仮定2. 借入の返済を2回の分割返済とする。  
 仮定3. 返済は、日々生産するコモディティを売却して得られる累積利益を返済原資とするのであるが、日々のコモディティの取引量を1とし、事業での日々の利益は日々の価格に等しいとする。

用語、記法については次のとおりである。

- 返済元金  $G_1, G_2$ : 1, 2期目での返済元金
- 貸出金額  $G_1 + G_2$ : 銀行が貸し出す金額の総額
- 返済金額  $D_1, D_2$ : 1, 2期目の返済元金とそれにかかる利息の合計金額
- 返済期日  $T_1, T_2$ : 返済金額を返済する期日（1, 2期目の返済期日）

- 貸出利率  $R$ : 銀行が信用リスクのある事業への貸出に適用する金利
- 安全利率  $r$ : 銀行が信用リスクのない貸出先への貸出に適用する金利
- コモディティ事業での累積利益  $X_{T_i T_j}$ : 時点  $T_i$  ( $T_i = 0$  の場合は借入時点) から時点  $T_j$  までのコモディティ事業での累積利益
- 資本金  $C$ : 設備投資に充てるコモディティ事業の資本金
- 銀行の金利プレミアム  $\alpha$ : 銀行が利益を得るために安全利率に上乘せする金利

### 2.2 コモディティ価格過程の記述

コモディティの1つである金を例として取り上げ、その実際の値動きを図1に示した。図1からは、金価格は平均値（図では350ドル/トロイオンス）を中心に上下に変動していることが見てとれる。金以外の多くのコモディティに関しても、現実の値動きは平均回帰的であり、コモディティ価格過程を記述するために、次のO.U. (Ornstein-Uhlenbeck) 過程を採用する。

$$dS_t = k(\bar{S} - S_t)dt + \sigma dZ(t) \quad (1)$$

ここで、 $\bar{S}$  はコモディティの平均価格、 $k$  は平均回帰速度、 $\sigma$  はコモディティ価格のボラティリティに関するパラメータであり、 $dZ$  は標準ブラウン運動を表す。仮定3より、コモディティ事業の累積利益  $X_{0t}$  はコモディティ価格  $S_t$  の累積値となる。定式化すると次のようになる（付録参照）。

$$X_{0t} = \int_0^t S_u du = \bar{S}t + \frac{1}{k}(\bar{S} - S_0)(e^{-kt} - 1) + \frac{\sigma}{k} \int_0^t (1 - e^{-ku}) dZ(u) \quad (2)$$

### 2.3 コモディティ事業の倒産、コモディティ事業および銀行の期待利益の定式化

#### 2.3.1 コモディティ事業の倒産の定式化

コモディティ事業は、借入期日から返済期日までの累積利益が、返済金額を下回る場合に倒産すると定義する。よって、コモディティ事業の倒産の有無は、(I) 時点  $T_1$  での倒産、(II) 時点  $T_2$  での倒産、(III) 倒

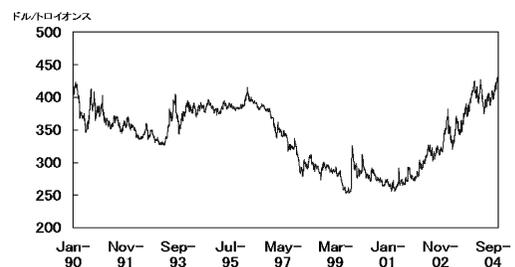


図1 金価格の推移

Fig.1 History of gold price.

産しない、の3通りに場合分けすることができ、次のように定式化される。

(I) の場合:  $X_{0T_1} < D_1$

(II) の場合:  $X_{0T_1} \geq D_1$  かつ  $X_{0T_1} - D_1 + X_{T_1T_2} < D_2$

(III) の場合:  $X_{0T_1} \geq D_1$  かつ  $X_{0T_1} - D_1 + X_{T_1T_2} \geq D_2$

ただし、 $D_1, D_2$  は次のように表される。

$$D_1 = G_1 e^{RT_1} + G_2 (e^{RT_1} - 1) \quad D_2 = G_2 e^{R(T_2 - T_1)}$$

ここで、 $G_1 e^{RT_1}$  は1期目の元利返済金額、 $G_2 (e^{RT_1} - 1)$  は2期目の返済元金に関する1期目の支払利息であり、 $G_2 e^{R(T_2 - T_1)}$  は2期目の元利返済金額である。2期目での倒産の判定では、1期目の返済期日までの累積利益と1期目の返済金額の差額  $X_{0T_1} - D_1$  を1期目の返済期日から2期目の返済期日までの累積利益  $X_{T_1T_2}$  に加算して、2期目の返済金額  $D_2$  との比較を行う。

