

ランダム区間グラフによる1次元アドホックネットワークの連結性のモデル化とその閉じた解

能代 愛[†] 栗原 正 仁[†]

本論文では、ランダム区間グラフ (Random Interval Graph: RIG) が連結グラフである確率を解析する。このモデルは、2次元のランダムグラフモデルの1つである固定半径モデル (単位円板グラフ, ランダム幾何グラフともいう) を1次元に縮退したモデルである。これらのランダムグラフは、何らかの確率分布に従ってユークリッド空間上にランダムに配置された n 個の頂点と、互いの距離が R 以内である2頂点間に生成される辺によって構成される。このモデルは、すべての移動端末が距離 R 以内にある他の端末と通信できるアドホックネットワークの自然な数理モデルと考えられている。RIGの連結性に対する結果は、長い道路や河川、ベルトコンベアや陳列棚などの1次元空間として近似できる領域におけるアドホックネットワークの設計に対して有益である。1次元の有限空間内に一定数の頂点が一様分布する条件の下で、区間の両端に必ず頂点が存在するモデル (固定端 RIG) とそうでないモデル (自由端 RIG) の2つのモデルについて、再帰的な積分方程式に基づく陰的な解は、著者らによってすでに示されている。本論文では、固定端 RIG についてラプラス変換を利用して積分方程式の閉じた解を陽に求める。また、自由端 RIG を含む5つの派生モデルを導入し、固定端 RIG の結果を利用してそれらの解析解を示す。特に、ここで示した2つの「中継端モデル」とその解は、アドホックネットワークへの応用において現実的な意義を持っている。

Random Interval Graph Models and Closed Form Solutions for Connectivity of One-dimensional Ad-Hoc Networks

AI NOSHIRO[†] and MASAHITO KURIHARA[†]

We present models and analytical solutions for connectivity of one-dimensional ad-hoc communication networks. The models are based on the random interval graph (RIG), which is the one-dimensional degenerate model of the fixed radius model (also called the unit disk graph or random geometric graph). In the RIG model, a random interval graph consists of a set of the fixed number of nodes placed randomly in a one-dimensional interval according to the uniform probability distribution; each pair of nodes is connected by an edge if and only if the distance between the nodes is within the common distance R (called the radius in non-degenerate cases). The model can be naturally interpreted as a mathematical model of wireless communication networks (called ad-hoc networks) in which every mobile node can communicate with other nodes within the distance R . In this paper, we present analytical results for the probability that the RIGs are connected (i.e., there is a path between every pair of nodes). Related results have been obtained in our previous paper only implicitly in the form of recurrence formula, but the results in this paper are explicit, closed-form solutions to the recursive equations obtained by Laplace transform calculations. Actually, we consider six types of different models: the main model (fixed-end RIG) in which two additional nodes are fixed on both end points of the interval; and five derived models including the free-end RIG (which is usually just called 'RIG' in the literature). In particular, the results for the two models in which the interval is divided into sub-intervals by relay nodes are practically useful in the design of ad-hoc networks.

1. はじめに

ランダムグラフ $G = G(V, E)$ は、何らかのランダムなメカニズムによって生成されるグラフの集合を表

現される。最もよく知られ、広く研究されてきたランダムグラフモデルとして、ベルヌーイモデル (Erdős-Rényi モデル) $G = G(n, p)$ がある。このモデルは、頂点数 n と確率 p を与えられ、各頂点間に確率 p で独立に辺を生成した無向グラフによって表され、すでに多くの理論的な結果が示されている^{1)~3)}。

近年、ランダムグラフモデルの1つである固定半径

[†] 北海道大学大学院情報科学研究科
Graduate School of Information Science and Technology,
Hokkaido University

モデル(単位円板グラフ, ランダム幾何グラフ⁴⁾ともいう) $G = G(n, R)$ が, アドホックネットワークと呼ばれる無線ネットワークと明確な関係があることから注目を集めている. このモデルによって定義されるランダムグラフは, 何らかの確率分布に従ってユークリッド空間上にランダムに配置された n 個の頂点と, 互いの距離が R 以内である 2 頂点間に生成される辺によって構成される. R は半径と呼ばれている. このモデルは, すべての移動端末が半径 R 以内にある他の端末と通信できる無線ネットワークの自然な数理モデルと考えられている. このモデルに関して様々な研究テーマがあるが, 無線ネットワークの応用を想定すると, ランダムグラフが連結グラフである確率, すなわち, 無線ネットワークのすべての端末間に通信経路が存在する確率の解析が最も興味ある課題の 1 つになっている.

本論文では, 2次元のモデルとして定義されている固定半径モデルを 1次元に縮退したモデルであるランダム区間グラフ⁵⁾ (Random Interval Graph: RIG) を解析の対象とする. 特に, 1次元の有限区間内に一定数の頂点が一樣分布する RIG について, そのグラフが連結グラフである確率を求めることを目的とする. その結果は, 1次元空間として近似されるある程度長い道路や河川などの領域において有益である. また, 2次元モデルの特殊な場合としてその解析に対する 1つの知見となりうる.

著者らは, すでに固定端 RIG と自由端 RIG によって定義されるランダムグラフが連結グラフとなる確率を求めて公表している⁶⁾. 前者は, 区間の両端につねに頂点が存在するモデルであり, 後者はその条件を無視したモデルである. しかし, それらの結果は再帰的な積分方程式から導出される漸化式を用いて陰的に表示されているため, 閉じた形式の陽な表示にはなっていない. それに対し, 本論文では, ラプラス変換を利用して積分方程式の閉じた解を求めることにより, 固定端 RIG の連結確率を明示的に求める. 次に, 自由端 RIG を含む 5 つの派生モデルを導入し, 固定端 RIG の結果を利用してそれらの解析解を示す. 特に, ここで示した 2 つの「中継端モデル」とその解は, アドホックネットワークへの応用において現実的な意義を持っている.

本論文の構成は次のようになっている. 2 章では, 固定端 RIG の定義を述べ, それが連結グラフである確率が満たすべき再帰的な積分方程式を示し, その閉じた解を求める. 3 章では, 固定端 RIG から派生する 5 つのモデルとして, 自由端 RIG, リングモデル, 固

定端インフラモデル, 中継端チェーンモデル, 中継端スターモデルを導入し, 固定端 RIG の結果を利用してそれらの連結確率を解析的に示す. 4 章では, 関連研究について概観し, 本論文の特徴を明確にする. 最後に 5 章で, 本研究の成果と今後の課題をまとめる.

