人工物の数理モデル化：内包原理について

3D－01

原田紀夫
拓殖大学工学部情報工学科

1. はじめに

数理モデルを実問題から構築する場合，単に既存の数学を適応するだけでなく，根本に立ち戻って考えることが必要となる。もちろん，このような考え方を一般論として論じても抽象論に陥り，ほとんど意味のないものとなる。ここでは筆者がコンピュータの性能モデル構築の際に導入した考え方や体験を基にして，数理モデル，特に人工物の数理モデル化を考えることにしたい。特にここで人工物に限定しているのは自然現象の場合と異なる点が重要であると考えるからである。

ここでの考え方は一般的ではないので，常に有効であるとは限らない。根源に立ち戻って考えることによって，従来と異なる考え方，理論，手法を確立できる可能性が高くなるというのが筆者の基本の考え方である。

2. 人工物の数理モデル化について

2.1 要素還元主義とイデアと自然(物理)現象

ここでは筆者の人工物の定量的な数理モデルについての考えを述べる。まずは言い古されたことも含めて簡単に復習しておこう。近代科学が成立する上でギリシア哲学が源流とされ，特に要素還元主義はギリシア人からガリレオ，デカルト[4]を経てニュートン力学の成立に貢献した。なぜ要素還元主義が有効に働いたか。種々の理由が考えられるがその中のひとつに自然現象を対象にし，特に物理現象が対象であったからである。物理現象では背後に最適化の原理，例えば最小作用の原理が働いており，その作用の結果として起こる現象は数学で記述でき，あるいは記述できるように数学を発展させ，方程式に至ったと考えられる。イデアの存在を信じ，プラトン主義で理想を求めて，自然現象を単純な要素に還元していけば，最適化原理が成り立つレベルに達し，これが明解な方程式を可能にしたと考えられる。これに対して人工物における現象ではパラメータが多く複雑というだけでなく要因を分析し，細かな要素に還元してもそこで起こる現象は必ずしも最適化されたものに行き着くとは限らない。偶然や設計者の好みや過去のしがらみの結果であるかも知れず，そこで発現する現象をいくら精密に定量的に測定しても，方程式にはならない。これを基礎に次節で人工物のモデル化を考える。

2.2 人工物のモデル化の指針：内包原理

人工物での現象の定量的なモデルはどのように作ったらよいか。一般にモデルに関してはオッカムの剃刀のような概念節減の原理など単純性の基準はある。しかしそれだけではモデル化の手助けとはならない。人工物においては最適化された現象が現れるまで要素還元をどこまでも続けるというのは先に述べた理由から適切ではない。どこかで要素還元を停止すべきである。それは人工物の場合にはモデル作成には目的があり，それに適ったレベルのモデルであることが重要で，その停止の判断は有用性に置くのが妥当である。いたずらに精密なモデルは有用性に欠ける。モデル化は現実世界からモデルの世界への写像であるが，現実世界をすべて取り込むことはできない。そこで定量的指標をモデル構築の基礎としてひとつ定め，モデル化の軸として，以下で述べる方針に従ってモデルを構築する。それは指標がもっている性質が数理モデルの中で数学的に自然に記述できるように構築するということである。この意味はモデルの中で対応する性質を表現するのに，特別に新たな制約を付け加えなくても良いということである。これは現実世界の指標がモデルの中に自然に内包されるように構築するという指針である。ここではこれをモデル化の内包原理と呼ぶことにする。(内包という言葉は哲学や論理学で使われているがここではそれと異なる意味に使っていることに注意されたい。) これは自然現象のモデル化では最適化原理に基づいて精緻な方程式を追究するの

Mathematical modeling of an artificial object: Inclusively modeling approach
HARADA Norio
Department of computer science, Faculty of Engineering, Takushoku University