### 2.3.2 コモディティ事業の期待利益

コモディティ事業の利益  $p_C$ 、銀行の回収金額  $c_B$  はコモディティ事業の倒産の有無に大きく依存する。本研究では、コモディティ事業の倒産時、銀行は倒産時点までのコモディティ事業の累積利益すべてを回収するものとし、コモディティ事業は累積利益以上の債務は負わないものとする。このような設定の下では、コモディティ事業の利益  $p_C$ 、銀行の回収金額  $c_B$  は以下のように表すことができる。

(I) の場合

コモディティ事業：倒産しているので、設備投資に充てた資本金が損失となる。

$$p_C = -C$$

銀行：1期目の返済金額全額は回収できずに借入期日から1期目返済期日  $T_1$  までのコモディティ事業の累積利益  $X_{0T_1} e^{r(T_2 - T_1)}$  しか回収できない。

$$c_B = X_{0T_1} e^{r(T_2 - T_1)}$$

(II) の場合

コモディティ事業：倒産しているので、設備投資に充てた資本金が損失となる。

$$p_C = -C$$

銀行：1期目の返済期日  $T_1$  では、コモディティ事業は倒産していないので、返済金額全額回収できるが、2期目は返済金額全額回収できずに、1期目の返済期日までの累積利益と1期目の返済金額の差額  $X_{0T_1} - D_1$  と1期目の返済期日から2期目の返済期日までの累積利益  $X_{T_1T_2}$  しか回収できない。

$$c_B = D_1 e^{r(T_2 - T_1)} + (X_{0T_1} - D_1) + X_{T_1T_2}$$

$$= (e^{r(T_2 - T_1)} - 1) D_1 + X_{0T_1} + X_{T_1T_2}$$

(III) の場合

コモディティ事業：累積利益から各返済金額、資本金を差し引いた金額が利益である。

$$\begin{aligned} p_C &= X_{0T_1} - D_1 + X_{T_1T_2} - D_2 - C \\ &= X_{0T_1} + X_{T_1T_2} - (D_1 + D_2) - C \end{aligned}$$

銀行：1期目、2期目ともに返済金額全額回収できる。

$$c_B = D_1 e^{r(T_2 - T_1)} + D_2$$

なお、(I) から (III) はすべて、借入満期 ( $T_2$ ) 時点での価値として表現されている。

### 3. コモディティ事業の期待利益を最大化する借入形態の決定手続き

2章に示したように、コモディティ事業の利益は倒産の有無によって大きく異なるため、コモディティ事業の期待利益  $\hat{p}_C$  は借入形態に大きく依存する。本研究では、借入形態を1期目の返済期日  $T_1$ 、1期目の返済元金の割合  $\frac{G_1}{G_1 + G_2}$ 、借入金利  $R$  の組合せと定義し、与えられた設備投資金額、借入満期  $T_2$  に対して、借入形態を変化させ、コモディティ事業の期待利益を最大化する借入形態について考える。また、起業判断において有効な情報である、コモディティ事業の期待利益  $\hat{p}_C$  が負となる確率（以下、マイナス確率と呼ぶ）についても、借入形態にあわせて考えることとする。コモディティ事業のマイナス確率は期待利益が負となるサンプルパス数を全サンプルパス数で除して算出される。具体的な借入形態の決定手続きは次のStepのとおりである。

Step1. コモディティ事業の累積利益の導出

コモディティ価格過程の初期値、パラメータとして  $S_0, \bar{S}, k, \sigma$ 、返済期日  $T_1, T_2$  を与え、式(1)に従うサンプルパスを発生させ、コモディティ事業の累積利益  $X_{0T_1}, X_{T_1T_2}$  を導出する。

Step2. コモディティ事業の期待利益  $\hat{p}_C$ 、銀行の期待回収金額  $\hat{c}_B$  の算出

設備投資金額、保有資本金  $C$ 、金利プレミアム  $\alpha$ 、安全利率  $r$ 、借入金利  $R$  を与え、各サンプルパスから得られた、コモディティ事業累積利益から2.3.2項で示したコモディティ事業の利益  $p_C$ 、銀行の回収金額  $c_B$  を算出し、その期待値をとり、コモディティ事業の期待利益  $\hat{p}_C$ 、銀行の期待回収金額  $\hat{c}_B$  を得る。

Step3. 1期目の返済元金割合の設定

1 期目の返済元金割合  $\frac{G_1}{G_1+G_2}$  のみを変化させ、コモディティ事業の期待利益を最大化する、1 期目の返済元金割合  $\frac{G_1}{G_1+G_2}$  を決定する。