2. 固定端 RIG

本章では固定端 RIG の連結確率を解析する. 2.1 節および 2.2 節の内容の多くは文献 6) に基づいているが, 式 (5) で定義されるステップ関数を陽に導入することにより, 式 (14) のたたみこみ積分を導出していることが, 2.3 節における閉じた解の導出を可能にする. なお, 本論文における表現の都合上, 用いる記号は文献 6) と異なっている.

2.1 モデル

長さ t ($t > 0$) の閉区間を $I = [0, t] = \{x | 0 \leq x \leq t\}$ とする. 固定端 RIG では, 区間 I の内部 ($0 < x < t$) に n 個の頂点が一樣分布に従ってランダムに配置され, それに加えて区間の両端にそれぞれ 1 つの頂点が配置される. したがって, グラフ全体の頂点数は $n + 2$ となる. 各頂点の位置 X を一樣分布に従う確率変数とすると, その分布関数として以下の式を得る.

$$\Pr\{X \leq x\} = \frac{x}{t} \quad (0 \leq x \leq t). \quad (1)$$

配置された頂点の位置を左から $X_0, X_1, \dots, X_{n+1}$ とする (図 1). また, X_i の位置にある頂点を X_i という名称で呼ぶことにする.

前章で述べたように, RIG では固定された距離 R 以内にあるすべての 2 頂点間に辺を生成する. 隣り合う 2 つの頂点 X_i と X_{i+1} の頂点間距離を W_i ($i = 0, 1, \dots, n$), また, それらの最大値を W とする.

$$W_i = X_{i+1} - X_i \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (2)$$

$$W = \max\{W_i | 0 \leq i \leq n\}. \quad (3)$$

1次元空間の場合は, すべての隣り合う頂点間に辺が存在するとき (またそのときに限り) そのグラフは

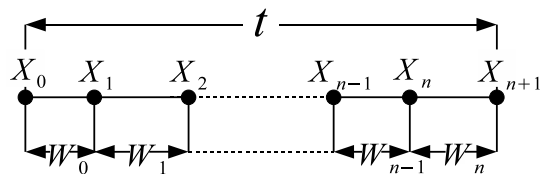


図 1 固定端 RIG
Fig. 1 Fixed-End RIG.

本論文の「固定端」, 「自由端」という言葉は文献 6) ではそれぞれ「固定直径」, 「自由直径」と表現されている.

連結グラフであるので、 $W \leq R$ のときランダムグラフが連結グラフとなるのは明らかである。このとき、頂点 X_0 が頂点 X_{n+1} と接続する確率 $P_n(t)$ は、 $W \leq R$ である確率と等しい。

$$P_n(t) = \Pr\{W \leq R\}. \quad (4)$$

式 (4) の右辺は R をパラメータとする W の分布関数として表されているが、以下では R を固定し、 n と t を可変にして再帰的な関係式を導出するので、左辺のように表記する。

以下の解析では、頂点間距離が w である 2 頂点間に辺が存在する確率を次式のステップ関数 $r(w)$ で表す。

$$r(w) = \begin{cases} 1 & (w \leq R) \\ 0 & (w > R). \end{cases} \quad (5)$$

2.2 再 帰 式

本節では、頂点 X_0 が頂点 X_{n+1} と接続する確率 $P_n(t)$ を満たす再帰式を導出する。まず再帰式の基本となる 2 つの場合について示す。

$n = 0$ のとき、すなわち区間 I の両端にしか頂点が存在しない場合、 $P_0(t)$ が以下ようになるのは自明である。

$$P_0(t) = r(t) = \begin{cases} 1 & (t \leq R) \\ 0 & (t > R). \end{cases} \quad (6)$$

また $n \geq 1$ かつ $t \leq R$ のとき、以下の式が成り立つ。

$$P_n(t) = 1 \quad (t \leq R). \quad (7)$$

一方、 $t > (n+1)R$ のときには、決して連結することはないので、

$$P_n(t) = 0 \quad (t > (n+1)R). \quad (8)$$

次に、 $n \geq 1$ かつ $R < t \leq (n+1)R$ の場合について考える。まず、 X_n の分布関数について考える。 $X_n \leq x$ であることは、 $X_1, \dots, X_n$ の n 個すべての頂点が I の部分区間 $[0, x]$ 内に存在することを意味するので、 X_n の分布関数は以下のように表せる。

$$F_n(x) = \Pr\{X_n \leq x\} = \left(\frac{x}{t}\right)^n. \quad (9)$$

式 (9) を微分することによって、 X_n の確率密度関数 $f_n(x)$ が以下のように求められる。

$$f_n(x) = \frac{nx^{n-1}}{t^n}. \quad (10)$$

$X_n = x$ という条件の下で、 X_0 と X_n が連結である確率は $P_{n-1}(x)$ 、 X_n と X_{n+1} が連結である確率は $P_0(t-x)$ で表される。 $P_0(t-x)$ は X_n と X_{n+1} が辺で結ばれている確率なので、 $P_0(t-x) = r(t-x)$ である。したがって、 X_0 と X_{n+1} が連結である確率

を以下の再帰的な式で表すことができる。

$$P_n(t) = \int_0^t P_{n-1}(x)r(t-x)f_n(x)dx. \quad (11)$$

式 (11) の両辺に $t^n/n!$ をかけると、

$$\frac{t^n}{n!}P_n(t) = \int_0^t P_{n-1}(x)r(t-x)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}dx. \quad (12)$$

ここで、

$$\hat{p}_n(t) = \frac{t^n}{n!}P_n(t) \quad (13)$$

と置き、式 (12) を以下のように書き換える。

$$\hat{p}_n(t) = \int_0^t \hat{p}_{n-1}(x)r(t-x)dx. \quad (14)$$

$\hat{p}_n(t)$ が $\hat{p}_{n-1}(t)$ と $r(t)$ のたたみこみ積分として表されている。この式は、式 (6) (以下で式 (15) に書き換えられる) とともに、 $\hat{p}_n(t)$ が満たす再帰式を形成する。

$$\hat{p}_0(t) = P_0(t) = r(t). \quad (15)$$

文献 6) では、 r の関数値が 0 となる区間を積分区間から除外して、式 (14) のかわりに、

$$\hat{p}_n(t) = \int_{t-R}^t \hat{p}_{n-1}(x)dx. \quad (16)$$

を導いていた。それに対し本論文では、 $r(t)$ を明示的に導入することによってたたみこみ形式の式 (14) を導き、次節で閉じた解の導出に結びつけている。

2.3 閉 じ た 解

この再帰式の閉じた解を求めるために、ラプラス変換を導入して、式 (14) を代数的な演算に置き換える。すなわち、2 つの関数のたたみこみ積分のラプラス変換は、各関数のラプラス変換の代数的な積であることを使うと次の式が得られる。

$$\mathcal{L}[\hat{p}_n(t)] = \mathcal{L}[\hat{p}_{n-1}(t)]\mathcal{L}[r(t)]. \quad (17)$$

