

# 特異値分解を用いた空の色の高速表示法

柳田 哲一<sup>†</sup> 岩崎 慶<sup>†</sup> 土橋 宜典<sup>‡</sup> 西田 友是<sup>†</sup>

<sup>†</sup> 東京大学 <sup>‡</sup> 北海道大学

## 1. はじめに

CGの分野において自然景観の可視化は重要な分野の一つであり、空の色（天空光）は重要な要素の一つとしてこれまで研究されてきた[1,2,3]。

天空光の計算は大気中の微粒子による太陽光の多重散乱を考慮する必要があるが、この計算はコストが高く、フライトシミュレータのように視界や視点の高度が逐次変わるものへの適用は困難である。先行研究においても、Preethamらの手法[3]は計算に時間がかかるためリアルタイムには適さず、土橋らの手法[2]では視点の高度が変化した際の空の色の変化に対応していない。また、各方向、高度における輝度値をあらかじめ計算しておき、それらを補間することで様々な方向、高度での輝度値を算出するとしても膨大なデータ量を必要とする。そこで本研究では、データ量の圧縮法のひとつである特異値分解を用いてデータ量の圧縮と天空光計算の高速化を図った。

## 2. 概要

我々が普段見ている空の色というのは、大気中の構成成分によって散乱した散乱光の色である。

特に空の青色の主な要因となっているレイリー散乱においては、一次散乱に加えて二次散乱も重要な要素であり、太陽からの平行光線のみを考えればよい一次散乱に比べてあらゆる方向からの一次散乱光に対する散乱を考慮する二次散乱の計算は非常に複雑かつコストの高いものとなる。

本研究では、大気中の微粒子による多重散乱を考慮した天空光を、離散化した視線方向において前処理の段階で計算しテーブルに保存しておく。

天空光の輝度値は視線方向（方位角・仰角）、太陽高度、視点高度の4変数からなる4次元関数で表される。一方、特異値分解を用いると、4次元関数を2次元関数の演算に分解することができる。そこで、この輝度値を特異値分解によって視線方向（方位角・仰角）と高度（視点・太陽）のテーブルに分解する。そして視点高度や太陽高度が変化した際には、コストの高い散乱計算を行わずに、テーブル同士の簡単な演算で変化後の輝度計算を行う。

## 3. 多重散乱を考慮した天空光の計算

本研究における多重散乱の計算手法については[5]にて詳解している。本節では計算手法の概要と特異値分解に対応した部分について述べる。

### 3. 1 一次散乱

大気中のある点  $P_k$  から視点に向かう一次散乱光は次式のように表される。

$$I_{sky}(\theta, \phi, \lambda) = I_{sun}(\lambda) \int_0^T (\beta_r(\alpha, \lambda) \rho_r(t) + \beta_m(\alpha, \lambda) \rho_m(t)) \times \exp(-(\tau_r(s, \lambda) + \tau_m(s, \lambda))) \times \exp(-(\tau_r(t, \lambda) + \tau_m(t, \lambda))) dt \quad (1)$$

ここで  $\theta, \phi$  は視線方向の方位角と仰角、 $\lambda$  は光の波長、 $T$  は視線と大気の境界の交点を  $P$  とした時の、視点と  $P$  との距離であり  $\beta_r, \beta_m, \tau_r, \tau_m$  はレイリー散乱、ミー散乱における位相関数と光学的距離である。また  $\rho_r$  と  $\rho_m$  は空気分子の密度とエアロゾルの密度、 $t$  は視点と視線上の点  $P_k$  の距離、 $s$  は太陽光と大気の境界の交点  $P_s$  と  $P_k$  の距離である。

(図1参照)