Step4. 借入金利の決定

Step2 で与えた借入金利  $R$  とは別に、Step3 で得られた返済元金割合の下、銀行が無裁定条件 (3) を満たすような借入金利  $R'$  を算出する。無裁定条件式の下では、倒産リスクのある企業に貸し出した場合の期待回収金額と倒産リスクのない企業に安全利率  $r$  で貸し出した場合の回収金額は等しい。

$$D_1 e^{-(R'-\alpha)T_1} + D_2 e^{-(R'-\alpha)T_2} = \hat{c}_B e^{-rT_2} \quad (3)$$

Step5. 借入金利の決定

$R = R'$  であれば、Step6 へ進み、そうでなければ、Step4 で求めた借入金利  $R'$  を借入金利  $R$  に代入し、Step2 に戻る。

Step6. 借入形態の導出

これまで固定していた 1 期目の返済期日  $T_1$  として異なる期日を与え、Step1 から Step5 を実行することで借入形態を導出する。また、借入形態ごとに、コモディティ事業の期待利益だけでなく、マイナス確率も導出する。さらに、設備投資金額についても同様に变化させ、各設備投資金額での借入形態、マイナス確率を導出する。

Step7. コモディティ事業の期待利益を最大化する借入形態の決定

各設備投資金額において、コモディティ事業の期待利益を最大化する借入形態とそのときのコモディティ事業の最大期待利益  $\max \hat{p}_c$ 、事業のマイナス確率が最小となる借入形態を選出する。

なお、期待返済期日  $\hat{T}$  を、1 期目の返済元金割合  $\frac{G_1}{G_1+G_2}$  と、2 期目の返済元金割合  $\frac{G_2}{G_1+G_2}$  を重みとした 1 期目返済期日  $T_1$  と 2 期目返済期日  $T_2$  の期待値とする。

4. 数値実験

本章では、2 章でのモデルに基づき、3 章に示したように、コモディティ事業の資本金、金利プレミアムを変化させた場合の、各設備投資金額での、コモディティ事業の最大期待利益  $\max \hat{p}_c$ 、および借入形態をシミュレーションにより算出する。

4.1 データ、シミュレーションの設定

シミュレーションの設定は次のとおり。

- 式 (1) に従うコモディティ価格のサンプルパスを

表 1 コモディティ価格過程の初期値、パラメータと安全利率、借入満期

Table 1 Parameter values.

$S_0$	$\bar{S}$	$k$	$\sigma$	$r$ (%)	$T_2$ (日後)
100	100	0.001	10	5	2000

表 2 資本金と金利プレミアム

Table 2 Initial capital and requested risk premium.

コモディティ事業の資本金 $C$		
20000	50,000	80,000
金利プレミアム $\alpha$		
0.0%	2.5%	5.0%

10000 個発生させる。また、各サンプルパスのサンプリング間隔は 100 日とし、コモディティ事業の累積利益導出に際しては、台形近似を利用する。

- $T_1$  は 500, 1000, 1500, 2000 日後 ( $T_1 = 2000$  日後の場合は一括返済) の 4 通りを考え、設備投資金額はコモディティ事業の資本金に 10000 を加えたものから、150000 を加えたものまで 10000 刻みで变化させる。
- コモディティ価格の初期値、コモディティ価格過程のパラメータ、安全利率  $r$ 、借入満期  $T_2$  は表 1 に示すように与える。
- コモディティ事業の資本金、金利プレミアムは表 2 に示すように 3 通りずつ与え (全部で 9 通りの組合せ)、借入形態について分析する。

4.2 実験結果と考察

本節では、まず、金利プレミアム、資本金の各制約に対する、コモディティ事業の最大期待利益  $\max \hat{p}_c$ 、借入形態、マイナス確率の最小値の感応度について、次に、借入形態について考察する。

4.2.1 制約に対する感応度

まず、金利プレミアム、資本金それぞれがコモディティ事業の最大期待利益に与える影響について見ていく。図 2 は、資本金  $C$  を 20000 とし、各設備投資金額の下、金利プレミアム  $\alpha$  を変化させた場合の、コモディティ事業の最大期待利益  $\max \hat{p}_c$ 、図 3 は、金利プレミアム  $\alpha$  を 0% とし、各設備投資金額の下、資本金  $C$  を変化させた場合の、コモディティ事業の期待最大利益  $\max \hat{p}_c$  をそれぞれ表している。図 2 から、金利プレミアムが小さいほど、コモディティ事業の期待利益は大きく、また設備投資金額が大きくなるにつれてその差も広がっていることが分かる。金利プレミアムが大きいほど、利率が高くなることに加え、設備投資金額が大きくなるほど、借入金額も増えるため、支払利息が増加し、倒産確率も増加する。そのため、