ここで、 $\mathcal{L}[\hat{p}_n(t)] = \hat{P}_n(s)$ 、 $\mathcal{L}[r(t)] = R(s)$ とすると、式 (17) より、

$$\begin{aligned} \hat{P}_n(s) &= \hat{P}_{n-1}(s)R(s) \\ &= \hat{P}_{n-2}(s)R(s)^2 \\ &\vdots \\ &= \hat{P}_0(s)R(s)^n. \end{aligned} \quad (18)$$

式 (15) より $\hat{P}_0(s) = R(s)$ なので、

$$\hat{P}_n(s) = R(s)^{n+1}. \quad (19)$$

ラプラス逆変換と式 (13) より、もともと求めたかった $P_n(t)$ が以下のように得られる。

$$P_n(t) = \frac{n!}{t^n} \mathcal{L}^{-1}[R(s)^{n+1}]. \quad (20)$$

$R(s)$ を計算するために、式 (5) の w を t と置き換えた $r(t)$ を単位ステップ関数の差として表現する.

$$r(t) = u_0(t) - u_R(t) \quad (21)$$

ただし,

$$u_c(t) = \begin{cases} 0 & (t < c) \\ 1 & (t \geq c). \end{cases} \quad (22)$$

よく知られた公式を用いると、式 (21) のラプラス変換は、以下のように具体的に求められる.

$$R(s) = \mathcal{L}[r(t)] = \frac{1 - e^{-Rs}}{s}. \quad (23)$$

式 (20) の右辺で $R(s)^{n+1}$ のラプラス逆変換を計算する必要があるため、 $R(s)^{n+1}$ を次のように二項定理を用いて展開する.

$$\begin{aligned} R(s)^{n+1} &= \left(\frac{1 - e^{-Rs}}{s} \right)^{n+1} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-e^{-Rs})^k}{s^{n+1}} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k \frac{e^{-kRs}}{s^{n+1}}. \end{aligned} \quad (24)$$

ラプラス逆変換の線形性より、式 (24) 内の s に関する部分、 e^{-kRs}/s^{n+1} のみを逆変換すればよい。 t^n のラプラス変換が $n!/s^{n+1}$ であり、 s 領域で e^{-as} を掛けることは t 軸上で a だけシフトすることを意味しているため、以下の式を得る.

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-kRs}}{s^{n+1}} \right] = \frac{(t - kR)^n u_{kR}(t)}{n!}. \quad (25)$$

式 (20), (24), (25) より、求めたかった閉じた解が次のように得られる.

$$\begin{aligned} P_n(t) &= \frac{n!}{t^n} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \frac{(t - kR)^n u_{kR}(t)}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} (1 - kz)^n u_{kR}(t). \end{aligned} \quad (26)$$

ただし、 $z = R/t$ である.

2.4 例

$P_n(t)$ が $n = 0, 1, 2$ のときの例を以下に示す.

- $n = 0$

$$P_0(t) = u_0(t) - u_R(t) = r(t).$$

- $n = 1$

$$P_1(t) = u_0(t) - 2(1 - z)u_R(t) + (1 - 2z)u_{2R}(t).$$

$z (= R/t)$ の範囲を 3 つの場合に分けてまとめると、以下の式が得られる.

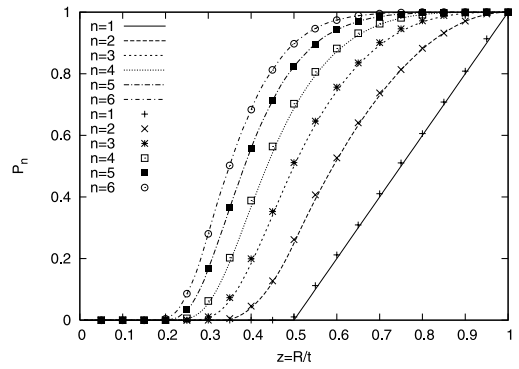


図 2 $P_n(t)$ の計算結果

Fig. 2 The numerical results for $P_n(t)$.

$$P_1(t) = \begin{cases} 1 & (1 \leq z) \\ 2z - 1 & (\frac{1}{2} \leq z < 1) \\ 0 & (0 < z < \frac{1}{2}). \end{cases} \quad (27)$$

- $n = 2$

$$P_2(t) = \begin{cases} 1 & (1 \leq z) \\ -3z^2 + 6z - 2 & (\frac{1}{2} \leq z < 1) \\ 9z^2 - 6z + 1 & (\frac{1}{3} \leq z < \frac{1}{2}) \\ 0 & (0 < z < \frac{1}{3}). \end{cases} \quad (28)$$

式 (27), (28) の $0 < z < 1/(n+1)$ の場合は、式 (8) から自明である.

文献 6) では一般に $P_n(t)$ が次のような性質を持つことを、再帰式の解析結果から証明している.

- (1) $P_n(t)$ は z に関して n 次の区分多項式となる.
- (2) $P_n(t)$ は $n-1$ 階微分まで連続である.
- (3) $P_n(t)$ を構成する多項式の係数および定数項はすべて整数である.

これらは閉じた解を用いると簡明に導出することができる. 特に、(1) と (3) は式 (26) の形から自明である. (2) の導出は自明とはならないが、文献 6) よりも直接的となる.

結果の正当性を実験的に調べるために、モンテカルロ・シミュレーションにより、 $P_n(t)$ の数値解についても求めた. 図 2 に示したように、点で表されている数値解と線で表されている解析解がよく一致している.

