

# 魔方陣を題材とした探索アルゴリズムの性能評価

鈴木 彰 柴原 一友 乾 伸雄 小谷 善行

東京農工大学 工学部 情報コミュニケーション工学科

## 1. はじめに

魔方陣とは  $n$  行  $n$  列のマスに  $1 \sim N^2$  の自然数を 1 つずつ並べて、縦、横、斜めの和がどれも一定になるような配列である。ここで、 $n$  行  $n$  列の魔方陣を  $n$  次魔方陣と呼び、その定和は  $\frac{n(n^2+1)}{2}$  となる。

魔方陣に遺伝的アルゴリズムを適用した研究 [1] があるが、6 次以上の高次の魔方陣に関しては解けていない。本稿は魔方陣に探索アルゴリズムを適用し、それらの評価を行う。

## 2. 魔方陣への探索アルゴリズムの適応

魔方陣を解くための探索アルゴリズムとして、ランダムサーチ、山登り法、シミュレーテッド・アニーリング(以下 SA) [2]、タブーサーチ [2]、遺伝的アルゴリズム(以下 GA) [3]、それらを組み合わせたハイブリッド探索 [3] を取り扱う。

これらのアルゴリズムはすべての状態空間を探索するのではなく、その一部を探索する。この性質は魔方陣のような魔方陣のサイズが大きくなるにつれ、状態空間が指数的に大きくなる問題を解くのに向いていると考える。

それぞれのアルゴリズムを簡単に説明する。

### (1) ランダムサーチ

解が魔方陣になるまで、ランダムに解を生成する手法。

### (2) 山登り法

解の一部を交換することにより、解を徐々に改良していく手法。

### (3) SA

解を一部交換することにより、解を徐々に改良するのだが、現在の解よりも良い解は常に採択し、悪い解は 0 でない確率で採択する手法。

### (4) タブーサーチ

解に対して複数の遷移が生成され、それらの中から最良なものが選択される。また、局所解脱出のため、最新の遷移は採択しないようにする手法。遷移設計には魔方陣の数字に着目し、その交換する数字が  $\pm 1$  となるものを遷移とした。図 1 の魔方陣では 1 と 2 を入れ替える遷移や 5 と 6 を入れ替える遷移などが生成される。

8	4	3
1	5	2
6	7	9

図 1 3 次魔方陣例

### (5) GA

魔方陣を遺伝子で表し、その遺伝子を複数用意して、交叉や選択、突然変異といった遺伝的操作を行うことにより、最適な解を求める手法。図 1 の魔方陣では遺伝子は (8,4,3,1,5,2,6,7,9) とし、致死遺伝子を生まないために部分一致交叉を使った。交叉によって生まれた子供の一部には、魔方陣の数字を無条件に交換する突然変異を行った。

### (6) ハイブリッド探索

文献 [2] にある GA+SA+タブーサーチのハイブリッド探索に基づいた探索。解を複数用意し、その中の一部を SA で、残りをタブーサーチで探索する。一定回数探索したら、交叉を行う。ここでも、部分一致交叉を使った。

## 3. 評価関数設計

魔方陣の 1 列の評価値は魔方陣のサイズを SIZE、 $i$  行  $j$  列の要素を  $A_{i,j}$  とすると、

$$(\text{列}k\text{の評価値}) = \left\{ \sum_{n=1}^{\text{size}} A_{n,k} - \frac{\text{size} \cdot (\text{size} \cdot \text{size} + 1)}{2} \right\}^2$$

とした。行、斜めに関しても同様に評価値を求め、その和を取ることでその魔方陣の評価値とした。こうすることで、魔方陣の評価値を 0 にする最小化問題と考えることができる。

#### 4. 探索アルゴリズム比較実験

実験結果を表 1、図 2、図 3 に示す。表 1 は魔方陣の各サイズを 5 分間に解けた回数を示している。図 2 はプログラムを複数回動かし、(魔方陣が解けた回数)/(プログラム実行回数)の値を求めたものである。図 3 は 5 次魔方陣の評価値の変化を示したものである。

表 1 5 分間に解けた回数

サイズ	RS	山登り法	SA	タブーサーチ	GA	ハイブリッド
3	1271	12175	412672	1153102	2670	54875
4	0	2285	12316	5691	65	8090
5	0	169	559	5943	1	258
6	0	113	182	6941	1	83
7	0	80	70	3816	0	49
8	0	12	19	1803	0	14

