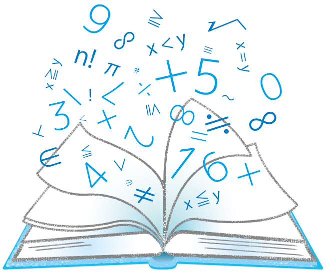

③ SATとラムゼー数

～数学の未解決問題への挑戦～

藤田　博（九州大学）　越村三幸（九州大学）

ラムゼー数

「地球型惑星の間を宇宙船が往来している．私は連合運輸局の役人で，路線の認可権を握っている．

現在，連合内の星は5つで，運航会社はP社とQ社である．両社は互いに路線拡大と集客にしのぎを削っている．今回，P社が『3星物語』なるプランを企画した．これに対抗してQ社も『3星紀行』なるプランで応じた．どちらも内容は同じで，『好きな星を3つ選び，それらの間の全路線を他社を使わずに1回以上乗る』と豪華賞品が貰える特典付き周遊券だ．

私は，この両社の過当競争と勢力格差の拡大を避けたいと考えた．そこでまずは，『どの星からどの星へも直行の往復路線を設けるが，各往復路線につき1社だけしか認可しない』ことにした．そして，両社への路線の割り当てをいろいろと按配した結果，両社のプランとも企画倒れに終わらせることができた．すなわち，どの3つの星を選んでも，それらの間の3路線中には必ず両社とも1つ以上の路線が含まれているので，『全路線を他社を使わずに』という部分が成立しないのだ．たとえば星1・星2・星3を選ぶ場合，星1と星2の間および星2と星3の間はQ社，星1と星3の間はP社を使うしかない（**図-1**）．

ところがその後，連合に新たな星が1つ加わった．そこで，路線割当を振り出しから検討し直したのだが，私の目論見は今度はなかなか果たせない．どうやったって，どれか一組の3星に対して3星物語か3星紀行のいずれかができてしまうのだ．」

白昼の悪夢だった．いつものように現実離れしているが，珍しく筋は通っている．

「6星連合内で3星物語と3星紀行の企画阻止は無理」である理由は，目覚めた後に分かった．以前，

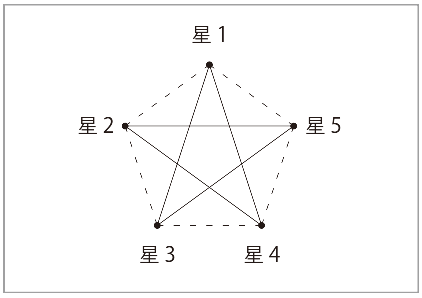

図-1　星間路線図（実線はP社，破線はQ社）

「シングル100室のホテルに101人の客が来たため相部屋になった人がいた」という眠っていても分かりそうな話（鳩ノ巣原理）を聞いたことがあるが，なんと今回の夢の理屈に深く関連している．

悪夢の続きで連合がさらに拡大する事態に備えて，話を少し一般化しておこう．「連合に属する星はN個，連合内でP社のs星物語，Q社のt星紀行の企画申請があった．私はどちらも実現しないように，巧く路線割当を按配したい☆1」

実は，両社の企画のどちらをも妨げるような路線割当ができるのはNが小さいうちである．Nがs, tより十分大きいと，少なくともどちらかの企画の実現が不可避となる．そうなるNの最小値をラムゼー数といい，$R(s, t)$と表す☆2.

★地球記録

ラムゼー数をs, tの式として表せないものかと思うが，我が地球上の数学者とコンピュータ科学者の数多の挑戦にもかかわらず，一般式など得られていないし，具体的な値として既知なのはわずかに9個のみだ☆3.

☆1 完全グラフK_Nを2色で辺彩色したとき，単色のクリークK_sやK_tを含まないようにしたい．3社（3色）以上を考える一般化もある．パーティ問題，リーグ戦問題などの例え話もある．
☆2 van der Waerden数という同類もある．
☆3 $R(3, 3)=6$, $R(3, 4)=9$, $R(3, 5)=14$, $R(3, 6)=18$, $R(3, 7)=23$, $R(3, 8)=28$, $R(3, 9)=36$, $R(4, 4)=18$, $R(4, 5)=25$.