3. 固定端 RIG の派生モデル

本章では、固定端 RIG モデルから派生する 5 つのモデルを導入し、それらの連結確率を示す. いずれのモデルも、アドホックネットワークにおける応用を考えた場合に意義のあるモデルである. 固定端 RIG の

解析には再帰式の求解という困難性があったのに対し、各派生モデルの連結確率は、いずれも固定端 RIG の結果を利用した初等的な解析によって得ることができる。

まず、各派生モデルに共通の考え方を述べておく。固定端 RIG では、頂点数と区間長を固定して、連結確率 $P_n(t)$ を導出していた。それを一般化し、 n および t が可変（ランダム）で、その同時確率密度 $g(n, t)$ が与えられた場合には、連結確率は n と t のとりうるすべての組合せに対応する排反事象の確率の総和として

$$\int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty P_n(t) g(n, t) dt \quad (29)$$

で求めることができる。一方が固定で他方が可変のときには、周辺分布を用いてやや簡潔な表現とすることができる。

3.1 自由端 RIG

自由端 RIG は、固定端 RIG の定義から区間 $I = [0, t]$ の両端に頂点が存在するという条件を取り除いたものである。区間の両端に頂点が存在しないので、グラフの頂点数は n 個である。

図 3 のように、頂点の位置を左から右へ $X_1, X_2, \dots, X_n$ とする。また、ここでも X_i の位置にある頂点を X_i という名称で呼ぶことにする。

式 (3) と同様に、 W_i （ただし、 $i = 1, \dots, n-1$ ）の最大値 W を用いて、頂点 X_1 が頂点 X_n と連結する確率 $Q_n(t)$ を以下に定義する。

$$Q_n(t) = \Pr\{W \leq R\} \quad (n \geq 2). \quad (30)$$

通常、単に「ランダム区間グラフ」と呼ばれるモデルは、この自由端 RIG のことをいう。固定端 RIG は、本論文で独自にモデルとして認識し、命名したものである。以下では、自由端 RIG の連結確率は、固定端 RIG の結果から容易に求められることを示す。

自由端 RIG は区間 $[0, t]$ 内に配置された n 個の頂点のうち、最も左と最も右に配置された 2 つの頂点ではさまれた区間 $[X_1, X_n]$ における固定端 RIG と見なすことができる。その場合、頂点数 $n-2$ は固定され、区間長 $X_n - X_1$ は可変である。

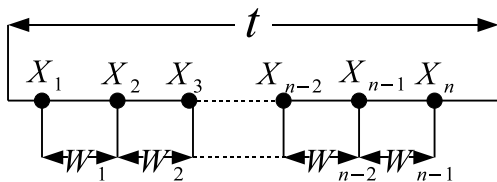


図 3 自由端 RIG
Fig. 3 Free-End RIG.

区間長の確率密度を求めるために、順序統計量⁷⁾の考え方に基いて、 X_1 と X_n の同時確率密度 $f_{1,n}(x, y)$ を求めておく。 $n(n-1)$ は X_1 と X_n に頂点を割り当てる組合せの数、 $f(x)$ 、 $f(y)$ はそれぞれ $X_1 = x$ 、 $X_n = y$ となる確率密度、 $(F(y) - F(x))^{n-2}$ はその他の $n-2$ 個の頂点が区間 $[X_1, X_n]$ に落ちる確率であるから、

$$f_{1,n}(x, y) = n(n-1)f(x)f(y)(F(y)-F(x))^{n-2}. \quad (31)$$

$F(x) = x/t$ 、 $f(x) = 1/t$ より、

$$f_{1,n}(x, y) = \frac{n(n-1)(y-x)^{n-2}}{t^n}. \quad (32)$$

したがって、区間長が l である確率密度は、 $X_1 = x$ のとりうる値ごとの排反事象の和を考えて、

$$\begin{aligned} g(l) &= \int_0^{t-l} f_{1,n}(x, x+l) dx \\ &= \int_0^{t-l} \frac{n(n-1)l^{n-2}}{t^n} dx \\ &= \frac{n(n-1)(t-l)^{n-2}}{t^n} \end{aligned} \quad (33)$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} Q_n(t) &= \int_0^t P_{n-2}(l) g_L(l) dl \\ &= \frac{n(n-1)}{t^n} \int_0^t P_{n-2}(l)(t-l)^{n-2} dl. \end{aligned} \quad (34)$$

ここで、

$$\hat{q}_n(t) = \frac{t^n}{n!} Q_n(t) \quad (35)$$

と定義すると、前節の式 (13) を用いて、

$$\hat{q}_n(t) = \int_0^t (t-l) \hat{p}_{n-2}(l) dl. \quad (36)$$

右辺の積分は、 $\hat{p}_{n-2}(t)$ と t とのたたみこみになっている。閉じた解を得るために、前章と同様にラプラス変換を利用する。すなわち、

$$\mathcal{L}[\hat{q}_n(t)] = \mathcal{L}[\hat{p}_{n-2}(t)] \mathcal{L}[t]. \quad (37)$$

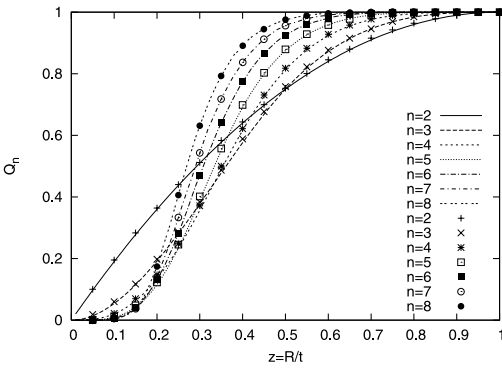
式 (19) を用いて、式 (37) はさらに次のようになる。

$$\mathcal{L}[\hat{q}_n(t)] = \frac{1}{s^2} R(s)^{n-1}. \quad (38)$$

逆変換により、 $Q_n(t)$ は次のように表される。

$$Q_n(t) = \frac{n!}{t^n} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} R(s)^{n-1} \right]. \quad (39)$$

これ以降は、前章の式 (20) 以降の解析と同様な手順で二項定理や式 (25) を再度利用して、次の結果を得る。

図 4 $Q_n(t)$ の計算結果Fig. 4 The numerical results for $Q_n(t)$.

$$\begin{aligned}
 Q_n(t) &= \frac{n!}{t^n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-kRs}}{s^{n+1}} \right] \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (1-kz)^n u_{kR}(t). \quad (40)
 \end{aligned}$$

ただし, $z = R/t$ である.

$n = 2, 3$ のときの $Q_n(t)$ の例を示す.

$$Q_2(t) = \begin{cases} 1 & (1 \leq z) \\ -z^2 + 2z & (0 < z < 1). \end{cases} \quad (41)$$

$$Q_3(t) = \begin{cases} 1 & (1 \leq z) \\ 2z^3 - 6z^2 + 6z - 1 & (\frac{1}{2} \leq z < 1) \\ 6z^3 - 6z^2 & (0 < z < \frac{1}{2}). \end{cases} \quad (42)$$

前章の $P_n(t)$ のときと同様に, モンテカルロ・シミュレーションにより, $Q_n(t)$ の数値解についても求めた. 図 4 に示したように, 点で表されている数値解と線で表されている解析解がよく一致している.