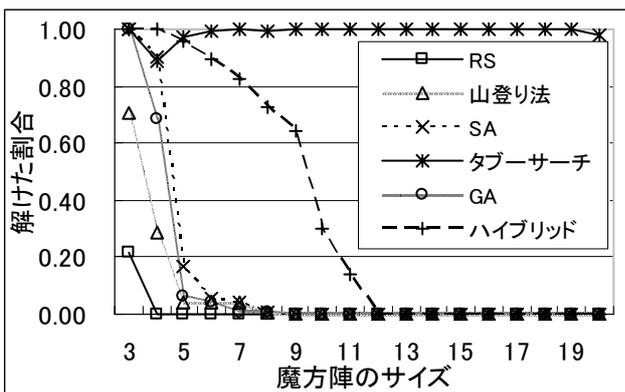


図 2 魔方陣の解けた確率

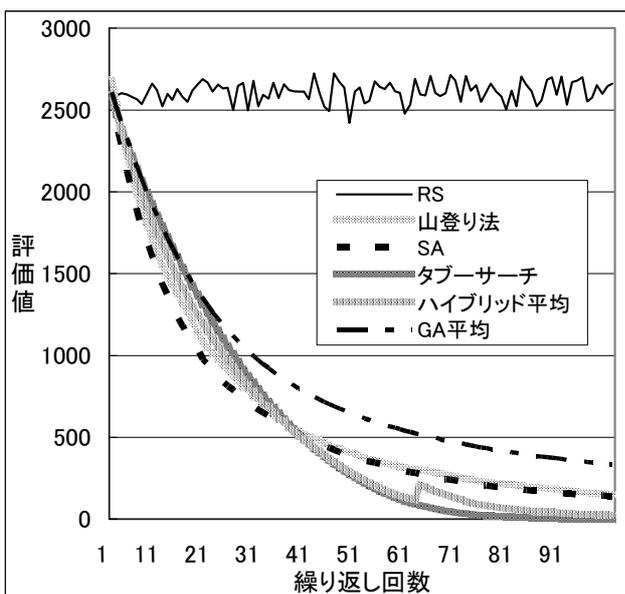


図 3 5 次魔方陣の評価値の変化

#### 5. 考察

他のアルゴリズムが魔方陣のサイズの大きくなるにつれ、解けなくなっていくのに対し、タブーサーチでは実行回数中のほぼ 100% 解くことができた。また、処理時間を一定にした実験でも、多く解けていることから、魔方陣を解くためにはタブーサーチが向いている事がわかった。魔方陣ではサイズが大きくなるごとに状態空間が大きくなり、局所解の数に比べ、最適解の数が少ないため、局所探索能力と局所解脱出能力が必要になる。魔方陣にタブーサーチが向いていた理由は複数の遷移から最良を選ぶという特徴と最新の遷移が採択されないという特徴があるからである。

また、山登り法や SA では 3 次、4 次の低次の魔方陣では制限時間内に解けた回数に差が出たが、高次になるにつれ回数に差がなくなる。これは山登り法や SA による近傍解の中から 1 つをランダムに選び、採択するか判定するという事が、魔方陣の状態空間の中の最適解を見つけるという局所探索能力に乏しいからだと考える。

今回の GA は魔方陣を解くためには向いていなかった。魔方陣では交叉によってどのような特徴を受け継がせるかということが評価しづらく、GA の近傍解は交叉によって生成されるが、この交叉近傍は魔方陣のサイズが大きさに比例し、また、一部を交換する近傍解に比べ数が多いため、その近傍中の最適解を見つけづらいためである。

ハイブリッド探索ではタブーサーチや SA を組み合わせた多点探索であるにも関わらず、タブーサーチには及ばなかった。多点探索型だと、全ての解を計算する計算量がかかるためである。また、図 3 の繰り返し回数 60 のところで評価値が大きくなっているが、これは交叉が行われたためである。図 2 から 12 次以降から解けなくなっているが、これは局所解に収束しているのではなく、一定ステップの間に収束できなかったためである。制限ステップ数を増やすことでより高次の魔方陣が解くことができるようになる。

#### 参考文献

- [1] 前泊貴予, 又吉光邦: 遺伝的アルゴリズムにおける魔方陣の解法, 情報処理学会第 51 回全国大会, 1995.
- [2] 白石洋一 訳: 組み合わせ最適化アルゴリズムの最新手法, 丸善株式会社, 2001.
- [3] 北野宏明 編: 遺伝的アルゴリズム, 産業図書, pp.73-74, 1993.