に対して，人工物のモデル化では要素還元は有用性を基準に停止して，その代わりに内包原理のもとで指標の性質が記述できることを追求するということである。

2.3 忘筌

禅に「忘筌」という言葉がある。これは荘子[2]にある言葉で「魚を得て筌を忘れる。」といい,日常的には魚を得たら道具のことを忘れてしまうという,恩知らずの意味に使われている。この言葉の本来の意味は忘れることによって,深く広くなることで,より発展することを含意している。ある目的をもった行為において事柄の達成前,達成,達成後の状況を表現する言葉として適切であるのでこの言葉を使っている。ひとつのモデルの構築前と構築後では状況は一変するのである。良いモデルでは完成して目的を達成した後には最初の目的を離れて,全く異なる分野に応用され,さらに新しい発展を遂げる。例を挙げればユークリッドの幾何学,ニュートンの力学,さらにコンピュータも最初は計算をする機械として実現されたが現在では本来の目的を超えた応用と発展が遂げられている。このような優れたものの構築はその後多様な分野に影響を与え,自らも発展をする。T.クーン[7]のいうパラダイムはこのような仕組みで起こると考えてよい。このようなパラダイムの変更を引き起こすような優れたものばかりでなく，通常における些細なモデルにおいてもモデル評価の基準として応用性や発展性で計ることができよう。良いモデルは現実世界の論理的な本質的な部分を含み,それによって広い応用や自立的発展が見込まれる。そこで人工物の数理モデルでも応用性や発展性を持つか否かをひとつのクライテリオンとすることが考えられる。しかし人工物のモデルの場合にはすべてがアドホックなものと考えられて,そのような有意義な応用や発展が可能であるかは全く未知の問題である。これを確かめることも本論文の目的のひとつである。

このような観点から次章以降において筆者の関係した数理モデル[9]を例として内包性と応用性と発展性[8]～[16]について概観し,検討する。

3.コンピュータシステム性能の数理モデル化

3.1 システムの性能評価問題と数理モデル

1960 年代から 70 年代にかけてコンピュータシステムの高度化,複雑化に伴い,設計・開発・運用の面でコンピュータの性能評価が重要な問題であった。ハードウェアモニタ,ソフトウェアモニタ等の開発が進められ,数学モデルによる評価も進められた。コンピュータの理論モデルにはチューリング機械があるが実際のコンピュータの性能評価問題には使えない。当時数学モデルとしては待ち行列理論を用いたモデルが広く研究された。筆者は前述の観点から数理モデルの内包性と応用性・発展性を考えて既存のモデルと異なるモデル化を試みたものである[9]。

3.2 システム性能の 3 要因と膨張率による表現

要素還元主義に従ってコンピュータの性能を決める要因として(1)並列処理構造(2)内部制御(3)負荷(プログラム)の特性,の3つの要因を抽出し,それらの要素をそれぞれモデル化し,それらを総合した形で性能を表現する指標として「膨張率」という概念を導入した。

後の説明のために最も簡単な例を挙げる。図 1 はシステムの並列処理構造を,図 2 は膨張率の概念を図示したものである。

図 1 は一つの CPU と多数の IO が存在するシステムを対象にし,CPU の命令を A,IO 処理の命令は B とし,負荷であるプログラムは命令の A,B の系列で表されるとする。各プログラムでの命令 A,B の出現確率は p,q とし $p+q=1$ とする。n個のプログラムを並列処理が可能ならば並列に実行するとする。ここで各プログラムでの出現確率が異なる場合も全く同様に成り立つが説明の簡単のために同一とする。図 2 は $n=4$ として,この構造の下で各プログラムから長さ $k=15$ の命令系列を切り取った命令のブロックがシステムに与えられたものとし,このシステムで並列処理構造を生かして定められた制御の手順で実行したときに要する処理時間を単位時間(クロック)の回数で表す。この処理時間は並列度 n と長さ k に依存する。そこで処理時間と長さ k の比をとり,これを膨張率と定義する。

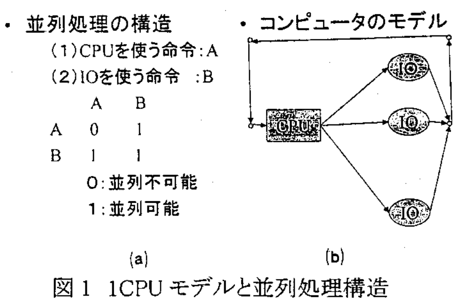

図 1　1CPU モデルと並列処理構造

```
    12345  67890 12345
P1: ABABB BBBBB BAABB
P2: BABAB BBBAA ABAAA
P3: AAABA BABAA BABBA
P4: ABABA BABAB ABABA
   A  B  A  BB BB BB  B  B A A  BB
   B  A  B  AB BB BA  A  A B  A AA
    A  A  A BA BA B A  AB  AB  B A
     A B    AB AB AB  AB   AB   AB  A
    3  2  3  1 2 1 21 3  2 2 2  3 1 3   計31
     並列度＝4   プログラムの長さ＝15   処理時間＝31
     膨張率＝プログラムの長さ/処理時間＝31/15＝2. 067
```