3.2 リングモデル

区間 $[0, t]$ の代わりに長さ t のリング (円周) 上にランダムに $n+1$ 個の頂点を配置するモデルを考える (頂点の位置を座標表示するための原点として特定の 1 個の頂点を固定するので, 頂点配置の自由度は n である). 円周上で隣り合う 2 つの頂点間距離が円周に沿って R 以内であるとき, その 2 頂点は辺で結ばれる. このようにして生成されるランダムグラフの連結確率を求める. このモデルは, 文献 8) において検討されているが, 詳細は 4.1 節で述べる. 本節では, 固定端 RIG の結果を利用して, これまでと同様の方法で閉じた解を導出する.

考察する事象は, 次の 2 つの排反事象に分類できる.

(A) すべての隣り合う頂点間に辺が生成されている

(その結果, グラフはリング状になる).

(B) 隣り合う頂点間の 1 か所 (ギャップ) だけを除いて辺が生成されている (その結果, グラフはチェーン状になり, そのギャップを円周に沿って迂回する経路を形成している).

(A) の事象を考察するために, 原点として選ばれた 1 つの特定の頂点 X_0 においてリングを切断することによって, 円周上の各点を区間 $[0, t]$ 上の各点に (トポロジを保ったまま) 1 対 1 に対応付ける. その区間の両端には, X_0 およびその分身をそれぞれ固定すれば, これは固定端 RIG となるので, この事象の生起確率 $P_n^A(t)$ は式 (26) で求めた $P_n(t)$ と一致する.

(B) の事象は, チェーンの左端の頂点 X_0 が $n+1$ 個の頂点のうちのどれであるかによって, 排反事象に分けられる. X_0 の位置を原点にとって区間 $[0, t]$ を定義する. 残りの n 個の頂点の座標の最大値 X_n の分布は式 (9) および (10) で与えられる. このような事象の生起確率は式 (11) と同様の考え方で求められる. ただし, 式 (11) では X_n と X_{n+1} の間に辺が存在することを要求するために被積分関数内に $r(t-x)$ を含めているが, 事象 (B) では逆に, 辺が存在しないことを要求するために $1-r(t-x)$ を含める必要がある. したがって, 事象 (B) の生起確率は次式によって与えられる.

$$\begin{aligned}
 P_n^B(t) &= (n+1) \int_0^t P_{n-1}(x) [1-r(t-x)] f_n(x) dx \\
 &= (n+1) P_n^{B1}(t) - (n+1) P_n(t). \quad (43)
 \end{aligned}$$

ただし,

$$P_n^{B1}(t) = \int_0^t P_{n-1}(x) f_n(x) dx \quad (44)$$

は, X_n と X_{n+1} の間に辺が存在するか否かは考慮せずに X_0 から X_n までが連結である確率である.

式 (10) を代入し, 両辺を $t^n/n!$ 倍すると,

$$\begin{aligned}
 \frac{t^n P_n^{B1}(t)}{n!} &= \int_0^t \frac{x^{n-1} P_{n-1}(x)}{(n-1)!} dx \\
 &= \int_0^t \hat{p}_{n-1}(x) dx. \quad (45)
 \end{aligned}$$

ただし, $\hat{p}_n(t)$ は式 (13) で定義されたものであり, そのラプラス変換は式 (19) で求められている. 区間 $[0, t]$ にわたる積分は, ラプラス変換では s で除することに対応するので,

$$\mathcal{L} \left[\frac{t^n P_n^{B1}(t)}{n!} \right] = \frac{\hat{P}_{n-1}(s)}{s} = \frac{R(s)^n}{s}. \quad (46)$$

これまでの導出と同様の計算を行うと, 次式を得る.

$$\begin{aligned}
 P_n^{B1}(t) &= \frac{n!}{t^n} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{R(s)^n}{s} \right] \\
 &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (1-kz)^n u_{kR}(t).
 \end{aligned} \tag{47}$$

この結果を用いると、グラフの連結確率 $P_n^{Ring}(t)$ は次式となる．

$$\begin{aligned}
 P_n^{Ring}(t) &= P_n^A(t) + P_n^B(t) \\
 &= P_n(t) + (n+1)P_n^{B1}(t) - (n+1)P_n(t) \\
 &= (n+1)P_n^{B1}(t) - nP_n(t).
 \end{aligned} \tag{48}$$

3.3 固定端インフラモデル

固定端 RIG モデルの設定に加えて、区間の両端の固定頂点 X_0 と X_{n+1} の間を事前に直接的に辺で接続しておくモデルを考え、固定端インフラモデルと呼ぶ．アドホックネットワークの応用においては、両端の固定端末が有線のインフラ設備によってつねに通信可能に設定されている場合に相当する．したがって、 n 個の各移動端末がいずれか一方の固定端末とだけ通信可能であるときにも、全端末が互いに通信可能となる．これは、区間内に長さ R を超えるギャップがただか 1 つまでは許されることを意味する．

このモデルにおいて、 n 個の移動端末が互いに通信可能である確率を求める．この事象は、次の 2 つの排反事象に分類できる．

- (A) インフラ端末を含む全端末が互いに通信可能である．
- (B) n 個の移動端末は互いに通信可能であるが、インフラ端末だけが孤立している．

事象 (A) は 3.2 節で述べた対応関係により、リング上に配置される $n+1$ 個の頂点のうちの特定の 1 つをインフラ端末とし、そこでリングを切断することにより、リングモデルと関連付けられる．その場合、事象 (A) の生起確率はリングモデルの連結確率 $P_n^{Ring}(t)$ と一致する．

事象 (B) は、 n 個の移動端末の配置を区間 $[R, t-R]$ に制限した自由端 RIG モデルと解釈することができる．その生起確率は式 (40) を利用して、

$$\begin{aligned}
 Q_n^{Isolate}(t) &= \left(\frac{t-2R}{t} \right)^n Q_n(t-2R) \\
 &= (1-2z)^n Q_n(t-2R)
 \end{aligned} \tag{49}$$