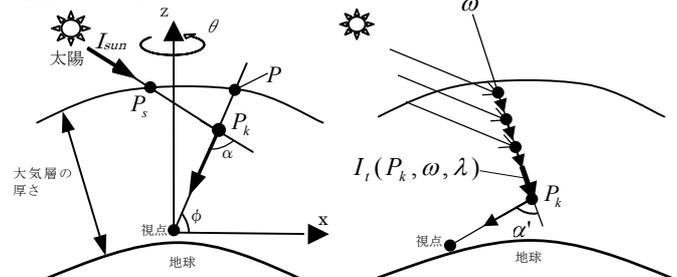


図1: 一次散乱の計算

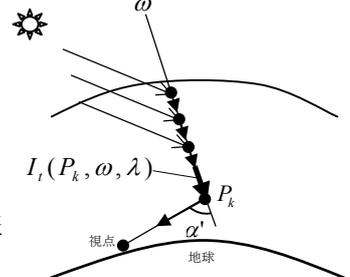


図2: 二次散乱の計算

### 3. 2 多重散乱

点  $P_k$  から視点に向かう二次散乱光は、ある方向  $\omega$  から点  $P_k$  に到達する一次散乱光の合計  $I_t(P_k, \omega, \lambda)$  を用いて(2)式で表される(図2参照)。 $\rho(P_k)$  は点  $P_k$  における空気分子の密度である。

$$I_s^{(2)}(P_k, \lambda) = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \beta_r(\alpha') \rho(P_k) I_t(P_k, \omega, \lambda) d\omega \quad (2)$$

### 3. 3 天空光マップ

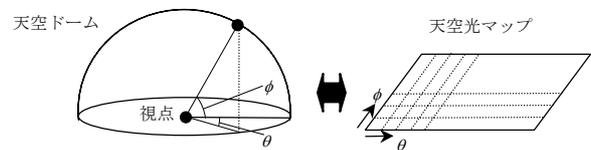


図3: 天空ドームと天空光マップ

上述の計算を離散化した視線方向において行い、 $\theta, \phi$  からなる2次元テーブル（天空光マップ）に輝度値を保存する。一方、視点を中心とした半球ドーム（天空ドーム）を用意し、対応する座標に輝度値を与えることによって天空を描画する。

## 4. 特異値分解による高速計算法

### 4. 1 特異値分解

ある行列  $M$  に対し、 $M$  の特異値分解は  $M=USV^T$  となる。このとき  $S$  は特異値が対角成分

に降べき順に並んだものであり、十分に小さい特異値は切り捨てることで行列  $M$  を  $U$  と  $V$  の列ベクトルで近似することができる。また、この特異値分解を用いて以下のように 4 つの要素  $x_i, y_i, x_o, y_o$  からなる 4 次元関数  $f$  をある 2 次元関数  $s$  と  $t$  の積の和に分解できる。ここで  $T$  は特異値を打ち切る個数である ([4]参照)。

$$f(x_i, y_i, x_o, y_o) \approx \sum_{k=1}^T s_k(x_i, y_i) t_k(x_o, y_o) \quad (3)$$

#### 4. 2 空の色の輝度計算への適用

1節で述べたように天空光の輝度は視線方向・視点高度・太陽高度の4変数によって決まる。太陽が仰角  $\phi_{sun}$  の位置にある時に、ある視点(高度  $h$ ) から  $(\theta, \phi)$  方向を見たときの天空光の輝度は4次元関数  $I(h, \phi_{sun}, \theta, \phi)$  で表される。

これを特異値分解を用いて以下のような 2 次元関数の積の和に分解する。ここで  $L$  は(3)式同様特異値を打ち切る個数である。

$$I(h, \phi_{sun}, \theta, \phi) \approx \sum_{k=1}^L s_k(h, \phi_{sun}) t_k(\theta, \phi) \quad (4)$$

実際には本研究では分解後は 2 次元関数ではなくテーブルを扱う。図 4 は以下の説明のイメージ図である。視点高度および太陽高度をそれぞれ  $N$  分割、 $M$  分割し、各視線方向  $(\theta, \phi)$  において  $N \times M$  個の輝度値を計算する。作成された輝度値のデータ行列を特異値分解によって、2つの 2 次元テーブルに分解する。ここまですを前処理の段階で行う。この時 2 次元テーブルのひとつ  $t_k(\theta, \phi)$  は上述の天空光マップに類似したものになっており、視点高度および太陽高度が変化した際には、もうひとつのテーブル  $s_k(h, \phi_{sun})$  において値を補間し、 $t_k(\theta, \phi)$  と掛け合わせることで輝度分布の計算を高速に行うことができる。