図 2　並列度 4 での膨張率の例

3.3 平均膨張率モデル

ここでシステム全体の性能は各プログラムでの命令の出現確率にもとづいて膨張率の全体の平均を用いることとし，平均膨張率と定義する。ここで膨張率を個別に計算することは多くの手間が掛かるが，平均膨張率は単純になることがある。上記のシステムの並列処理構造で内部制御の手順として各プログラムから第 j 番目の命令をひとつの組として並列構造のもとで最小の回数で処理し,これを各組毎に逐次的に実行する制御を用いるとする。

このシステムの平均膨張率を E(n:p,q)と表せばこれは関数形として次の簡単な式で得られる。

$$E(n,p,q)=np+q^n \quad ,p+q=1,p,q\geqq 0$$

これは膨張率の期待値を表すものである。この値が大きければ並列に処理される度合いが小さく,小さければそれが大きいことを意味する。すべて並列に出来れば E(n:p,q)=1,全く並列に処理出来なければ逐次処理するしかなく, E(n:p,q)= n

となる。この例は線形並列処理構造と呼ばれる特殊な構造の最も簡単な場合であるが一般に平均膨張率は極めて単純な多変数の関数となり,取り扱い易くできることが分かっている[12]。これはオッカムの剃刀のいう単純性のクライテリオンに合致するものといえる。次に内包性を検証する。

4. 平均膨張率モデルの内包性の検証

ここでは前節のモデルが内包性を持つか否かを検証する。即ち現実世界で当たり前に起こることがモデルの関数の特性としても自然に実現されていることを確認する。以下で幾つかの特性について調べて見よう。

(1) 膨張率であるから常に値は 1 より大きい

$$E(n:p,q)=np+q^n \quad \geqq \quad 1$$

(2) 単一処理 n=1 は伸びない:$E(1:p,q)=1p+q^1=1$

(3) 並列度 n の増加関数: $E(n+1:p,q) \geqq E(n:p,q)$

(4) すべてが並列可能 q=1 ならば $E(n:0,1)=1$

(5) すべてが並列不可能 q=0 ならば $E(n:1,0)=n$

(6) $p=x/(x+y),q=y/(x+y),x,y\geqq 0$ とおいて CPU 時間 x,IO 時間 y に関する平均膨張率の偏微分係数の間には次の不等式が成り立つ。

$$\partial E(n:p,q)/\partial x \ > \ 0 \ > \partial E(n:p,q)/\partial y$$

(7) ターンアラウンド時間を $T(n:x,y)=(x+y) \times E(n:p,q)$ と定義すると次が成り立つ。

$$\partial T(n:x,y)/\partial x > \partial T(n:x,y)/\partial y > 0$$

(8) スループット(生産性)を $Th(n:x,y)=1/T(n:x,y)$ と定義すると次が成り立つ。

$$\partial Th(n:x,y)/\partial x < \partial Th(n:x,y)/\partial y < 0$$

このように多くの性質が自然にモデルの上で成立することが分かり,内包性を十分持っているとしてよいであろう。

5. 平均膨張率モデルの応用性と発展性

内包性の高いモデルは現実世界のある部分を内蔵しており,これが広い応用性と高い発展性を導くものと考えられる。以下では幾つかの応用例・発展例を取り上げてこれを検証したい。

5.1 並列処理の平均膨張率理論と応用[12]

一般化された任意の並列処理構造が線形処理構造に分解できること,また線形処理構造の平均膨張率関数が同一特性および異なる場合に対して定理として与えられた。また互いに双対な線形処理構造の平均膨張率関数の和は並列度 n に+1 した一定値となることが示される。この理論はベクトル計算機のスカラ処理の重要性を明らかにした。