と求められる．ただし、 $z = R/t$ である．したがって、求めたかった確率は両事象の生起確率の和として次式のように得られる．

$$P_n^{Infra}(t) = P_n^{Ring}(t) + Q_n^{Isolate}(t). \tag{50}$$

3.4 中継端チェーンモデル

区間 $[0, t]$ の両端、さらにその内部に区間を m 個の小区間に分割する $m-1$ 個の固定された頂点を配置し、区間全体に n 個の頂点を一様分布に従って分布させるモデルについて考える．これは n 個の移動端末と $m+1$ 個の固定中継端末が区間 $[0, t]$ 上に存在するアドホックネットワークモデルと考えることができる．実際にアドホックネットワークを運用するうえでは、移動端末のみからなるネットワークの接続は不安定であり、あらかじめ固定中継端末を配置したネットワークの形態が考えられている．

このモデルは m 個の固定端 RIG を連結したものと見なすことができる．その場合、各小区間の長さ $l_1, \dots, l_m$ は固定であるが、頂点数 $n_1, \dots, n_m$ は可変なので、その同時分布

$$\begin{aligned}
 g(n_1, \dots, n_m) &= \binom{n}{n_1 \dots n_m} \left(\frac{l_1}{t} \right)^{n_1} \cdots \left(\frac{l_m}{t} \right)^{n_m} \\
 &= \frac{1}{t^n} \binom{n}{n_1 \dots n_m} l_1^{n_1} \cdots l_m^{n_m}
 \end{aligned} \tag{51}$$

を考慮する必要がある．ただし、

$$\binom{n}{n_1 \dots n_m} = \frac{n!}{n_1! \cdots n_m!} \tag{52}$$

は多項係数を表す．

これを用いると、連結確率は次式で与えられる．

$$\begin{aligned}
 P_{n,m}(t; l_1, \dots, l_m) &= \sum_{n_1 + \dots + n_m = n} P_{n_1}(l_1) \cdots P_{n_m}(l_m) g(n_1, \dots, n_m).
 \end{aligned} \tag{53}$$

ただし、右辺の和は、 $n_1 + \dots + n_m = n$ を満たすすべての非負整数 $n_1, \dots, n_m$ にわたっての和を表す．

3.5 中継端スターモデル

3.4 節の固定中継端を 3.3 節のインフラ端末と見なしたものを中継端スターモデルと呼ぶ．すなわち、区間の両端の 2 つの固定端末、および区間を m 個の小区間に分割する $m-1$ 個の中継端末は、有線のインフラ設備によって互いに通信可能に設定されている．これら $m+1$ 個の端末をインフラ端末と呼ぶ．したがって、 n 個の各移動端末がいずれかのインフラ端末と通信可能であれば、全端末が通信可能となる．この場合、 n 個の移動端末間の通信経路は、一般に、(最悪の場合には各小区間に R より大きなギャップが 1 つずつあるので) インフラを中心として星型に形成される．そのほかに特殊ケースとして、 n 個の全移動端

末が 1 つの小区間に集中し、インフラを経由せずに互いに通信可能な場合がある。

各小区間の長さを $l_1, \dots, l_m$ とし、3.4 節で求めた同時分布 $g(n_1, \dots, n_m)$ および 3.3 節の事象 (A), (B) の結果を利用すると、 n 個の移動端末が互いに通信可能である確率は次式のように得られる。

$$\begin{aligned} P_{n,m}^*(t; l_1, \dots, l_m) \\ = \sum_{n_1 + \dots + n_m = n} P_{n_1}^{Ring}(l_1) \cdots P_{n_m}^{Ring}(l_m) g(n_1, \dots, n_m) \\ + \sum_{i=1}^m \left(\frac{l_i}{t} \right)^n Q_n^{Isolate}(l_i). \end{aligned} \quad (54)$$

4. 関連研究

4.1 Godehardt らの関連研究

著者らは、情報通信分野におけるアドホックネットワークの 1 次元縮退モデルとして本研究を進めてきたが、その過程において、そのような数理モデルを専門的に扱うランダムグラフの分野で研究されていた「ランダム区間グラフ」との関連に気が付いた(本論文のタイトルにはそれを反映させている)。特に、Godehardt ら⁵⁾の研究は、一部、本論文の結果を包含している。以下ではその研究を概観し、本論文との違いを明確にする。

彼らの論文で唯一の考察対象として「ランダム区間グラフ」(RIG)と呼んでいるモデルは「自由端 RIG」のことである。本論文と強く関連する重要部分は、「固定端 RIG」に関連した確率事象を解析した補題 1 と、「自由端 RIG」について本論文と同じ解析結果の導出につながる補題 2 である。以下に述べるように、その解析手法は本論文と大きく異なっている。

まず、補題 1 においては、考察対象の区間 $[0, 1]$ 中の部分区間 $[x, x+y]$ を考え、与えられた k 個の頂点のうち 2 つがその両端に配置されている条件の下で、 $[0, 1]$ 内に一様分布する残りの $k-2$ 個の頂点が $[x, x+y]$ 内に配置され、かつ、それら k 個の頂点が連結となる事象 $A_{k,y}$ の確率 $P(k, y)$ を求めている。その導出は、次の再帰式を基礎としている。

$$\begin{aligned} P(k, y) \\ = yP(k-1, y) + ((k-1)R-y)P(k-1, y-R). \end{aligned}$$

右辺の第 1 項は、頂点を $k-3$ 個配置した時点で全体の $k-1$ 個が連結され、かつ、残りの 1 個が $[x, x+y]$ 内に配置される事象の確率である。第 2 項を導くには確率論的な洞察が必要となる。頂点を $k-3$ 個配置した時点で全体の $k-1$ 個が連結されていないときは、それらによって $[x, x+y]$ を $k-2$ 個の部分区間に分

割すると、そのうち $k-3$ 個の部分区間は R より小さく、残りの 1 つの部分区間は R 以上 $2R$ 以下である必要がある。それは、その最大部分区間から R の長さの区間を除去して R 以下の長さに短縮した区間における事象 $A_{k-1, y-R}$ として解釈できる。その事象が起きた後、 $k-2$ 個の部分区間のいずれかを R だけ長く拡大して元に戻し、そこに第 k 個目の頂点が追加配置される事象を考察する確率論的な議論を進めると、その生起確率が $(k-1)R-y$ であることが示される。

こうして再帰式を示した後、天下り的に示した

$$\begin{aligned} P(k, y) \\ = \sum_{j=0}^{\min\{k-1, \lfloor y/R \rfloor\}} \binom{k-1}{j} (-1)^j (y-jR)^{k-2} \end{aligned}$$