設備投資金額が大きいほど、金利プレミアムの変化による、コモディティ事業の期待利益の差が大きくなる。図3を見ると、コモディティ事業が保有する資本金が多いほど、コモディティ事業の期待利益は大きく、また、その差は設備投資金額が大きくなるにつれて、拡大していることが分かる。設備投資金額が増加するほど、資本金では賄いきれずに、銀行からの借入金額は増加するため、倒産確率、利息負担が増加する。よって、資本金が多いほど、借入金額が少なくてよく、倒産確率も小さくなり、また、支払利息の負担も小さくなるため、コモディティ事業の期待利益は大きくなる。

次に、コモディティ事業のマイナス確率の最小値に対する金利プレミアムおよび資本金の影響について見ていく。図4は、資本金  $C$  を 20000 とし、各設備投資金額の下、金利プレミアム  $\alpha$  を変化させた場合の、コモディティ事業のマイナス確率の最小値、図5は、金利プレミアム  $\alpha$  を 0% とし、各設備投資金額の下、資本金  $C$  を変化させた場合の、コモディティ事業のマイナス確率の最小値をそれぞれ表している。図4、5を見ると、金利プレミアムが大きいほど、また資本金が小さいほど、マイナス確率は大きく、その差は設備投資金額が大きくなるにつれて、広がっている。これらの傾向は先に述べた、最大期待利益  $\max \hat{p}_c$  への影響と整合したものとなっていることから同様に解釈することができる。

さらに、金利プレミアム  $\alpha$ 、資本金  $C$  がもたらす借入金利  $R$  への影響についてそれぞれ見ていく。図6は、資本金  $C$  を 20000 とし、各設備投資金額の下、金利プレミアム  $\alpha$  を変化させた場合の、コモディティ事業の期待利益が最大となる借入金利  $R$ 、図7は、金利プレミアム  $\alpha$  を 0% とし、各設備投資金額の下、資本金  $C$  を変化させた場合の、コモディティ事業の最大期待利益となる借入金利  $R$  をそれぞれ表している。

図6を見ても分かるように、各曲線によって多少違いはあるが、ほぼ金利プレミアム  $\alpha$  の増加分だけ曲線は上にずれている。金利プレミアム  $\alpha$  の増加は借入金利  $R$  の増加でもあるため、各設備投資金額での、金利プレミアム  $\alpha$  の違いによる借入金利  $R$  の差は、

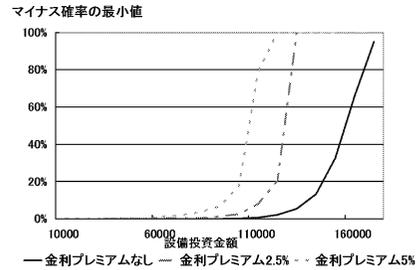


図4 金利プレミアム別コモディティ事業のマイナス確率 ( $C = 20000$ )

Fig. 4 Probability of minus profit on each requested risk premium.

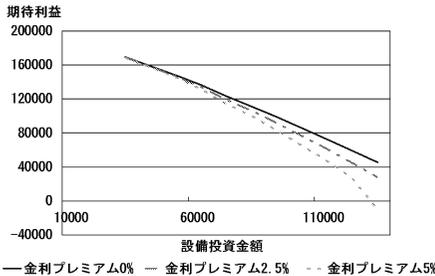


図2 金利プレミアム別コモディティ事業期待利益 ( $C = 20000$ )  
Fig. 2 Requested risk premium sensitivity of expected profit.

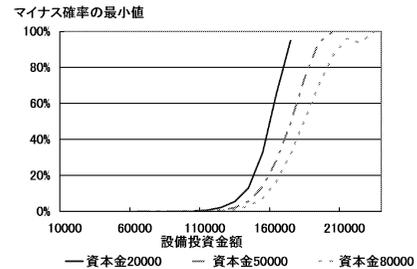


図5 資本金別コモディティ事業のマイナス確率 ( $\alpha = 0\%$ )

Fig. 5 Probability of minus profit on each initial capital.

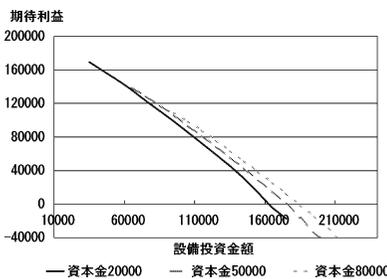


図3 資本金別コモディティ事業期待利益 ( $\alpha = 0\%$ )  
Fig. 3 Initial capital sensitivity of expected profit.