そんなに難しいのなら，せめて値の範囲（下界と上界）をできる限り絞り込みたい．ところが，下界・上界の更新すら停滞気味で，進展は遅々としている．

現在最も気になる $R(5, 5)$ については 43 以上 49 以下まで絞り込まれており，ズバリ 43 と予想する専門家もいる．しかし，次の $R(6, 6)$ となると 102 以上 165 以下としか分かっていない．その難度たるや，あの高名な数学者 Erdős が「$R(6, 6)$ は地球人には分かるまい」と語ったくらいだ．

★ラムゼーグラフ

図 -1 のように「5 星連合内で 3 星物語と 3 星紀行を阻止できる」ことを示す図はラムゼーグラフと呼ばれ，$RG(3, 3, 5)$ と表される．特に，$R(s, t)=M$ に対して $RG(s, t, M{-}1)$ を臨界ラムゼーグラフという．たとえば，$R(3, 3)=6$ なので $RG(3, 3, 5)$ は臨界ラムゼーグラフである．

$N<R(s, t)$ に対する非臨界ラムゼーグラフでも，実際に描ければラムゼー数 $R(s, t)$ が $N+1$ 以上ということを保証できるから，ラムゼー数決定の目的に何がしか貢献できるかもしれない．

SAT でラムゼーグラフ探し

まず，命題変数 P_i^j で「星 i と星 j の間は P 社が運航する」を表すことにしよう．このとき，$\neg P_i^j$ は「星 i と星 j の間は P 社が運航しない」となり，私の路線認可方針によれば，すなわち「星 i と星 j の間は Q 社が運航する」ことになる☆4.

星 1・星 2・星 3 を選んだとき，3 星紀行を阻止するには，3 路線の少なくとも 1 つは P 社であること，すなわち命題論理式（節）

$$P_1^2 \vee P_2^3 \vee P_1^3 \tag{1}$$

を真とすればよい．一方，3 星物語を阻止するには，3 路線の少なくとも 1 つは Q 社である (P 社でない) こと，すなわち節

$$\neg P_1^2 \vee \neg P_2^3 \vee \neg P_1^3 \tag{2}$$

を真とすればよい．5 星連合から 3 星の選び方は，ほかに 9 通りあるので，私の目論見を満たす（ラムゼーグラフを描く）ために満たすべき節の総数は 20 となる．そして，この 20 個の節のすべてを真とすればよい．このように定式化した問題記述は，すでに一般的な SAT ソルバーが入力形式として採用している命題論理式の連言標準形 (CNF) になっている．早速，SAT ソルバーを動かしてみよう．

SAT ソルバーが上の 20 個の節を「充足可能」と判定してくれれば，私の目論見は成功だ．すなわち，3 星物語と 3 星紀行の双方を阻止する路線割当が可能であることが分かる．SAT ソルバーは各命題変数の真偽割当も教えてくれるだろうから，それをもとにラムゼーグラフを具体的に描けるだろう．

もしも逆に「充足不能」と判定された場合☆5，役人としての目論見は失敗だが，ラムゼー数決定という本来の目的に照らせば，むしろ超がつくほどの大成功である．その場合，ラムゼー数の上界を定めること（超高難度！）ができるのだから．

こうして始めた $RG(s, t, N)$ 探しの旅，楽しいはずが結構難儀だ．命題変数の個数は $\binom{N}{2}$，節の個数は $\binom{N}{s}+\binom{N}{t}$ となる．たとえば，$RG(5, 5, 43)$ を求めようと思ったら，命題変数 903 個，節数 1,925,196 という，かなり大規模な SAT 問題になってしまう．SAT 問題としての難しさは，節数と命題変数の個数の比が大きいことでも察せられる．これくらいは最近の高性能 SAT ソルバーの守備範囲のハズだが，起動すると延々と走り続け，結果がなかなか得られない．

★対称的なラムゼーグラフ

対称的で美しい図 -1 では，命題変数の間に

$$P_1^2 \equiv P_2^3 \equiv P_3^4 \equiv P_4^5 \equiv P_1^5 \tag{3}$$
$$P_1^3 \equiv P_2^4 \equiv P_3^5 \equiv P_1^4 \equiv P_2^5 \tag{4}$$