が解であることは容易にチェックできるとして証明を完結している。

この補題では $k-2$ 個の頂点が $[x, x+y]$ に配置される確率も含めて $P(k, y)$ を求めているのに対し、本論文の固定端 RIG モデルでは頂点数 n が given である点のみが異なるので、両者は $P(k, y) = y^{k-2} P_{k-2}(y)$ という式で関係付けられる。

続く補題 2 においては、与えられた k 個の頂点が連結であることに加えて、それらの頂点で作られる部分区間に他の $n-k$ 個の頂点が 1 つも存在しないような k 頂点からなる部分グラフを完全結合グラフと呼び、与えられた k 個の頂点が、長さが u より短い完全結合グラフを形成する確率 $Q(k, u)$ を求める式を、補題 1 を利用して

$$\begin{aligned} Q(k, u) \\ = (k-1) \int_0^u \int_0^{1-y} dx P(k, y) (1-y)^{n-k} dy \end{aligned}$$

として得ている。この積分の考え方は本論文における自由端 RIG の解析と似ている。

その後、この式を変形し、ガンマ関数を用いて積分結果を表現し、非負整数 m に対して $\Gamma(m+1) = m!$ であることを用いて最終結果を得るのだが、以下では、自由端 RIG に相当する結果を直接出すために、 $k = n$ 、 $u = 1$ としたやや簡単な特殊ケースとして

$$Q(n) = n(n-1) \int_0^1 P(n, y) (1-y) dy$$

の計算の概略を論文の導出過程に沿って述べる。

まず、 $P(n, y)$ に補題 1 の結果を代入し、積分区間を長さ R ごとに部分区間に分割する。

$$\frac{Q(n)}{n(n-1)} = \sum_{i=0}^{\lfloor 1/R \rfloor - 1} \int_{iR}^{(i+1)R} \sum_{j=0}^M T_j^{n-2}(y) (i-y) dy$$

$$+ \int_{\lfloor 1/R \rfloor R}^1 \sum_{j=0}^M T_j^{n-2}(y)(1-y)dy.$$

ただし,

$$T_j^n(y) = \binom{n-1}{j} (-1)^j (y - jR)^n.$$

また, $M = \min\{i, n-1\}$ である. ここで和や積分の順序を入れ換えて数ステップにわたって式の変形を進め,

$$\frac{Q(n)}{n(n-1)} = \sum_{j=0}^{\min\{n-1, \lfloor 1/R \rfloor\}} T_j^n(1) \int_0^1 z^{n-2} (1-z) dz$$

まで簡便化した後に具体的に積分を計算して最終結果を得る. 本論文の結果とは, $Q(n) = Q_n(1)$ という関係式で結ばれる.

このように, 文献 5) の解法と本論文の解法は大きく異なるものである. それぞれの特徴を簡潔に述べると, 前者は確率論的にやや深い洞察によって初等的な (積分を含まない) 再帰式を導出する部分が中心的なアイデアであり, その後の計算は (やや煩雑ではあるが) 直接的である. 後者は確率論的に初等的な考察によってやや複雑な (積分を含む) 再帰式を導出しており, その解をラプラス変換の領域を経由して得ている.

どちらが好ましいかは, 読者の背景知識と主観に依存するものであり, ここでは論じない. いずれにせよ, 異なるアプローチによる複数の解法が存在することは, その証明過程を通じてモデルのより深い理解につながるもので, 歓迎すべきことである. 特に, 本論文の導出手法の場合, 著者らのように通信ネットワークに興味を持つ電気系の分野において, 確率論的に深い洞察よりはラプラス変換の計算のほうにより高い可読性を感じる技術者・研究者から歓迎されるものと考えている.

なお, リングモデルは, 文献 5) の序論でも述べられているように, 文献 8) において前原によって検討されており, RIG との関連が知られている. 前原は, $(n+1)R < 1$, すなわち, $n+1$ 個の全頂点を長さ 1 の円周上でリング状に連結することが不可能なパラメータ設定のとき, 全頂点が (チェーン状に) 連結される確率は $(n+1)!R^n$ であることを示している. これは, 3.2 節で示した本論文との関係でいえば, 次の式が成立することを意味している.

$$P_n^{B1}(1) = n!R^n.$$

ただし, $(n+1)R < 1$ である. 実際, この式は二項係数の交代和に関する性質

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k k^j \binom{n}{k} = \begin{cases} 0 & (0 \leq j < n) \\ (-1)^n n! & (j = n). \end{cases}$$

を利用して代数的にも確かめることができる. Godehardt らは上記序論において, 彼らの手法によって前原のモデルも解析できることを示唆しているが, 具体的な結果は示していない.

以上が本論文と文献 5) で (導出過程は異なりながらも) 共通に得られた結果に対する考察である. しかし, 2 つの論文では, 共通の問題に対する共通の結果よりも, 異なる問題に対する異なる結果のほうが多い. まず, 文献 5) では, その冒頭に述べられているように, その研究の主要な動機はクラスタ分析にある. ランダムグラフの性質を事前に研究しておけば, 多次元データの集合を複数のクラスタに分割したときに, その個数やサイズに基づく統計量を利用して, データのランダム性を検定することができる. ランダム区間グラフは, 多次元データを 1 つの軸の上に射影して得られる縮退モデルであると位置付けている. そのため, 論文の後半ではそのような応用目的に合致した解析結果を求めている. それ以外の応用についても言及しているが, 論文が公表された 1996 年当時の時代背景もあり, アドホックネットワークについては語られていない.

それに対し, 本論文は研究当初からアドホックネットワークへの応用を前提としている. 通常, ネットワークは 2 次元の空間配置を持つが, その閉じた解析解は得られていない. 本論文ではそれを 1 次元に縮退したいいくつかのモデルを考察して解を得ているが, 1 次元で近似されるある程度長い道路や河川, ベルトコンベア, 商品の陳列棚などの上に, 無線 IC タグを添付された物体がランダムに配置されるようなアドホックネットワークシステムの設計に有用な知見を提供している. 特に, 中継端を導入した応用上も現実味のある 2 つのモデルの解析は, 他の文献には例がなく, 本論文で初めて結果を示したものである.

以上をまとめると, 文献 5) は本論文が自由端 RIG モデルと呼んでいる単一のモデルに興味の対象とし, クラスタ分析に有用な多様な解析結果を求めている点に特徴がある. それに対して本論文は, 固定端 RIG モデルを (補題ではなく) 基本的な「モデル」として認識することからスタートし, それをビルディングブロックとして, 1 次元で近似可能な領域におけるアドホックネットワークの設計上, 新規かつ有用な派生モデルとその解を提示している点に特徴がある.