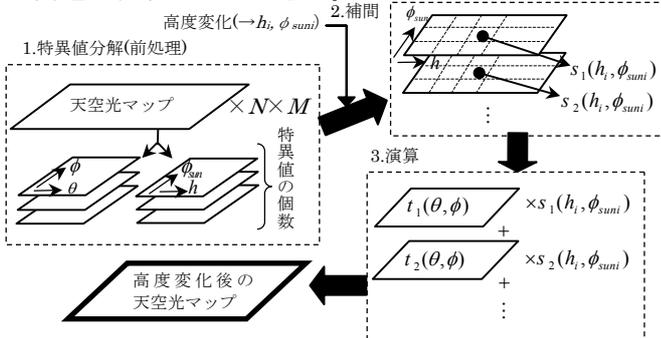


図 4: 天空光マップと特異値分解

### 5. 誤差評価

#### 5. 1 特異値分解による誤差

特異値分解自体による誤差は用いる特異値の個数による。本研究では 8 ビットの色表現において差が出なくなる  $\varepsilon = 1/255$  を閾値とし、分解前の

輝度値  $I_{before}$  と分解後の輝度値  $I_{after}$  において  $|I_{before} - I_{after}| < \varepsilon$  となる特異値の個数を十分な値として用いた。太陽近辺や水平線上など視線方向によって十分な特異値個数は異なり、10~25 個程度であった。

#### 5. 2 高度分割数の評価

視点高度、太陽高度の分割数については実験の結果、視点高度の分割数は 32、太陽高度は 128 分割が最適であった。

### 6. 結果

本研究では、天空光マップの  $(\theta, \phi)$  方向の分割数を  $64 \times 64$ 、視点高度および太陽高度のサンプル数をそれぞれ 32、128 とした。特異値分解により 32MB からなるデータを 800KB 程度 (約 1.2%) まで圧縮することができた。

提案法によって生成した画像を以下に示す。左は視点高度 7000m、太陽高度 (仰角) 20 度、右は視点高度 2000m、太陽高度 5 度でのコクピットからの画像である。描画時間は Pentium 4 2.2GHz、GeForce 4 搭載の PC で約 50fps であった。

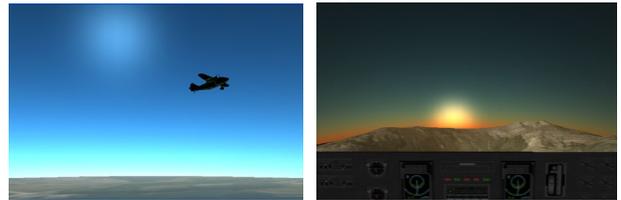


図 3: 結果例

### 7. まとめと今後の課題

本稿では前処理として多重散乱まで考慮して空の色を計算し、特異値分解を用いて輝度値を 2 つのテーブルに分解することによって視点や太陽の高度変化に伴う空の色の変化を高速に表示する手法を提案した。今後の課題としては、大気の状態変化に伴う空の色の変化への対応などが考えられる。

#### 参考文献

- [1] T. Nishita, Y. Dobashi, K. Kaneda, H. Yamashita, "Display Method of the Sky Color Taking into Account Multiple Scattering," *Proc. Pacific Graphics '96*, 1996, pp.117-132.
- [2] Y. Dobashi, K. Kaneda, H. Yamashita, T. Nishita, "A Fast Display Method of Sky Color using Basis functions," *The Journal of Visualization and Computer Animation*, Vol. 8, No. 2, 1997, pp. 115-127.
- [3] A. J. Preetham, P. Shirley, B. Smits, "A Practical Analytic Model for Daylight," *Proc. SIGGRAPH '99*, 1999, pp. 91-100.
- [4] J. Kautz, M. D. McCool, "Interactive Rendering with Arbitrary BRDFs using Separable Approximation," *Proc. of the 10th Eurographics Workshop on Rendering*, 1999, pp.281-292.
- [5] 柳田哲一, 岩崎慶, 土橋宜典, 西田友是, 情報処理学会第 65 回全国大会論文集(4), 2003, pp.109-110.