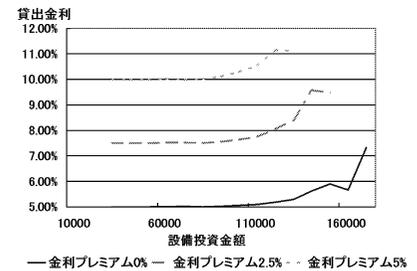


図6 金利プレミアム別借入金利 ( $C = 20000$ )

Fig. 6 Effect of requested risk premium to loan interest rate.

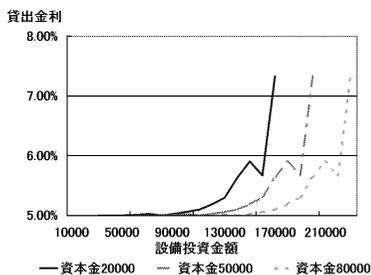


図7 資本金別借入金利 ( $\alpha = 0\%$ )

Fig. 7 Effect of initial capital to loan interest rate.

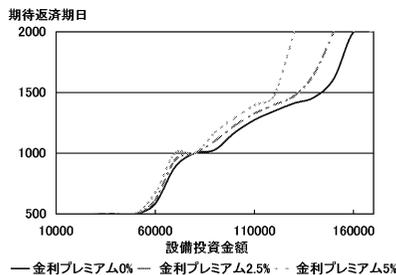


図8 金利プレミアム別期待返済期日 ( $C = 20000$ )

Fig. 8 Requested risk premium sensitivity of expected borrowing terms.

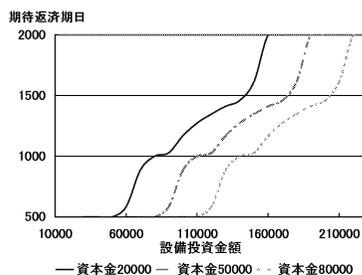


図9 資本金別期待返済期日 ( $\alpha = 0\%$ )

Fig. 9 Initial capital sensitivity of expected borrowing terms.

他の借入形態の要素からも影響を受け、多少のずれはあるものの、金利プレミアム  $\alpha$  の差にほぼ等しい。次に図7を見ると、借入金利は資本金  $C$  が大きいほど、右に平行移動しているのが分かる。本研究では、累積利益のみでの借入返済を設定していることから、コモディティ価格過程の初期値、パラメータを変化させない場合、累積利益は一定であるので、3章に示した借入形態の導出手順からも分かるように、借入形態は借入金額に依存し決定される。よって、資本金  $C$  が大きいほど借入金額は少なくなり、借入金利  $R$  も小さくなる。

図6, 7の各曲線を見ると、設備投資金額が大きくなるにつれて、借入金利  $R$  はほぼ上昇しているが、減少している部分もわずかに見られる。借入金利  $R$  は無裁定条件(3)からも分かるように、銀行の回収金額に依存する。借入金利  $R$  の減少は銀行の回収金額の増加を表しており、1期目の返済期日  $T_1$  が長めに設定されれば、借入期日から1期目返済期日  $T_1$  までのコモディティ事業の累積利益が多くなるので、銀行の回収金額は増加し、借入金利  $R$  は減少する。

最後に、金利プレミアム  $\alpha$ 、資本金  $C$ 、それぞれに対する期待返済期日  $\hat{T}$  の感応度について見ていく。図8は資本金  $C$  を20000とし、各設備投資金額の下、金利プレミアム  $\alpha$  を変化させた場合の、コモディティ事業の最大期待利益  $\max \hat{p}_c$  をとる期待返済期日  $\hat{T}$ 、図9は金利プレミアム  $\alpha$  を0%とし、各設備投資金額の下、資本金  $C$  を変化させた場合の、コモディティ事業の最大期待利益  $\max \hat{p}_c$  をとる期待返済期日  $\hat{T}$  を表している。

図8からは、設備投資金額が小さい場合には、あまり違いはないが、設備投資金額が大きくなるにつれて、金利プレミアム  $\alpha$  が大きいほど、期待返済期日  $\hat{T}$  は長くなっていることが分かる。設備投資金額が小さい場合は、金利プレミアム  $\alpha$  が大きくても、支払利息はあまり負担にはならないが、設備投資金額が大きくなるにつれて、支払利息は徐々に大きくなる。それ

にともなって、コモディティ事業の累積利益が支払利息を含めた返済金額以上に累積されるまでの期間もだんだん長くなり、期待返済期日  $\hat{T}$  も長くなっていく。図9を見ると、資本金  $C$  が大きいほど、期待返済期日  $\hat{T}$  は上に平行移動していることが分かる。期待返済期日  $\hat{T}$  に関しても、借入金利同様、借入金額によって決定されるので、資本金  $C$  が大きいほど、借入金額は小さくなり、期待返済期日  $\hat{T}$  は短くなる。よって、金利プレミアム  $\alpha$ 、資本金  $C$  の制約が厳しいほど、期待返済期日  $\hat{T}$  は長くなっていることが確認できる。