☆4 往復路線（無向グラフ）で $P_i^j=P_j^i$ なので $i<j$ のみ考え，異なる星の間の路線だけを扱うので $i=j$ は考えない．

☆5 現在の地球上では稀有な事態．

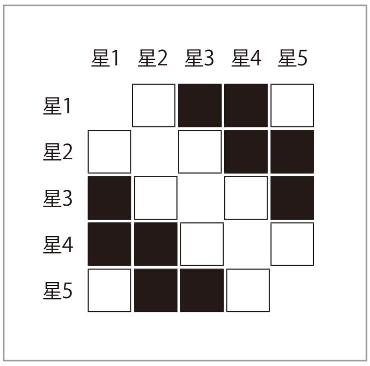

図 -2　星間路線表（*RG* (3, 3, 5) の隣接行列）

という同値関係が成立している．これを節 (1),(2) などに反映すれば，命題変数の数と節数がともに 2 個という格段に簡単な問題になる．

節 (1),(2) などをいじらずに同値式 $P_i^j \equiv P_k^l$ の制約を課すには，SAT ソルバーの入力に

$$\neg P_i^j \vee P_k^l \tag{5}$$

$$P_i^j \vee \neg P_k^l \tag{6}$$

という節の対からなる CNF を追加すればよい．

ところで，図 -1 は**図 -2** に示すような路線表（グラフ理論で言う隣接行列）の形式でも表現できる．ただし，■が P 社，□が Q 社で，主対角線部分は異なる星への路線ではないので空白だし，往復路線なので *i* 行 *j* 列は *j* 行 *i* 列と同じ色，すなわち主対角線に関して対称である．これは問題設定による基本的な対称性だ．図 -1 の五芒星に現れた対称性は，図 -2 のストライプ状の模様に反映されている．

どのラムゼーグラフにもこのような対称性があるならば，それに応じた制約を付加して探せばよく，仕事が簡単になるかもしれない☆6．

★少し乱れたラムゼーグラフ

臨界ラムゼーグラフで完璧なストライプ柄のものが得られないことがある☆7．むしろそれが普通なのだ．たとえば，**図 -3** は臨界ラムゼーグラフ *RG* (3, 6, 17) の 1 つで，■と□のストライプ柄が基調だが，少し乱れた個所がある．乱れを修復して完璧なストライプ柄に塗り替えたら，もはやラムゼーグラフではなくなってしまう．

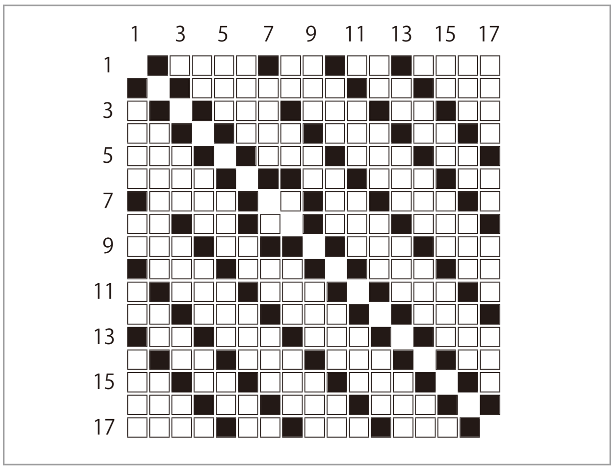

図 -3　ラムゼーグラフ *RG* (3, 6, 17) の隣接行列

ではどうすれば，「おおむね対称的だが少し乱れがある」ものを上手く見つけられるだろうか．要は (3),(4) のような同値式たちの適切な一部を無効にすればいいのだ．1 つの同値式 $P_i^j \equiv P_k^l$ を節の対 (5),(6) で表す場合，(5) を無効化すれば，P_i^j が■で P_k^l が□の不一致が許され，(6) を無効化すれば，P_i^j が□で P_k^l が■の不一致が許される．このように，節のいくつかを無効化すること（制約緩和）により，「少し乱れた」ものでも解の候補に含められるはずだ．

ここで，必ず満たすべき節をハード節，適宜無効化してよい節をソフト節と呼ぼう．そして，節 (1),(2) などはハード節，節 (5),(6) などはソフト節として扱うとよい．

ただ，どのソフト節を無効化すればよいかはあらかじめ分からない．命題変数の真偽割当と同様，無効化対象節の投機的な選択と後戻りによる試行錯誤が必要だろう．また，推論中，より頻繁にコンフリクトを起こす（満たされない）節から順に無効化するのが効果的かもしれない．

さて，一般の SAT ソルバーはハード節／ソフト節を差異化できないので，そのままでは使えない☆8．

☆6 *RG* (3, 3, 5) のほかにも臨界ラムゼーグラフ *RG* (3, 4, 8), *RG* (3, 5, 13), *RG* (3, 9, 35), *RG* (4, 4, 17), *RG*(4, 5, 24) などで隣接行列がストライプ柄となるものが得られる．