4.2 その他の関連研究

ポアソンモデル $G = G(\lambda, R)$ に関する興味深い解析結果が報告されている^{9),10)}。このモデルは、半径 R 以内の 2 頂点間に辺を生成する点で固定半径モデルまたは RIG と同じだが、頂点が強度 λ のポアソン点過程に従ってランダムに配置される点で異なっている。この場合、頂点数はパラメータ λ のポアソン分布に従った確率変数となる。特に 1 次元空間では、隣り合う頂点間の距離が平均 $1/\lambda$ の指数分布に従う確率変数として陽に与えられるので、モデルの解析が容易となっている。

アドホックネットワークへの応用を想定した 1 次元空間に頂点が一様分布する RIG の連結性の閉じた近似解に関する研究も報告されている¹¹⁾。この文献では、隣り合う頂点間距離を確率変数として、区間内に n 個の頂点がランダムに配置された固定端 RIG の連結確率を求めているが、いくつかの近似を用いることで閉じた解を求めているため、正確な結果ではなく、近似精度も粗いように思われる。

空間が 2 次元となると、一般に理論解析は困難であり、モンテカルロ・シミュレーションによる統計学的な解析がなされている¹²⁾。頂点が 2 次元空間に一様分布するモデルの解析解として文献 13) が知られているが、これはポアソンモデルの結果を用いた近似解となっている。

5. おわりに

本論文では、固定端 RIG によって定義されるランダムグラフが連結グラフである確率の閉じた解を、ラプラス変換を利用することにより求めた。さらに固定端 RIG から派生する 5 つのモデルを導入し、固定端 RIG の結果を利用してそれらの連結確率を解析的に示した。一部の結果は他の文献の結果に包含されるものの、電気通信系の技術者・研究者には可読性の高い導出過程となっているものと考えている。

派生モデルのうち、「中継端」を導入した 2 つのモデルに対する解は本論文が初めて示したものであり、アドホックネットワークの現実的なシステム構成を反映して有用である。実際のシステムでは、都市などの 2 次元的な広がりを持つ領域においては、ネットワークは密に構成されることが多い。むしろ、米国における都市間を結ぶ（インターシティ）高速道路のような 1 次元として近似可能な領域の方が、連結性のボトルネックとなる可能性があるので、本論文の結果はきわめて有用な知見を提供しているものと考えられる。

今後の課題として、頂点が移動携帯端末のように 1

次元空間内を移動するときのモデル化とその解析や、本研究の成果を利用することによって、2 次元モデルの連結性の近似解を求めることが考えられる。文献 14)、15) では、無線ネットワークに関連するランダムグラフにおける相転移現象について議論されているが、特に、中継端を考慮した複雑なモデルにおいて、本論文で求められた閉じた解を利用することによってそのような議論をさらに深められるか否か、その可能性も興味深い。

参考文献

- 1) Bollobás, B.: *Random Graphs*, 2nd edition, Cambridge University Press (2001).
- 2) Frieze, A. and Luczak, T. (Eds.): *Random Graphs: Volume 2*, Wiley Interscience (1992).
- 3) Spencer, J.: *The Strange Logic of Random Graphs*, Springer Verlag (2001).
- 4) Penrose, M.: *Random Geometric Graphs*, Oxford University Press (2003).
- 5) Godehardt, E. and Jaworski, J.: On the Connectivity of a Random Interval Graph, *Random Structures and Algorithms*, Vol.9, pp.137–161 (1996).
- 6) 能代 愛, 吉川 毅, 栗原正仁: 1 次元空間における固定半径ランダムグラフの連結性の理論解析, 情報処理学会論文誌: 数理モデル化と応用, Vol.46, pp.93–102 (2005).
- 7) 竹村彰通: 現代数理統計学, 創文社 (1991).
- 8) Maehara, H.: On the intersection graph of random arcs on the cycle, *Random Graphs '87*, pp.159–173 (1990).
- 9) Dousse, O., Thiran, P. and Hasler, M.: Connectivity in ad-hoc and hybrid networks, *Proc. Infocom 2002: The 21st Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies* (2002).
- 10) Cheng, Y. and Robertazzi, T.: Critical Connectivity Phenomena in Multihop Radio Models, *IEEE Trans. Communications*, Vol.37, pp.770–777 (1989).
- 11) Foh, C. and Lee, B.: A Closed Form Network Connectivity Formula for One-Dimensional MANETs, *Proc. IEEE International Conference on Communications 2004*, pp.3739–3742 (2004).
- 12) Santi, P. and Blough, D.: An Evaluation of Connectivity in Mobile Wireless Ad Hoc Networks, *Proc. Dependable Systems and Networks (DSN'02)*, pp.89–98, IEEE Computer Society Press, Washington D.C. (2002).
- 13) Gupta, P. and Kumar, P.: Critical Power for Asymptotic Connectivity in Wireless Net-

works, *Stochastic Analysis, Control, Optimization and Applications*, pp.547–566 (1998).

- 14) Krishnamachari, B., Wicker, S. and Béjar, R.: Phase Transition Phenomena in Wireless Ad-Hoc Networks, *Proc. GlobeCom 2001: IEEE Global Communications Conference* (2001).
- 15) Frank, J. and Martel, C.: Phase Transition in the Properties of Random Graphs, *Proc. CP'95: 1st International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming, Lecture Notes in Computer Science 976*, pp.62–69 (1995).

(平成 18 年 4 月 28 日受付)

(平成 18 年 6 月 15 日再受付)

(平成 18 年 7 月 19 日採録)



能代 愛 (学生会員)

1981 年生。2003 年北海道大学工学部情報工学科卒業。2005 年同大学院工学研究科システム情報工学専攻修士課程修了。現在、同大学院情報科学研究科博士後期課程在学中。数理情報科学の研究に従事。電子情報通信学会学生会員。



栗原 正仁 (正会員)

1955 年生。1978 年北海道大学工学部電気工学科卒業。1980 年同大学院工学研究科情報工学専攻修士課程修了。現在、同大学院情報科学研究科複合情報学専攻教授。工学博士。人工知能およびソフトウェア科学における数理モデル等の研究に従事。電子情報通信学会，人工知能学会，日本ソフトウェア科学会，日本知能情報ファジィ学会，米国人工知能学会各会員。