図8, 9では、設備投資金額が大きくなるほど、期待返済期日  $\hat{T}$  は増加しているが、その傾きは期待返済期日  $\hat{T}$  が500, 1000, 1500日後あたりでは小さく、それ以外では大きい。本研究では、1期目の返済期日  $T_1$  を500, 1000, 1500, 2000日後の4通りのみしか想定していないため、期待返済期日  $\hat{T}$  の増加幅にばらつきが出る。たとえば、実際の最適な借入設定が800日後の一括返済である場合、本研究では、1期目の返済期日  $T_1$  を500日後と設定し、500日後と2000日後(2期目の返済期日)の分割返済が最適な借入設定となるため、前者と比べて期待返済期日  $\hat{T}$  は長めに設定されてしまう ( $800 \leq \hat{T} \leq 1000$ )。よって、期待返済期日  $\hat{T}$  が想定した1期目の返済期日  $T_1$  付近でな

い場合の期待返済期日  $\hat{T}$  の増加幅は大きくなり、これは1期目の返済期日  $T_1$  の個数をより多く想定することで改善できる。

4.2.2 コモディティ事業の期待利益を最大化する借入形態

まず、コモディティ事業の最大期待利益  $\max \hat{p}_c$  をとる期待返済期日と、コモディティ事業のマイナス確率が最小値をとる期待返済期日に注目する。図10は金利プレミアム  $\alpha$  が0%、資本金  $C$  が20000でのコモディティ事業の最大期待利益  $\max \hat{p}_c$  をとる期待返済期日と、コモディティ事業のマイナス確率が最小値をとる期待返済期日を表している。図10によると、設備投資金額がそれほど大きくない場合は、マイナス確率が最小となる期待返済期日のほうが、最大期待利益  $\max \hat{p}_c$  をとる期待返済期日よりも長くなっている

が、設備投資金額が大きくなると2つの曲線は一致する。設備投資金額がそれほど大きくない場合、より確実に利益を上げようとする、返済期日を遅めに設定し、倒産確率を小さくしようとする。ただし、この場

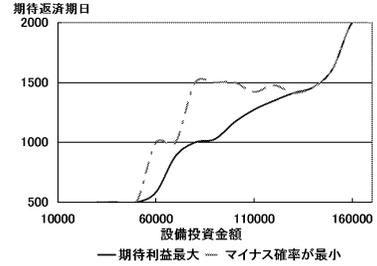


図10 期待返済期日の比較 ( $C = 20000, \alpha = 0\%$ )  
Fig. 10 Expected borrowing terms of two optimal strategies.

表3 最大期待利益と借入形態、期待返済期日 ( $C = 20000, \alpha = 0\%$ )

Table 3 Optimal expected profit, loan structure, expected borrowing terms ( $C = 20000, \alpha = 0\%$ ).

設備投資金額	30000	40000	50000	60000	70000	80000	90000	100000
最大期待利益 $\max \hat{p}_c$	169291	158582	147873	136466	123316	111180	98805	85653
借入金利 $R$ (%)	5.00	5.00	5.00	5.01	5.02	5.03	5.03	5.03
1期目返済期日 $T_1$ (日後)	500	500	500	500	500	1000	1000	1000
1期目返済元金 $G_1$	10000	20000	30000	37759	37151	60000	68065	66500
2期返済元金 $G_2$	0	0	0	2241	12849	0	1935	13500
期待返済期日 $\hat{T}$ (日後)	500	500	500	584	885	1000	1028	1169
設備投資金額	110000	120000	130000	140000	150000	160000	170000	
最大期待利益 $\max \hat{p}_c$	72449	58979	45420	30667	13750	-4125	-17275	
借入金利 $R$ (%)	5.06	5.15	5.21	5.38	5.9	5.67	7.33	
1期目返済期日 $T_1$ (日後)	1000	1000	1000	1000	500	2000	2000	
1期目返済元金 $G_1$	65385	65295	64730	64781	33385	0	0	
2期返済元金 $G_2$	24615	34705	45270	55219	96615	160000	170000	
期待返済期日 $\hat{T}$ (日後)	1274	1347	1412	1460	1615	2000	2000	

表4 最大期待利益と借入形態、期待返済期日 ( $\alpha = 2.5\%, C = 20000$ )

Table 4 Optimal expected profit, loan structure, expected borrowing terms ( $\alpha = 2.5\%, C = 20000$ ).