☆7 *RG* (3, 6, 17), *RG* (3, 7, 22), *RG* (3, 8, 27) など．

☆8 MaxSAT ソルバーは利用可能だが，用途が異なるので，本稿の目的に適うとは限らない．

そのため，特別なソルバーが開発されている☆9．これにより，対称的なラムゼーグラフを選好的に探しながらも，少し乱れたラムゼーグラフの正解を逃さず見つけられるようになった．

★地球記録の更新に向けて

それにしても，この宝探しは生易しくない．ラムゼーグラフにはストライプ柄だけではなく，もっと多様で深淵な対称性（あるいは完璧なランダム性，説明できない特異性？）が潜在しているものと推察される☆10．そこで，求める $RG(s, t, N)$ ごとに最適な付加制約を与えて探索したいところだが，それについては基本的に我々の経験と勘によっているのが実状である．

SAT 技術を頼りに続けている気長な旅の途中で，最近遭遇した貴重なラムゼーグラフの 1 つを**図 -4**に示す．主（右下り）対角線対称のみならず，副（右上り）対角線対称なのが分かるだろうか．また，ところどころ市松模様の柄が見えないだろうか☆11．

特筆すべきは $RG(4, 8, 57)$ と $RG(4, 11, 100)$ の発見である．その結果，$R(4, 8)$ と $R(4, 11)$ の最良下界をそれぞれ 58 と 101 に更新できた．これらは現時点で我々の知り得る限り地球新記録である[1)]．

夢のまた夢

夢の続き．それは，対称的で綺麗な図柄たちの映像，アラベスク模様，クラドニ図形，等々．時にアルハンブラ宮殿の思い出が交錯する．それから少し風変わりだが隙のない図柄，ペンローズタイルの様だ．さらには超対称性とかリーチ格子とかキーワードや意味不明のおぼろげな概念だけがうごめく，抽象的で不思議な夢も混じる．私が特に惹かれたのは，乱れた部分や不規則／不定形な要素を含むものたちだ．格子欠陥，準結晶，非正規充填，チューリングパターン，等々．鮮やかなカラー映像がまるで万華鏡のように目まぐるしく変化するときには，少し眩暈を感じる．気に入った画に限って二度と繰り返すことなく，目覚めた後はすぐに消え去って紙に描きとめることができない．それらはきっと，私が今解きあぐねている問題へのヒントになってくれるに違いないのに……．

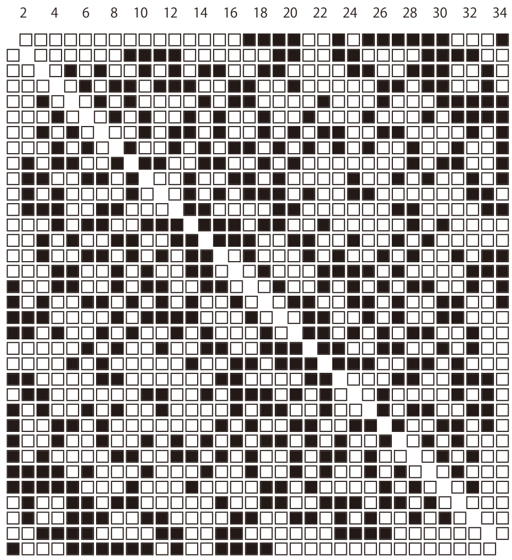

図 -4　ラムゼーグラフ $RG(4, 6, 34)$ の隣接行列

近年，さまざまな難しい問題が SAT 問題にコンパイルされ，進化した SAT 技術により解決されている．今後は，そうした SAT 問題を解くうちに，我々には予見困難だった元問題に潜む意味構造が自動的に炙り出されるという，一種の逆コンパイル技術の実現を期待したい．まさに夢物語だろうか．

参考文献

1）藤田　博：SCSat3 によるラムゼーグラフ探索について，第 29 回人工知能学会全国大会，2H5-OS-03b-1(2015).

（2016 年 4 月 29 日受付）

☆9　http://sites.google.com/site/scminisat/
☆10　ケーリーグラフとの関連性などがよく研究されている．
☆11　実際，副対角線対称制約をハード節，市松模様制約をソフト節として付加して探索した結果である．

藤田　博（正会員）　fujita@inf.kyushu-u.ac.jp

九州大学大学院システム情報科学研究院准教授．博士（工学）．自動推論に関する教育研究に従事．

越村三幸（正会員）　koshi@inf.kyushu-u.ac.jp

九州大学大学院システム情報科学研究院助教．博士（工学）．自動推論システムに関する研究に従事．