5.2 LSI の統計力学的配置理論への発展[10][11]

平均膨張率モデルの応用であると同時に人工物の数理モデル化の別の例でもある。LSI のレイアウト設計における LSI の配線収容性の予測問題は配線の混雑度を予測評価する問題となる。これはコンピュータでジョブの混雑度を評価する平均膨張率モデルで扱え,応用したものである。それがその後 LSI の統計力学的配置理論に発展して,スーパーコンピュータ等に適用され,アルゴリズムや配置ゲームなどへの展開もある。図3は大型汎用

コンピュータにおける LSI のレイアウトの実測の配線長分布と LSI の統計力学的配置理論から導出される理論配線長分布とを比較した例である。実測分布と理論分布が良く適合していることが分かる。ここで示したのは 2 例に過ぎないが数十例の中で数例を除いてほとんどすべてがこのように適合を見せた。これは人の手が加わったレイアウト設計という人工的な活動の結果として分布形が理論と実際とがこのように適合することは驚くべきことであると言える。

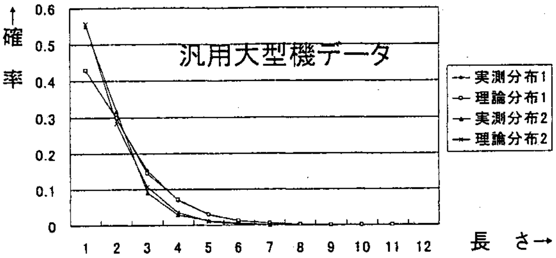

図 3 実測配線長分布と理論分布の比較

5.3 組み合わせ最適化問題への応用

平均膨張率理論を援用してグラフ理論における重要な NP 完全問題である最大クリーク問題[13],彩色数問題[14]に新しい定式化を与えたもので,今後,発展が期待できるものである。

5.4 システムの超調和理論への発展

コンピュータシステムを特に「システム」という側面に焦点をあてて根源的システムを数学的に扱うための理論で,平均膨張率理論を発展させたものである。根源的システムでは調和があり,それが崩れることがある。しかしその場合にも調和を保つことができ,これを「超調和」という[15],[16]。

6.おわりに

本稿で述べた内包原理,忘筌の考え方は筆者が数理モデルを作る際に研究の方向づけのために導入したものである。従って常にこれらの考え方が有効であるとは限らない。また 5.章の応用と発展については正確には意味が伝わらないと思うが。内包性や忘筌などを通して数理モデル化の何らかの参考になれば幸いである。

参考文献

[1]パース著佐藤邦武編訳:「連続性の哲学」,岩波文庫,2000

[2]金谷治訳注:「荘子 (雑篇)第四冊」外物篇,岩波文庫,1983

[3]L.ヴィトゲンシュタイン著藤井,坂井訳:論理哲学論考,法政大学出版局

[4]デカルト著,野田又夫訳:「精神指導の規則」岩波文庫,1974

[5]S.K.ネトル,桜井那朋:独創が生まれない,地人書館,1989

[6]永田親義:独創を阻むもの,地人書館,1994

[7]トーマス・クーン著中山茂訳:科学革命の構造,みすず書房,1971

[8]I.E.S. Edwards:'The Pyramids of Egypt' Penguin Books,1961

[9]原田紀夫:計算機システム評価の数学的基礎理論」信学論(D),J59-D12,pp.843-850,1976

[10]HARADA Norio:A New Interconnection Length Prediction Method for Masterslice LSI, Proc.ISCAS'82,Rome, ,pp760-763,1982

[11]原田紀夫:LSI の統計力学的配置理論とその応用,信学論(A)vol.66-A,No.10,pp1015-1022

[12]原田紀夫:並列処理の平均膨張率理論とその応用,信学論(A),vol.J70-A, No.4, pp.695-706,1987

[13]原田紀夫:最大クリーク問題の新しい定式化,電子通信学会,研究会資料 ST77-108,1977

[14]原田紀夫:彩色数決定問題の新しい定式化,昭和 55 年度電子通信学会総合全国,1980

[15]原田紀夫:「システムの超調和理論 (A Mathematical Theory of System Super-Consistency)」拓殖大学研究叢書(自然科学 2),拓殖大学理工学総合研究所,pp1-502,1998

[16]原田紀夫:「システムの超調和理論の概要情報処理学会第 60 回(平成 12 年前期)全国大会,1-297,298(2000)