設備投資金額	30000	40000	50000	60000	70000	80000	90000
最大期待利益 $\max \hat{p}_c$	168918	157836	146754	134101	119055	106147	91649
借入金利 $R$ (%)	7.50	7.50	7.50	7.53	7.52	7.50	7.55
1期目返済期日 $T_1$ (日後)	500	500	500	500	500	1000	1000
1期目返済元金 $G_1$	10000	20000	30000	36970	35205	60000	62951
2期返済元金 $G_2$	0	0	0	3030	14795	0	7049
期待返済期日 $\hat{T}$ (日後)	500	500	500	614	944	1000	1101
設備投資金額	100000	110000	120000	130000	140000	150000	
最大期待利益 $\max \hat{p}_c$	76370	60959	44539	27754	1090	-16074	
借入金利 $R$ (%)	7.64	7.75	8.05	8.42	9.57	9.48	
1期目返済期日 $T_1$ (日後)	1000	1000	1000	1000	1500	2000	
1期目返済元金 $G_1$	61894	60610	60003	58084	83574	0	
2期返済元金 $G_2$	18106	29390	39997	51916	36426	130000	
期待返済期日 $\hat{T}$ (日後)	1226	1327	1400	1472	1652	2000	

表 5 最大期待利益と借入形態，期待返済期日 ( $\alpha = 0\%$ ,  $C = 50000$ )  
 Table 5 Optimal expected profit, loan structure, expected borrowing terms  
 ( $\alpha = 0\%$ ,  $C = 50000$ ).

設備投資金額	60000	70000	80000	90000	100000	110000	120000	130000
最大期待利益 $\max \hat{p}_c$	139291	128582	117873	106466	93316	81180	68805	55657
借入金利 $R$ (%)	5.00	5.00	5.00	5.01	5.02	5	5.03	5.06
1 期目返済期日 $T_1$ (日後)	500	500	500	500	500	1000	1000	1000
1 期目返済元金 $G_1$	10000	20000	30000	37759	37151	60000	68065	66285
2 期返済元金 $G_2$	0	0	0	2241	12849	0	1935	13715
期待返済期日 $\hat{T}$ (日後)	500	500	500	584	885	1000	1028	1169

設備投資金額	140000	150000	160000	170000	180000	190000	200000
最大期待利益 $\max \hat{p}_c$	42449	28979	15355	584	-16250	-34125	-47277
借入金利 $R$ (%)	5.10	5.19	5.31	5.64	5.9	5.67	7.33
1 期目返済期日 $T_1$ (日後)	1000	1000	1000	1000	500	2000	2000
1 期目返済元金 $G_1$	65385	65295	64837	64816	33385	0	0
2 期返済元金 $G_2$	24615	34705	45163	55184	96615	140000	150000
期待返済期日 $\hat{T}$ (日後)	1274	1347	1412	1460	1615	2000	2000

合，利息を多めに払うことになり，期待利益の最大化とマイナス確率の最小化の間にはトレードオフの関係がある．一方，設備投資金額が大きい場合，借入金額も大きく，支払利息の負担が倒産確率に対し，支配的になるので，返済期日を遅めに設定しても，倒産確率は小さくはならない．よって，マイナス確率を最小とする期待返済期日が期待利益を最大化する期待返済期日と等しくなる．

次に，実際のコモディティ事業の最大期待利益  $\max \hat{p}_c$  とそのときの借入形態について分析を行う．表 3 は金利プレミアム  $\alpha$  が 0%，資本金  $C$  が 20000，表 4 は金利プレミアム  $\alpha$  が 2.5%，資本金  $C$  が 20000，表 5 は金利プレミアム  $\alpha$  が 0%，資本金  $C$  が 50000 でのコモディティ事業の最大期待利益  $\max \hat{p}_c$  とそのときの借入形態，期待返済期日  $\hat{T}$  をそれぞれ表している．どの設定においても，設備投資金額が 30000 から 50000 までは 500 日後での一括返済であるが，設備投資金額が増加するにつれて，1 期目の返済期日  $T_1$  が遅くなる，あるいは，2 期目の返済元金割合  $\frac{G_2}{G_1+G_2}$  が大きくなることにより，実質的に，返済期間が長くなっている．図 6，7 でも確認したが，実際に，1 期目の返済期日と 1 期目，2 期目の返済元金割合から算出した期待返済期日  $\hat{T}$  を見ると，設備投資金額が増えるほど，長くなっていることが分かる．つまり，設備投資金額が小さい場合は，実質的に返済期間を短くすることで，支払利息を小さくし，また，設備投資金額が大きい場合は，実質的に返済期間を長くし，倒産する可能性を少なくすることで，コモディティ事業の期待利益の最大化が行われることが確認することができた．

## 5. まとめと今後の課題

本論文では，借入形態に倒産が依存する事業の期待利益を最大化する初期投資額の借入形態を決定するモデルを提案した．モデルでは，コモディティ事業の信用リスクを加味した借入金利を用いたうえでの 2 期返済を考え，自己資本，金利プレミアムの制約も加えた．数値実験では，各制約がコモディティ事業に与える影響，コモディティ事業の各設備投資金額での最大期待利益  $\max \hat{p}_c$  および，そのときの借入形態を確認できた．本論文での結果が事業経営者の起業判断や借入形態の決定に役立つことができれば幸いである．

今後の課題としては，本研究モデルを事業規模の拡大による規模の経済の効果と借入れによる倒産確率の影響を考慮したモデルに拡張することを目標に研究を進めていくことである．

謝辞 貴重なコメントを下された 2 人の査読者には，この場を借りて心からお礼申し上げます．

## 参考文献

- 1) Kluge, D. and Lehrbass, F.: *Default Probabilities in Structured Commodity Finance, Credit Risk*, Physica-Verlag, pp.139-147 (2003).
- 2) Merton, R.C.: On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates, *Journal of Finance*, 2, pp.449-470 (1974).
- 3) Schwartz, E.S.: The Stochastic Behavior of Commodity Price: Implications for Valuation and Hedging, *Journal of Finance*, Vol.52, No.3, pp.923-973 (1997).
- 4) Lehrbass, F.: Rethinking risk-adjusted returns, *RISK*, Vol.12, No.4, pp.35-40 (1999).
- 5) Moody's: Key Credit Risks of Project Fi-

nance, Special Comment (1998).

## 付 録

コモディティ事業の累積利益導出

コモディティ価格過程 (1) を積分することで, コモディティ事業の累積利益 (2) を導出する.

$$X_{0t} = q \int_0^t S_u du = \int_0^t \{ \bar{S} - (\bar{S} - S_0) e^{-ku} \} du + \int_0^t e^{-ku} \left( \int_0^u \sigma e^{kv} dZ(v) \right) du$$

積分順序を交換すると,

$$\begin{aligned} X_{0t} &= \int_0^t \{ \bar{S} - (\bar{S} - S_0) e^{-ku} \} du \\ &\quad + \int_0^t \left( \int_v^t \sigma e^{k(v-u)} du \right) dZ(v) \\ &= \int_0^t \{ \bar{S} - (\bar{S} - S_0) e^{-kv} \} dv \\ &\quad + \frac{\sigma}{k} \int_0^t (1 - e^{-k(t-v)}) dZ(v) \end{aligned}$$

$t - v = u$  とおくと,  $dZ(\cdot)$  は標準ブラウン運動であるから,  $dZ(t - u) = dZ(u)$  であり,

$$\begin{aligned} X_{0t} &= \int_0^t \{ \bar{S} - (\bar{S} - S_0) e^{-ku} \} du \\ &\quad + \frac{\sigma}{k} \int_0^t (1 - e^{-ku}) dZ(u) \\ &= \bar{S}t + \frac{1}{k} (\bar{S} - S_0) (e^{-kt} - 1) \\ &\quad + \frac{\sigma}{k} \int_0^t (1 - e^{-ku}) dZ(u) \end{aligned}$$

(平成 17 年 8 月 19 日受付)

(平成 17 年 9 月 29 日再受付)

(平成 17 年 11 月 11 日採録)



山田 辰徳

昭和 56 年生. 平成 17 年電気通信大学電気通信学部卒業. 同年電気通信大学大学院電気通信学研究科修士課程に入学. 宮崎研究室に所属し, 金融工学を研究. 特に, 信用リスク

の評価に興味を持つ.



宮崎 浩一 (正会員)

昭和 42 年生. 平成 12 年筑波大学大学院経営・政策科学研究科博士課程修了. 博士 (経営学). ゴールドマン・サックス証券会社 (金融戦略部長). 電気通信大学システム工学科専任講師等を経て, 平成 15 年度から電気通信大学システム工学科助教授. 現在に至る. 日本オペレーションズ・リサーチ学会, JAFEE, 日本応用数理学会等各会員.



野村 哲史

昭和 56 年生. 平成 16 年電気通信大学電気通信学部卒業. 同年電気通信大学大学院電気通信学研究科修士課程に入学. 宮崎研究室に所属し, 金融工学を研究. 特に, 派生証券の価格付けに興味を持つ. 日本オペレーションズ・リサーチ学会, JAFEE 各会員.